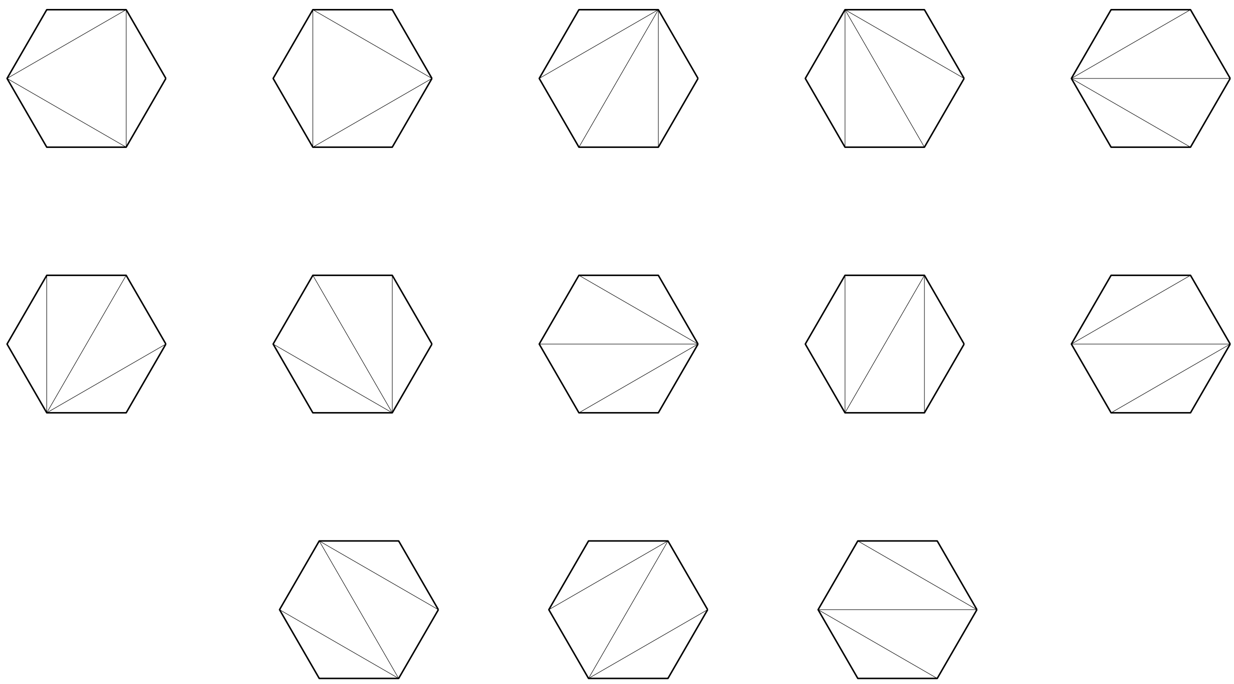
Concours Blanc 2005 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

25 décembre 2009

1 Les triangulations d'Euler

1. Voici les 13 hexagones demandés, les triangulations ayant subi une tentative de classification selon la forme de la figure obtenue :



2. Il n'y a qu'une façon de trianguler un triangle (en ne faisant rien !), donc $c_1 = 1$. Un quadrilatère peut par contre être trianguler de deux façons : il suffit de tracer une diagonale pour le couper en deux triangles et il y a deux diagonales. On en déduit que $c_2 = 2$.
3. Une fois le triangle $A_1A_{k+2}A_{n+3}$ imposé, il reste à découper en triangles les deux polygones qui sont de part et d'autre de ce triangle. Le premier a pour sommets A_1, A_2, $\dots$, A_{k+2}, soit $k+2$ sommets, donc peut être triangulé de c_k façons. Le deuxième a pour sommets A_{k+2}, A_{k+3}, $\dots$, A_{n+3}, soit $(n+3)-(k+2)+1 = n-k+2$ sommets, donc peut être triangulé de c_{n-k} façons. Les deux triangulations se faisant indépendamment l'une de l'autre, il y a au total c_kc_{n-k} triangulations de notre polygone initial contenant le triangle $A_1A_{k+2}A_{n+3}$.
4. Il y a par définition c_{n+1} triangulations pour le polygone considéré. Chacune de ces triangulations contient exactement un triangle du type $A_1A_{k+2}A_{n+3}$, donc il suffit pour obtenir le nombre total de triangulations du polygone d'additionner les nombres obtenus à la question précédente pour toutes les valeurs possibles de k, c'est-à-dire pour k compris entre 0 et n. Autrement dit, $c_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} c_kc_{n-k}$.

