Corrigé de la deuxième épreuve du Concours Blanc n°2

ECE3 Lycée Carnot

Jeudi 20 mai 2010

Problème 1

I. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

1. Appliquons donc l'algorithme du pivot à la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 3L_3 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & -12 & -18 \\ 0 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftarrow -L_2/3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. (a) On a $PA = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) On obtient $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $T^3 = 0$, donc $\forall n \geqslant 3$, $T^n = 0$.

3. En effet, on prouve par récurrence que $A^n = PT^nP^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$ car $A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PTP^{-1}$, et le supposant vrai au rang n, alors $A^{n+1} = A^nA = (PT^nP^{-1})(PTP^{-1}) = PT^{n+1}P^{-1}$. Pour $n \geqslant 3$, on a bien $A^n = P \times 0 \times P^{-1} = 0$.

4. (a) Calculons donc $E(t)E(t') = \left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2\right)\left(I + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2\right) = I + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2 + tA + tt'A^2 + \frac{t^2}{2}A^2 = I + (t+t')A + \frac{t'^2 + 2tt' + t^2}{2}A^2 = E(t+t')$ (tous les termes faisant intervenir des puissances de A supérieurs ou égales à 3 ont été supprimés au vu de la question précédente).

   (b) Comme $E(t)E(-t) = E(t-t) = E(0) = I$, on en déduit que $E(t)$ est inversible, d'inverse $E(-t) = I - tA + \frac{t^2}{2}A^2$.

   (c) En utilisant toujours le résultat de la question 4.a), on prouve que $E(t)^n = E(nt)$ (par exemple par récurrence : c'est vrai pour $n = 1$, et en le supposant vrai au rang n, $(E(t))^{n+1} = (E(t))^nE(t) = E(nt)E(t) = E(nt+t) = E((n+1)t)$), donc $E(t)^n = I + ntA + \frac{n^2t^2}{2}A^2$.

II. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

1. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$. L'équation $BX = X$ se traduit par le système suivant : $\begin{cases} \quad - \; z = x \\ 2x + 3z = z \end{cases}$, système qui n'est pas de Cramer et a pour solution tous les couples $\{(x; -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. De même en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$, on ramène l'équation $BY = 2Y$ au système $\begin{cases} \quad - \; t = 2y \\ 2y + 3t = 2t \end{cases}$, qui n'est pas de Cramer non plus et admet pour solutions les couples $\{(y; -2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

2. D'après la question précédente, en posant par exemple $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, on aura $BQ = QD$ (puisque dans le produit BQ, la première colonne de Q est laissée identique, et sa deuxième colonne multipliée par 2, ce qui correspond bien à un produit à droite par la matrice D), donc $Q^{-1}BQ = D$ en supposant Q inversible. Elle l'est effectivement : le pivot ne nécessite que deux étapes $L_2 \leftarrow -L_1 - L_2$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, ce qui donne $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Puisque l'énoncé donne le résultat, on peut éviter le calcul de QD^nQ^{-1} (qui n'est cependant pas bien compliqué) et procéder par récurrence : pour $n = 0$, la matrice proposée est bien égale à l'identité. Supposons la formule vraie au rang n, alors $B^{n+1} = B^n \times B = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^{n+1} & 2^n - 2 + 3 - 3 \times 2^n \\ 2^{n+2}-2 & 2 - 2^{n+1} + 3 \times 2^{n+1} - 3 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 2-2^{n+1} & 1-2^{n+1} \\ 2^{n+2}-2 & 2^{n+2}-1 \end{pmatrix}$, ce qui est bien la formule attendue.

4. Par définition, $a_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k}{k!}(B^k)_{11} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k}{k!}(2-2^k)$, d'où la formule annoncée. De même, en reprenant le résultat de la question précédente, $b_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2(2t)^k - 2t^k}{k!}$, $c_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k - (2t)^k}{k!}$ et $d_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2(2t)^k - t^k}{k!}$.

