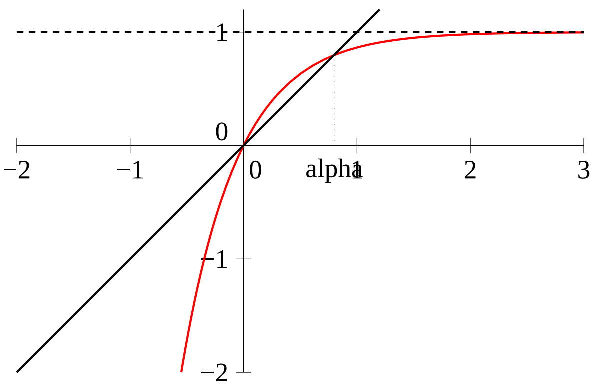
Concours Blanc : Corrigé de la première épreuve

ECE Lycée Carnot

Mardi 18 mai 2010

Exercice 1

1. **Étude de la fonction f.**
   (a) L'équation (E) étant équivalente à $f(x) = x$, ses solutions sont les points fixes de la fonction f.
   (b) La fonction f est bien sûr C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 2e^{-2x} > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) Par somme et composition de limites, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, donc la courbe de f admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$; et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. De plus, par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-2x}}{x} = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. La courbe de f admet donc une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.
   (d) La fonction g est également C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = 2e^{-2x} - 1$. Comme $e^{-2x} \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2x \geqslant -\ln 2$, la fonction g est strictement croissante sur $\left]-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$. La fonction g admet en $\frac{\ln 2}{2}$ un maximum de valeur $g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = 1 - e^{-\ln 2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1 - \ln 2}{2}$, et vérifie $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ (car par croissance comparée, $g(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -e^{-2x}$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
   (e) L'équation (E) est équivalente à $g(x) = 0$. On vient de voir que g était strictement monotone, donc bijective de $\left]-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right]$ vers $\left]-\infty; \frac{1 - \ln 2}{2}\right]$, et de $\left[\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$ vers $\left]-\infty; \frac{1 - \ln 2}{2}\right]$, donc 0, appartenant à l'intervalle $]-\infty; 1]$, admet un unique antécédent inférieur à $\frac{\ln 2}{2}$ (dont on peut aisément constater qu'il est égal à 0), et un unique antécédent strictement supérieur à $\frac{\ln 2}{2}$, ce qui correspond aux deux solutions de (E). De plus, $g(\ln 2) = 1 - e^{-2\ln 2} - \ln 2 = 1 - \frac{1}{4} - \ln 2 = \frac{3}{4} - \ln 2 > 0$ et $g(1) = 1 - e^{-2} - 1 = -e^{-2} < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule donc bien sur l'intervalle $]\ln 2; 1[$.
   (f) On obtient l'allure suivante pour la fonction f :



2. **Étude d'une suite récurrente**

   (a) Une petite récurrence pour commencer : on sait que $\alpha < 1$, donc $u_0 > \alpha$. Si on suppose désormais $u_n \geqslant \alpha$, la fonction f étant strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$ à valeurs dans $[\alpha; +\infty[$, on aura également $u_{n+1} = f(u_n) > \alpha$. D'après le principe de récurrence, la propriété demandée est vérifiée.

   (b) La fonction g étant négative sur $]\alpha; +\infty[$, on a $\forall x > \alpha$, $f(x) < x$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante. Étant de plus minorée par α, elle converge.

   (c) La limite de (u_n) est nécessairement un point fixe de f. Or, comme $u_n > \alpha$, on aura par passage à la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geqslant \alpha$, et la limite ne peut donc qu'être égale à α (le deuxième point fixe de f étant 0, qui est strictement inférieur à α).

   (d) Sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$, la dérivée f' de la fonction f est positive et majorée par $2e^{-2\alpha}$. Comme f est C^1 sur $[\alpha; +\infty[$, et que α et u_n appartiennent à cet intervalle (avec $\alpha < u_n$), on peut leur appliquer l'inégalité des accroissements finis pour obtenir $0 \times (f(u_n) - f(\alpha)) \leqslant 2e^{-2\alpha}(u_n - \alpha)$. Comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$, l'encadrement demandé en découle.

   (e) Constatons qu'au vu des résultats de la première partie $2e^{-2\alpha} < 2e^{-2\ln 2} = \dfrac{1}{2}$. Ne reste plus qu'à faire une récurrence : pour $n = 0$, l'inégalité est triviale. Si on la suppose vraie au rang n, on aura $0 \leqslant u_{n+1} - \alpha \leqslant 2e^{-2\alpha}(u_n - \alpha) \leqslant \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (u_0 - \alpha) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} (u_0 - \alpha)$, ce qui prouve l'hérédité de la propriété.