5. À l'aide de la formule précédente, on calcule $c_5 = \sum_{k=0}^{k=4} c_k c_{n-k} = c_0 c_4 + c_1 c_3 + c_2^2 + c_3 c_1 + c_4 c_0 = 14 + 5 + 4 + 5 + 14 = 42$ (les plus courageux pourront tenter de dessiner les 42 triangulations possibles sur un heptagone régulier).

2 Recherche d'une formule close

1. C'est un simple calcul : $\frac{C_{k+1}}{C_k} = \frac{k+1}{k+2} \frac{\binom{2k+2}{k+1}}{\binom{2k}{k}} = \frac{k+1}{k+2} \times \frac{(2k+2)!}{(k+1)!^2} \times \frac{k!^2}{(2k)!} = \frac{k+1}{k+2} \times \frac{(2k+2)!}{(2k)!} \times \frac{k!^2}{(k+1)!^2} = \frac{k+1}{k+2} \times \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2} = \frac{2(2k+1)}{k+2} = \frac{4k+2}{k+2}$.
2. Utilisons donc l'indice généreusement donné par l'énoncé : en posant $i = n - k$, on obtient $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} k C_k C_{n-k} = \sum_{i=0}^{i=n} (n-i) C_{n-i} C_i = \sum_{i=0}^{i=n} n C_i C_{n-i} - \sum_{i=0}^{i=n} i C_i C_{n-i} = NS_n - T_n$. On a donc $T_n = nS_n - T_n$, soit $2T_n = S_n$ et donc $T_n = \frac{n}{2} S_n$.
3. Partons plutôt du membre de droite, et utilisons le résultat de la question 1 en l'écrivant sous la forme $(4k+2)C_k = (k+2)C_{k+1}$: $4T_n + 3S_n = 4 \sum_{k=0}^{k=n} k C_k C_{n-k} + 3 \sum_{k=0}^{k=n} C_k C_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} (4k+3) C_k C_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} (4k+2) C_k C_{n-k} + \sum_{k=0}^{k=n} C_k C_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} (k+2) C_{k+1} C_{n-k} + S_n$. Faisons maintenant un petit changement d'indice en posant $i = k + 1$ dans la première somme, et on a $4T_n + 3S_n = \sum_{i=1}^{i=n+1} (i+1) C_i C_{n+1-i} + S_n = \sum_{i=0}^{i=n+1} (i+1) C_i C_{n+1-i} - C_0 C_{n+1} + S_n$. Or, $C_0 = \frac{1}{1}\binom{0}{0} = 1$, donc $C_0 C_{n+1} = C_{n+1}$ qui, par hypothèse est égal à S_n. Il nous reste donc $4T_n + 3S_n = \sum_{i=0}^{i=n+1} (i+1) C_i C_{n+1-i} = \sum_{i=0}^{i=n+1} i C_i C_{n+1-i} + \sum_{i=0}^{i=n+1} C_i C_{n+1-i} = T_{n+1} + S_{n+1}$, et la formule est démontrée.
4. En combinant les résultats des questions 2 et 3, on a $\frac{n+1}{2} S_{n+1} + S_{n+1} = 4 \times \frac{n}{2} S_n + 3S_n$, soit (en multipliant tout par 2) $(n+3)S_{n+1} = (4n+6)S_n$. Autrement dit, en utilisant notre hypothèse de récurrence, $S_{n+1} = \frac{4n+6}{n+3} C_{n+1}$. Or, on sait en appliquant le résultat de la question 1 pour $k = n + 1$ que $\frac{C_{n+2}}{C_{n+1}} = \frac{4(n+1)+2}{n+1+2} = \frac{4n+6}{n+3}$. On en déduit que $S_{n+1} = C_{n+2}$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et achève la récurrence.
5. Soient deux suites vérifiant (u_n) et (v_n) vérifiant ces relations. Prouvons par récurrence forte que $u_n = v_n$ en posant $P_n : \forall k \leqslant n,\ u_k = v_k$. La propriété P_0 est vraie, puisqu'elle affirme simplement que $u_0 = v_0$ et que ces deux nombres sont égaux à 1 par hypothèse. Supposons donc P_n vérifiée pour un certain entier n. On a alors $\sum_{k=0}^{k=n} u_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} v_k v_{n-k}$, puisque les termes apparaissant dans les deux sommes sont les mêmes par hypothèse de récurrence. On en déduit que $u_{n+1} = v_{n+1}$, ce qui prouve P_{n+1} (pour les rangs strictement inférieurs à $n+1$, l'égalité des termes fait partie de l'hypothèse de récurrence) et achève le raisonnement.
6. La suite (c_n) vérifie les hypothèses de la question 5 (cf première partie). La suite (C_n) vérifie également $C_0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{k=n} C_k C_{n-k} = S_n = C_{n+1}$ comme on l'a démontré plus haut. D'après la