5. On reconnait dans les sommes précédentes des sommes partielles de séries exponentielles, qui convergent donc, et on calcule sans difficulté (en séparant en deux la somme à chaque fois) les limites : $\lim_{n\to+\infty} a_n(t) = 2e^t - e^{2t}$; $\lim_{n\to+\infty} b_n(t) = 2e^{2t} - 2e^t$; $\lim_{n\to+\infty} c_n(t) = e^t - e^{2t}$ et $\lim_{n\to+\infty} d_n(t) = 2e^{2t} - e^t$.

6. (a) De qui se moque-t-on dans cet énoncé ? On vient de le faire à la question précédente !

(b) Il suffit manifestement de poser $E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Un peu de calcul donne $E_1^2 = E_1$; $E_2^2 = E_2$ et $E_1E_2 = E_2E_1 = 0$.

(d) Au vu des calculs effectués dans la première partie du problème, on peut deviner que l'inverse de $E(t)$ sera $E(-t)$. Vérifions-le : $E(t)E(-t) = (e^tE_1+e^{2t}E_2)(e^{-t}E_1+e^{-2t}E_2) = e^te^{-t}E_1^2+e^{2t}e^{-2t}E_2 = E_1+E_2 = I$ (les simplification utilisent les résultats de la question précédente). On a donc bien $(E(t))^{-1} = E(-t)$.

Problème 2

Préliminaires.

1. On reconnait la somme partielle de la série harmonique : $h_n \sim \ln n$.
2. C'est un simple petit calcul : $\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k} = \dfrac{k-(k-1)}{(k-1)k} = \dfrac{1}{k^2-k} \geqslant \dfrac{1}{k^2}$, puisque $0 \leqslant k^2-k \leqslant k^2$.
3. Sommons les inégalités précédentes à partir de $k=2$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k} = 1-\frac{1}{n}$ (somme télescopique à droite). En rajoutant le terme correspondant à $k=1$, on a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1+1-\frac{1}{n} \leqslant 2$.
4. Comme $0 \leqslant k_n \leqslant 2$, $k_n = o(\ln n)$, et $h_n - k_n \sim \ln n$.

Partie 1 : Etude de la variable aléatoire X_n.

1. (a) C'est un loi uniforme $\mathcal{U}(n)$.

   (b) Si $I_n = 1$, on arrête les tirages après ce premier tirage et on a $X_n = 1$, qui est donc une variable constante.

   (c) Si on suppose vérifié l'évènement $I_n = k$, on recommence ensuite les tirages dans une urne ne contenant plus que $k-1$ boules et on attend toujours de tirer la boule numéro 1. Tout se passe donc comme si on effectuait l'expérience dans l'urne U_{k-1}, en ajoutant 1 à la valeur de X_n puisqu'on a déjà effectué un tirage. Autrement dit, en supposant $I_n = k$, $X_n \sim 1 + X_{k-1}$, soit $P_{I_n=k}(X=j) = P(1+X_{k-1}=j) = P(X_{k-1}=j-1)$.

2. (a) La variable X_1 peut prendre toutes les valeurs entières entre 1 (si on tire le numéro 1 immédiatement) et n (si on tire toutes les boules de l'urne en ordre décroissant).

   (b) Pour X_1, il n'y qu'une boule dans l'urne, la variable est constante égale à 1.

   (c) $X_2 = 1$ signifie qu'on tire la boule 1 dans une urne contenant deux boules, donc $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$ et $P(X_2 = 2) = \dfrac{1}{2}$; $E(X_2) = \dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2} = \dfrac{3}{2}$.

