Concours Blanc : Mathématiques II

Épreuve spécifique ECE3

Mardi 18 mai 2010

Durée de l'épreuve : 4H.
Les calculatrices sont **interdites**.

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre qu'il souhaite, à condition d'indiquer clairement les résultats des questions non traitées qu'il admet pour la suite de l'exercice.

Problème 1

Dans cet exercice, on étudie l'exponentielle d'une matrice pour une matrice carrée d'ordre 3, puis d'ordre 2.

I. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient A et P les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. On pose $T = P\,A\,P^{-1}$.
   (a) Calculer la matrice T.
   (b) Calculer T^2, T^3, puis T^n pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.
3. En déduire que $\forall n \geqslant 3,\ A^n = 0$.
4. Pour tout réel t, on définit la matrice $E(t)$ par $E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$, où I désigne la matrice unité d'ordre 3.
   (a) Montrer que $\forall (t,t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t)\,E(t') = E(t+t')$.
   (b) Pour tout t réel, calculer $E(t)\,E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$.
   (c) Pour tout t réel et pour tout entier naturel n, déterminer $[E(t)]^n$ en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$ et n.

II. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient B et D les matrices définies par $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout réel t, on définit la matrice $E_n(t)$ par :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} B^k \quad \text{que l'on note } E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $MX = X$, puis toutes les matrices $Y \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $MY = 2Y$.
2. En déduire une matrice Q d'ordre 2 inversible telle que $Q^{-1}BQ = D$, et préciser son inverse.
3. Pour tout entier naturel n, montrer que $B^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$; exprimer de même $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$ sous le forme d'une somme.
5. Déterminer les limites de $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Pour tout t réel, on pose alors $E(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t) \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$.
   (b) Déterminer deux matrices E_1 et E_2, telles que pour tout t réel on ait : $E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$.
   (c) Calculer E_1^2, E_2^2, E_1E_2, E_2E_1.
   (d) En déduire que pour tout t réel, $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse.

Problème 2

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule. Si k est égal à 1, on arrête les tirages. Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne. On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées. On note $E(X_n)$ et $V(X_n)$ (respectivement $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$) l'espérance et la variance de X_n (respectivement Y_n).

Préliminaires.

On pose, $\forall n \geqslant 1$, $h_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ et $k_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

1. Rappeler un équivalent simple de h_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que, $\forall k \geqslant 2$, $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
3. En déduire que $\forall n \geqslant 1$, $k_n \leqslant 2$.
4. Déterminer un équivalent simple de $h_n - k_n$ quand n tend vers l'infini.

Partie 1 : Etude de la variable aléatoire X_n.

On note dans cette partie I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. (a) Quelle est la loi de la variable I_n ?

   (b) On suppose réalisé l'évènement $I_n = 1$. Que devient alors la loi de la variable X_n ?

   (c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer que $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$,
   $P(X_n = j / I_n = k) = P(X_{k-1} = j - 1)$.

2. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable X_n.

   (b) Quelle est la loi de X_1 ?

   (c) Quel représente l'évènement $(X_2 = 1)$? Donner la loi de X_2 , son espérance et sa variance.

   (d) Calculer $P_{I_3=1}(X_3 = 2)$, $P_{I_3=2}(X_3 = 2)$ et $P_{I_3=3}(X_3 = 2)$. En déduire $P(X_3 = 2)$, puis déterminer la loi de X_3, son espérance et sa variance.

3. (a) Dans le cas général, déterminer $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$ et $P(X_n = n)$.

   (b) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer la relation $P(X_n = j) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} P(X_k = j - 1)$.

   (c) Calculer $nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j)$, et en déduire que, $\forall n \geqslant 2$,
   $P(X_n = j) = \dfrac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \dfrac{1}{n} P(X_{n-1} = j - 1)$.

4. (a) Montrer en utilisant la question précédente que, si $n \geqslant 2$, $E(X_n) = E(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$.

   (b) En déduire $E(X_n)$ et donner un équivalent simple de $E(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

   (c) Si n est supérieur ou égal à 2, calculer $E(X_n^2)$ en fonction de $E(X_{n-1}^2)$ et de $E(X_{n-1})$.

   (d) En déduire : $V(X_n) = h_n - k_n$ (où h_n et k_n ont été définies dans les préliminaires).

   (e) Donner un équivalent de $V(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

Partie 2 : Etude de la variable aléatoire Y_n.

1. (a) Quelles sont les valeurs prises par Y_2 ?

   (b) Déterminer la loi de Y_2.

2. (a) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier j non nul et tout entier k supérieur ou égal à 2, $P_{I_n=k}(Y_n = j) = P(Y_{k-1} = j - k)$.

   (b) Si n est supérieur ou égal à 2, en déduire, pour tout entier j supérieur ou égal à 1,

   $$P(Y_n = j) = \frac{n-1}{n} P(Y_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(Y_{n-1} = j - n)$$

   (c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer $E(Y_n) = E(Y_{n-1}) + 1$
   Que vaut $E(Y_n)$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ?

3. Écrire un programme PASCAL demandant un entier n à l'utilisateur et simulant une occurence des variables aléatoires X_n et Y_n.