question précédente, les deux suites sont donc égales, et $c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

3 Chemins minimaux

1. Pour caractériser un chemin, il faut simplement choisir la position des p pas vers l'Est (ou des q pas vers le Nord si on préfère) parmi les $p+q$ pas effectués au total. Il y a donc $\dbinom{p+q}{p}$ (ou $\dbinom{p+q}{q}$) chemins possibles.
2. Le principe est exactement le même : pour aller de N à M en suivant un chemin minimal, on effectue $p'-p$ pas vers l'Est et $q'-q$ pas vers le Nord, soit $p'+q'-p-q$ pas au total parmi lesquels il faut choisir où on place les pas vers l'Est. Cela fait bien $\dbinom{p'+q'-p-q}{p'-p}$ chemins possibles.
3. Suivons donc les indications de l'énoncé, et découpons notre chemin en deux morceaux en marquant un point d'arrêt quand on rencontre pour la première fois la bissectrice, en un certain point $Z(k,k)$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$. La deuxième partie du chemin, celle qui relie Z à N, mène donc du point (k,k) au point (n,n) en restant toujours sous la bissectrice (mais en ayant tout à fait le droit de la toucher à nouveau), ce qui est équivalent à un chemin menant de $(0,0)$ à $(n-k,n-k)$ et restant sous la bissectrice (il n'y a qu'à se décaler un peu), et laisse donc a_{n-k} possibilités pour cette deuxième moitié de chemin. La première moitié de chemin, celle qui relie O à Z, est également sous la bissectrice, mais n'a pas le droit de la toucher puisque Z est le premier point d'intersection. Autrement dit, elle mène de $(1,0)$ (le premier pas se fait nécessairement vers l'Est) à $(k,k-1)$ (le dernier pas sera forcément vers le Nord) en restant sous la droite d'équation $y = x-1$ (droite parallèle à la bissectrice, mais décalée vers l'Est), en la touchant éventuellement. En décalant tout celà d'un pas vers l'Ouest, cela revient à choisir un chemin menant de $(0,0)$ à $(k-1,k-1)$ et restant sous la bissectrice, ce pour quoi on a par hypothèse a_{k-1} possibilités. Le nombre de chemins possibles à Z fixé est donc $a_{n-k} \times a_{k-1}$, et il ne reste plus qu'à additionner pour toutes les valeurs de k possibles, ce qui donne bien $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} a_{k-1}a_{n-k}$.
4. Cf deuxième partie, question 5.
5. La suite (c_n) vérifie toujours les hypothèses de la question précédente. Quant à (a_n), on a $a_0 = 1$ et, via un petit changement d'indice (on pose $i = k-1$) dans la formule de la question 3, $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1} k = n+1 a_{k-1}a_{n+1-k} = \sum_{i=0} i = n a_i a_{n-i}$, ce dont on déduit que $a_n = c_n$.
6. C'est une simple application du résultat de la question 2 : le nombre de chemins entre $O'(-1,0)$ et $N(n,n)$ est $\dbinom{2n}{n-1}$.
7. La construction de la question précédente montre que le nombre de chemins menant de O à N et traversant la bissectrice est $\dbinom{2n}{n-1}$ (la construction en question étant assez clairement bijective). Le nombre de chemins ne traversant pas la bissectrice est par définition a_n, et le nombre total de chemin $\dbinom{2n}{n}$. On a donc $a_n + \dbinom{2n}{n-1} = \dbinom{2n}{n}$, soit $a_n = \dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n}{n-1}$. On en déduit alors que $c_n = a_n = \dfrac{(2n)!}{n!n!} - \dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \dfrac{(n+1)(2n)! - n(2n)!}{n!(n+1)!} = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{(2n)!}{n!n!} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