   (d) Si $I_3 = 1$ est réalisé, on aura nécessairement $X_3 = 1$, donc $P_{I_3=1}(X_3=2) = 0$. Si $I_3 = 2$, il ne reste plus que la boule 1 dans l'urne pour le deuxième tirage, on aura forcément $X_3 = 2$ dans ce cas : $P_{I_3=2}(X_3=2) = 1$. Enfin, si $I_3 = 3$, il reste deux boules dans l'urne, on a une chance sur deux de tirer la boule 1 au deuxième tirage : $P_{I_3=3}(X_3=2) = \dfrac{1}{2}$. Via la formule des probabilités totales, $P(X_3=2) = P(I_3=1) \times P_{I_3=1}(X_3=2) + P(I_3 = 2) \times P_{I_3=2}(X_3=2) + P(I_3=3) \times P_{I_3=3}(X_3=2) = \dfrac{1}{3}\times 0+\dfrac{1}{3}\times 1+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$. Par ailleurs, $P(X_3=1) = P(I_3=1) = \dfrac{1}{3}$, donc $P(X_3=3) = 1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$ (on peut aussi calculer directement $P(X_3=3)$). On obtient donc $E(X_3) = \dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{6} = \dfrac{11}{6}$.

3. (a) On aura toujours $P(X_n=1)=P(I_n=1)=\dfrac{1}{n}$. Pour avoir $X_n=2$, il faut tirer une boule autre que la boule 1 au premier tirage, puis la boule 1 au deuxième tirage, parmi les $k-1$ restantes, donc $P(X_n=2)=\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} P(I_n=k)\times P_{I_n=k}(X_n=2)=\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{n}\times\frac{1}{k-1}=\frac{h_{n-1}}{n}$. Enfin, pour avoir $X_n=n$, il faut tirer la boule n au premier tirage, puis la $n-1$ (parmi $n-1$ boules) au deuxième etc, soit $P(X_n=n)\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{n-1}\times\cdots\times\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{n!}$.

   (b) Il suffit de reprendre le résultat de la question 1.c) et appliquer la formule des probabilités totales : pour $j\geqslant 2$, $P(X_n=j)=\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n}P(I_n=k)\times P_{I_n=k}(X_{k-1}=j-1)=\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{n}P(X_k=j-1)$ (avec un petit changement d'indice). Si $j=1$, ça marche aussi puisque $P(X_n=1)=\dfrac{1}{n}=\dfrac{n-1}{n}P(X_{n-1}=1)$ (le deuxième terme de la somme étant ici nul).

   (c) Calculons donc : $nP(X_n=j)-(n-1)P(X_{n-1}=j)=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1}P(X_k=j-1)-\sum_{k=1}^{k=n-2}P(X_k=j-1)=P(X_{n-1}=j-1)$, donc en divisant tout par n, $P(X_n=j)=\dfrac{n-1}{n}P(X_{n-1}=j)+\dfrac{1}{n}P(X_{n-1}=j-1)$.

4. (a) Par définition, $E(X_n)=\displaystyle\sum_{j=1}^{j=n}jP(X_n=j)=\frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{j=n}jP(X_{n-1}=j)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n}jP(X_{n-1}=j-1)=\frac{n-1}{n}E(X_{n-1})+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}(k+1)P(X_{n-1}=k)$ en effectuant un petit changement d'indice. En découpant la dernière somme en deux, on a donc $E(X_n)=\dfrac{n-1}{n}E(X_{n-1})+\dfrac{1}{n}E(X_{n-1})+\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}P(X_{n-1}=k)=E(X_{n-1})+\frac{1}{n}$.

   (b) Puisque $E(X_1)=1$, on aura $E(X_n)=1+\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k}$, soit $E(X_n)=h_n$, et $E(X_n)\sim\ln n$.

   (c) Par un calcul exactement similaire au précédent, $E(X_n^2)=\dfrac{n-1}{n}E(X_n^2)+\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}(k+1)^2P(X_{n-1}=k)$, soit en développant et découpant $E(X_n^2)=E(X_{n-1}^2)+\dfrac{2}{n}E(X_{n-1})+\dfrac{1}{n}$.