   (f) Il suffit de reprendre l'inégalité précédente et de constater que $1 - \alpha < 1$, puisque $0 < \alpha < 1$.

```
PROGRAM concoursblanc1 ;
VAR u,e,a : real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la précision souhaitée') ;
ReadLn(e) ;
u := 1 ; a := 1 ;
REPEAT
u := 1-exp(-2*u) ;
a := a/2 ;
UNTIL a < e ;
WriteLn('Une valeur approchée de alpha à ',e,' près est donnée par ',u) ;
END.
```

Exercice 2

1. (a) On a $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k$. Or, la suite (u_n) étant décroissante, on aura $\forall k \in \{n+1,\dots,2n\}$, $u_k \geqslant u_{2n}$, donc $S_{2n} - S_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_{2n} = nu_{2n}$.

   (b) La série de terme général S_n étant supposée convergence, on peut noter S sa somme, et on a alors $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_n = S$, donc $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_n = 0$. La suite $(n\ u_{2n})$ étant positive (puisque u_n l'est par hypothèse) et majorée par une suite tendant vers 0, d'après le théorème des gendarmes, elle converge vers 0, et $(2n\ u_{2n})$ également.

   (c) On vient de voir que les termes d'indices pairs de cette suite tendaient vers 0. Or, (u_n) étant décroissante, $u_{2n+1} \leqslant u_{2n}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(2n+1)\ u_{2n+1} \leqslant (2n+1)\ u_{2n}$, et ce majorant tend vers 0. Encore un coup de gendarmes, et les termes impairs de la suite tendent eux aussi vers 0. Conclusion : la suite $(n\ u_n)$ converge bien vers 0.

   (d) Dire que $n\ u_n$ tend vers 0 est bien équivalent à dire que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. (a) La série de terme général u_n étant supposée divergente, avec (u_n) positive, on aura $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. La suite (u_n) étant bornée, le quotient $\frac{u_{n+1}}{S_n}$ tend vers 0 (pour les rigoristes absolus, on peut invoquer le théorème des gendarmes : si on note M un majorant de (u_n), on a $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{M}{S_n}$).

   (b) En effet, $w_n = \ln\left(1 + \frac{u_{n+1}}{S_n}\right) = \ln \frac{S_n + u_{n+1}}{S_n} = \ln \frac{S_{n+1}}{S_n}$. Un petit télescopage donne alors $\sum_{k=1}^{k=n} w_k = \sum_{k=1}^{k=n} \ln S_{k+1} - \ln S_k = \ln S_{n+1} - \ln S_1 = \ln S_{n+1} - \ln u_1$. Comme $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, on en déduit que la série de terme général w_n diverge.

   (c) Comme on sait que (v_n) a pour limite 0, on aura $w_n = \ln(1+v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Les deux suites étant à termes positifs, la série de terme général v_n est de même nature que celle de terme général u_n, donc divergente.

   (d) Si on prend $u_n = 1$ (qui est bien une suite bornée, et la série de terme général 1 diverge grossièrement), on aura $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n-1$, donc $v_n = \frac{1}{n-1}$, et on retrouve la divergence de la série harmonique.

   (e) La suite u_n est toujours bornée, et on vient de revoir que la série de terme général $\frac{1}{n}$ divergeait. Cette fois, on a $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \sim \ln n$, donc $v_n = \frac{1}{(n+1)S_n} \sim \frac{1}{n \ln n}$. La série de terme général v_n étant divergente, celle de terme général $\frac{1}{n \ln n}$ l'est également.

   (f) Manifestement non, puisque la suite $\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$ est bien positive, décroissante et négligeable devant $\frac{1}{n}$, mais que la série associée ne converge pas.

Problème

I. Étude des fonctions f_n.

1. Les fonctions h_n sont C^∞ sur $]-1;+\infty[$, de dérivées $h_n'(x) = \dfrac{n}{1+x} + \dfrac{1+x-x}{(1+x)^2} = \dfrac{n(1+x)+1}{(1+x)^2}$. Le numérateur étant toujours positif sur $]-1;+\infty[$, les fonction h_n sont toutes strictement croissantes sur cet intervalle.
2. Calculons donc : $h_n(0) = n\ln 1 + 0 = 0$. Les fonctions h_n sont donc négatives sur $]-1;0]$ et positives sur $[0;+\infty[$.
3. (a) La fonction f_1 est C^∞ sur son ensemble de définition comme produit et composée de fonctions usuelles. Sa dérivée est $f_1'(x) = \ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x} = h_1(x)$.
   (b) La fonction f_1 est donc décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$. Elle admet en 0 un minimum de valeur $f_1(0) = 0$, et a pour limite $+\infty$ en -1 et en $+\infty$.
4. (a) Comme f_1, f_n est C^∞ sur $]-1;+\infty[$, de dérivée $f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(1+x) + \dfrac{x^n}{1+x} = x^{n-1}h_n(x)$.
   (b) Si n est impair, x^{n-1} est toujours positif et, comme pour f_1, f_n est décroissante puis croissante, atteignant pour minimum 0 en 0, et ayant pour limite $+\infty$ aux deux bornes de son domaine de définition. Si n est pair, par contre, x^{n-1} change de signe en 0, et $x^{n-1}h_n(x)$ est toujours positif, donc f_n est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$, avec pour limite $-\infty$ en -1 et $+\infty$ en $+\infty$.