4 Recherche d'un équivalent de $\ln(n!)$

1. Les deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et s'annulent en 0. Comme $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{1-(1+x)}{1+x} = -\dfrac{x}{1+x} \leqslant 0$, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et donc négative. De même, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1+x-x}{(1+x)^2} = \dfrac{1+x-1}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2} \geqslant 0$, donc la fonction g est croissante et positive sur $\mathbb{R}_+$. On peut ajouter que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (par croissance comparée) et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée ici).

2. D'après la question précédente, on a $\forall x \geqslant 0$, $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. Appliqué à $x = \dfrac{1}{k}$, cet encadrement donne $\dfrac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}} \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$, soit $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

3. Prenons l'inégalité de gauche dans l'encadrement qu'on nous demande de prouver : elle est équivalente à $0 \leqslant (k+1)\ln(k+1) - (k+1)\ln k - 1$, soit $1 \leqslant (k+1)\ln\dfrac{k+1}{k}$, ou encore $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$, inégalité prouvée à la question précédente. De même, on peut réécrire l'inégalité de droite sous la forme $k\ln(k+1) - k\ln k - 1 \leqslant 0$, soit $k\ln\dfrac{k+1}{k} \leqslant 1$, ce qui se ramène à l'autre inégalité prouvée à la question 2. L'encadrement souhaité est donc vérifié.

4. En reprenant l'inégalité de gauche de l'encadrement précédent et en la sommant pour k variant de 1 à n, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \ln k \leqslant \sum_{k=1}^{k=n} (k+1)\ln(k+1) - (k+1) - (k\ln k - k)$. La somme de droite est une somme télescopique (mais si, regardez bien) égale à $(n+1)\ln(n+1) - (n+1) - (1\ln 1 - 1) = (n+1)\ln(n+1) - n = (n+1)\ln\left(n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) - n = (n+1)\ln n - n + (n+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Or, on a vu plus haut que $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \ln k \leqslant (n+1)\ln n - n + 1 + \dfrac{1}{n}$ (oui, je sais, ce n'est pas la majoration demandée, mais je soupçonne fortement une erreur d'énoncé, car ce qui est demandé ne découle pas simplement de la question précédente). On procède de même avec l'inégalité de droite de la question précédente : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \ln k = \sum_{k=2}^{k=n} \ln k$ (puisque $\ln 1 = 0$) $\displaystyle= \sum_{k=1}^{k=n-1} \ln(k+1) \geqslant \sum_{k=1}^{k=n-1} (k+1)\ln(k+1) - (k+1) - (k\ln k - k) = n\ln n - n - (1\ln 1 - 1) = n\ln n - n + 1$ (cette fois, ça marche sans problème).

5. Commençons par constater que $\ln(n!) = \ln(1 \times 2 \times \cdots \times n) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \ln k$.

   Divisons maintenant l'encadrement de la question précédente par $n\ln n$: $1 - \dfrac{1}{\ln n} + \dfrac{1}{n\ln n} \leqslant \dfrac{\ln(n!)}{n\ln n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{\ln n} + \dfrac{1}{n\ln n} + \dfrac{1}{n^2\ln n}$ (j'ai repris mon encadrement et non celui de l'énoncé). Les deux termes extrêmes tendant manifestement vers 1, une patite application du théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n!)}{n\ln n} = 1$, soit $\ln(n!) \sim n\ln n$.