   (d) Effectuons une petite récurrence : pour $n=1$, $V(X_1)=0$ puisque la variable est constante, et $h_1-k_1=1-1=0$, ça marche. Supposons le résultat vrai au rang n, alors en utilisant la formule de König-Huygens, $V(X_{n+1})=E(X_{n+1}^2)-(E(X_{n+1}))^2=E(X_n^2)+\dfrac{2}{n+1}E(X_n)+\dfrac{1}{n+1}-h_{n+1}^2=h_n-k_n+h_n^2+\dfrac{2}{n+1}h_n+\dfrac{1}{n+1}-\left(h_n+\dfrac{1}{n+1}\right)^2=h_n+\dfrac{1}{n+1}-k_n-\dfrac{1}{(n+1)^2}=h_{n+1}-k_{n+1}$ (on a simplement utilisé ici l'hypothèse de récurrence sous la forme $E(X_n^2)=V(X_n)+E(X_n)^2=h_n-k_n+h_n^2$). La récurrence est achevée et la formule démontrée.

   (e) En reprenant les résultats de la partie préliminaire, $V(X_n)\sim\ln n$.

Partie 2 : Etude de la variable aléatoire Y_n.

1. (a) Si l'urne contient initialement deux boules, on a deux possibilités : soit on tire immédiatement la boule 1, auquel cas $Y_2=1$, soit on tire la boule 2 puis la boule 1, et $Y_2=2+1=3$, donc $Y_2(\Omega)=\{1;3\}$.

(b) Les deux possibilités citées étant équiprobables, $P(Y_2 = 1) = P(Y_2 = 3) = \frac{1}{2}$.

2. (a) On a déjà vu ce genre de raisonnement dans la première partie : si $I_n = k$, on recommence notre expérience sur une urne contenant $k-1$ boules, et il faudra ajouter k à la valeur obtenue pour Y_{k-1} lors des tirages suivants. Autrement dit, $Y_n = k + Y_{k-1}$, et $P_{I_n=k}(Y_n = j) = P(k + Y_{k-1} = j) = P(Y_{k-1} = j - k)$.

(b) Encore une fois, calquons la première partie, en commençant par appliquer la formule des probabilités totales : pour $j \geqslant 2$, $P(Y_n = j) = \sum_{k=2}^{k=n} P(I_n = k) \times P_{I_n=k}(Y_{k-1} = j - k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n-1} P(Y_k = j - k - 1)$ (attention en faisant le changement d'indice...). On calcule ensuite $nP(Y_n = j) - (n-1)P(Y_{n-1} = j) = \sum_{k=1}^{k=n-1} P(Y_k = j - k - 1) - \sum_{k=1}^{k=n-2} P(Y_k = j - k - 1) = P(Y_{n-1} = j - n)$. On en déduit la formule demandée en divisant tout par n. Encore une fois, on vérifie sans difficulté que la formule reste vraie si $j = 1$ puisque $P(Y_n = 1) = \frac{1}{n}$.

(c) Encore un calcul similaire à celui fait pour X_n, si ce n'est qu'on ne connait pas les valeurs prises par Y_n (en fait on peut calculer que ça se situe entre 1 et $\frac{n(n+1)}{2}$), d'où la nécessité d'élargir la somme : $E(Y_n) = \sum_{j=1}^{+\infty} jP(Y_n = j) = \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{+\infty} jP(Y_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{+\infty} jP(Y_{n-1} = j - n) = \frac{n-1}{n} E(Y_{n-1}) + \frac{1}{n} \sum_{k=-n}^{+\infty} (k+n)P(Y_{n-1} = k) = \frac{n-1}{n} E(Y_{n-1}) + \frac{1}{n} E(Y_{n-1}) + \sum_{k=-n}^{+\infty} P(Y_{n-1} = k) = E(Y_n) + 1$.

Comme $E(Y_1) = 1$ (la variable Y_1 est toujours égale à 1), on en déduit aisément que $E(Y_n) = n$ (on peut d'ailleurs vérifier que $E(Y_2) = 2$ avec les calculs effectués en début de deuxième partie).

3.
```
PROGRAM hec ;
USES wincrt ;
VAR n,x,y,i : integer ;
BEGIN
Randomize ;
WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
ReadLn(n) ;
x := 0 ; y := 0 ;
REPEAT
i := random(n)+1 ;
x := x+1 ; y := y+i ;
n := i-1 ;
UNTIL i = 1 ;
WriteLn('On a effectué ',x,' tirages') ;
WriteLn('La somme des nombres tirés vaut ',y) ;
END.
```