II. Étude d'une suite.

1. (a) Procédons par identification : $ax+b+\dfrac{c}{x+1} = \dfrac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$, donc on aura égalité si $a=1$, $a+b=0$ et $b+c=0$, soit $a=c=1$ et $b=-1$, donc $\dfrac{x^2}{x+1} = x-1+\dfrac{1}{x+1}$.
   (b) On a donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \int_0^1 x-1+\frac{1}{x+1}dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 = \ln 2 - \frac{1}{2}$.
   (c) Par définition, $U_1 = \displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)dx$. Effectuons une intégration par partie en posant $u(x) = \ln(1+x)$ et $v'(x) = x$, donc $u'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$. On obtient $U_1 = \displaystyle\left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.
2. (a) Pour tout entier naturel n, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} \leqslant x^n$, donc $x^{n+1}\ln(1+x) \leqslant x^n\ln(1+x)$, d'où en intégrant l'inégalité sur $[0;1]$, $U_{n+1} \leqslant U_n$. La suite (U_n) est donc décroissante.
   (b) Comme de plus (U_n) est une suite à valeurs positives (les fonctions f_n prennent toutes des valeurs positives sur $[0;1]$), la suite est décroissante minorée, donc convergente.
   (c) La positivité de U_n a déjà été justifiée. De plus, sur $[0;1]$, $\ln(1+x) \leqslant \ln 2$, donc $U_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n \ln 2 = \ln 2\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{n+1}$.
   (d) Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$.
3. (a) Inutile de faire une récurrence, il s'agit d'une somme géométrique de raison $-x$, donc $S_n(x) = \dfrac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.

(b) Intégrons donc l'égalité précédente : par linéarité $\int_0^1 S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k+1}$. À droite, on a $\int_0^1 \frac{1}{1+x} + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$.

(c) On va effectuer une intégration par parties en posant $u(x) = \ln(x+1)$ et $v'(x) = x^n$, donc $u'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. On obtient $U_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln 2\right)$, ce qui donne bien la formule annoncée.

(d) En multipliant l'équation précédente par $n+1$, le mebre de droite doit tendre vers $\ln 2$, ce qui se produit si $\lim_{n \to +\infty} \ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right) = 0$, c'est-à-dire que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k+1}$ converge vers $\ln 2$.

III. Étude d'une suite implicite.

1. On a vu dans la première partie du problème que la fonction f_n était strictement croissante sur $[0; +\infty[$, avec $f(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. Le théorème de la bijection nous permet alors d'affirmer que 2 a un seul antécédent par f_n sur $[0; +\infty[$.
2. En effet, on a $f_n(1) = \ln 2 < 2$, et $f_n(2) = 2^n \ln 3 > 2$ si $n \geqslant 1$, donc le théorème des valeurs intermédiaires nous donne l'existence d'une solution à l'équation $f_n(x) = 2$ sur $[1; 2]$. Comme v_n est l'unique solution de cette équation sur $[0; +\infty[$, $v_n \in [1; 2]$.
3. Constatons que $\forall x \in [1; 2]$, $x^n \leqslant x^{n+1}$, donc $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$. Comme $f_n(v_n) = f_n(v_{n+1}) = 2$ par définition, on a donc $f_n(v_{n+1}) \leqslant 2 = f_n(v_n)$, et par croissance de la fonction f_n, $v_{n+1} \leqslant v_n$. La suite (v_n) est donc décroissante. Étant minorée par 1, elle converge.
4. On sait que la suite (v_n) converge vers un réel $l \geqslant 1$ (puisque (v_n) est minorée par 1). Supposons que $l > 1$, alors on aura à partir d'un certain rang $v_n \geqslant \frac{1+l}{2} > 1$, donc $\lim_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty$, et également $\lim_{n \to +\infty} v_n^n \ln(1 + v_n) = +\infty$. Ceci n'est guère possible pour une expression qui vaut toujours 2 par définition. Conclusion : $l = 1$.
5. En reprenant l'équation de définition de v_n, on a $v_n^n \ln(1 + v_n) = 2$, donc en passant au ln $n \ln v_n + \ln(\ln(1 + v_n)) = \ln 2$. Or, $\lim_{n \to +\infty} \ln(\ln(1 + v_n)) = \ln(\ln 2)$ puisque (v_n) converge vers 1. On a donc $v_n \sim \frac{\ln 2 - \ln(\ln 2)}{n}$.
6. Comme v_n tend vers 1, $v_n - 1$ tend vers 0, et $\ln v_n = \ln(1 + v_n - 1) \sim v_n - 1$. La question précédente nous donne donc $v_n - 1 \sim \frac{\ln 2 - \ln(\ln 2)}{n}$, d'où le résultat demandé avec $a = \ln 2 - \ln(\ln 2)$.