6. Reprenons à nouveau l'encadrement de la question 4, en soustrayant $n\ln n$ partout : $1 - n \leqslant \ln(n!) - n\ln n \leqslant \ln n - n + 1 - \dfrac{1}{n}$. À nouveau, en divisant tout par $-n$, on obtiendra des limites égales à 1 pour les deux termes extrêmes et on conclura via le thorème des gendarmes.

5 Formule de Stirling

1. Ce n'est pas si méchant que ça : les deux fonctions sont dérivables sur $[0;1]$ et s'annulent en 0. De plus, $i'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 + x^3 = \dfrac{1 - 1 - x + x + x^2 - x^2 - x^3 + x^3 + x^4}{1+x} = \dfrac{x^4}{1+x} \geqslant 0$, donc la fonction i est croissante et positive sur $[0;1]$. De même, $j'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 = \dfrac{-x^3}{1+x} \leqslant 0$, donc j est décroissante et négative sur $[0;1]$.
2. C'est effectivement une conséquence immédiate de la question précédente.
3. D'après la question précédente, on a $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} - \dfrac{1}{4n^4} \leqslant \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3}$. On en déduit que $n^2\left[1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} - \dfrac{1}{4n^4}\right)\right] \geqslant n^2\left[1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right] \geqslant n^2\left[1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3}\right)\right]$. Développons le membre de gauche, cela donne $n^2\left(1 - 1 + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{3n^2} + \dfrac{1}{4n^3} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{4n^2} - \dfrac{1}{6n^3} + \dfrac{1}{8n^4}\right) = n^2\left(\dfrac{1}{4n^2} - \dfrac{1}{3n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = -\dfrac{1}{12} + o(1)$. Autrement dit, le membre de gauche tend vers $-\dfrac{1}{12}$ quand n tend vers $+\infty$. De même, le membre de droite tend vers $-\dfrac{1}{12}$ (quand on supprime le $-\dfrac{1}{4n^4}$ de la parenthèse initiale, seuls les termes à partir de $\dfrac{1}{n^3}$ vont être modifiés), donc via le théorème des gendarmes, on déduit la limite demandée.
4. (a) Calculons donc $u_{n+1} - u_n = \ln(n+1)! - (n+1)\ln(n+1) + n + 1 - \dfrac{1}{2}\ln(n+1) - \ln n! + n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} \ln k - \left(n + \frac{3}{2}\right)\ln(n+1) + 1 - \sum_{k=1}^{k=n}\ln k + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n = \ln(n+1) - \left(n + \dfrac{3}{2}\right)\ln(n+1) + 1 + \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln n = 1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\dfrac{n+1}{n} = 1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
   Or, cette dernière expression est équivalente à $-\dfrac{1}{12n^2}$ d'après la question 3, donc équivalente au terme général d'une série convergente à termes négatifs. La série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge donc (si on n'a pas à disposition le théorème sur l'équivalence des séries à termes positifs, on se contente de constater qu'à partir d'un certain rang, $u_n - u_{n+1}$ sera plus petit, par exemple, que $\dfrac{1}{2n^2}$, et on conclut par comparaison).

   (b) La somme partielle de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est donnée par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_1$ (c'est une somme télescopique). D'après la question précédente, la suite (S_n) converge, donc $u_{n+1} - u_1$ également, et (u_n) aussi.

   (c) Notons $K = e^l$, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{u_n} = K$, ou si l'on préfère $e^{u_n} \sim K$. Or, $e^{u_n} = \dfrac{e^{\ln(n!)}e^n}{e^{n\ln n}e^{\frac{1}{2}\ln n}} = \dfrac{n! \times e^n}{n^n \times \sqrt{n}}$. On en déduit que $n! \sim \dfrac{Kn^n\sqrt{n}}{e^n}$.
5. Un joli calcul pour terminer :

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{1}{n+1}\frac{K(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{e^{2n}} \times \frac{(e^n)^2}{K^2(n^n)^2 n} \sim \frac{1}{n+1}\frac{2^{2n}\sqrt{2n}}{Kn} \sim \frac{2^{2n}}{(n+1)\sqrt{\pi n}}$$

J'ai laissé le $n+1$ pour obtenir une meilleure approximation. Cette formule donne par exemple $c_{10} \simeq 17\ 007$, la valeur exacte étant $c_{10} = 16796$.