Concours Blanc : Mathématiques I

Épreuve commune ECE3-ECE4

Mardi 18 mai 2010

Durée de l'épreuve : 4H.
Les calculatrices sont **interdites**.

Le sujet est constitué de deux exercices et d'un problème indépendants. Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre qu'il souhaite, à condition d'indiquer clairement les résultats des questions non traitées qu'il admet pour la suite de l'exercice.

Exercice 1

Le but de cet exercice est de résoudre numériquement l'équation $(E) : x + e^{-2x} = 1$. On introduit pour cela la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - e^{-2x}$.

1. **Étude de la fonction f.**
   (a) Que représentent les solutions de l'équation (E) pour la fonction f ?
   (b) Étudier les variations de f.
   (c) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, ainsi que la nature de ses branches infinies.
   (d) Déterminer les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.
   (e) Montrer que l'équation (E) admet deux solutions, dont une, qu'on notera α, appartient à l'intervalle $]\ln 2, 1[$ (on rappelle que $\ln 2 \simeq 0.69$).
   (f) Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f, en faisant figurer sur le graphique la droite d'équation $y = x$.
2. **Étude d'une suite récurrente**
   On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \geqslant 1$ et de la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > \alpha$.
   (b) Prouver que la suite (u_n) est monotone, puis en déduire la convergence de la suite.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
   (d) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1} - \alpha \leqslant 2e^{-2\alpha}(u_n - \alpha)$.
   (e) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \alpha)$.
   (f) Montrer que, si $u_0 = 1$, $0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant \frac{1}{2^n}$, et écrire un programme Pascal calculant une valeur approchée de α à ε près (ε étant choisi par l'utilisateur).

Exercice 2

Dans tout cet exercice, on s'intéresse à des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs, et on cherche à étudier un critère de converge de la série de terme général u_n. On notera S_n la somme partielle d'indice n de la série : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$. On pourra utiliser dans cet exercice le résultat suivant : si deux suites (a_n) et (b_n) sont à termes positives et équivalentes quand n tend vers $+\infty$, alors les séries $\sum a_k$ et $\sum b_n$ sont de même nature.

1. On suppose dans un premier temps la suite (u_n) décroissante et la série de terme général u_n convergente.
   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geqslant n u_{2n}$.
   (b) En déduire que la suite $(2n\ u_{2n})_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
   (c) Prouver que la suite $(n\ u_n)_{n\geqslant 1}$ converge également vers 0.
   (d) En déduire que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. On suppose désormais (u_n) bornée (mais plus nécessairement décroissante), et la série de terme général u_n divergente. On définit une suite auxiliaire (v_n) par $\forall n \geqslant 1$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{S_n}$, et une deuxième suite auxiliaire (w_n) par $w_n = \ln(1 + v_n)$.
   (a) Déterminer la limite éventuelle de la suite (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) Prouver que $w_n = \ln \frac{S_{n+1}}{S_n}$, et en déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^{k=n} w_k$. En déduire la nature de la série de terme général w_n.
   (c) Prouver la divergence de la série de terme général v_n.
   (d) Quel résultat classique retrouve-t-on lorsqu'on prend comme suite (u_n) la suite constante égale à 1 ?
   (e) En appliquant les résultats de cette partie à la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$, montrer que la série de terme général $\frac{1}{n \ln n}$ est divergente.
   (f) La réciproque du résultat obtenu à la question 1.d) est-elle vraie ?

Problème

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

I. Étude des fonctions f_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

1. Étudier le sens de variation des fonctions h_n.
2. Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de h_n.
3. Étude du cas particulier $n = 1$.
   (a) Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $]-1,+\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
   (b) En déduire les variations de la fonction f_1 sur $]-1,+\infty[$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
   (a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]-1,+\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
   (b) En déduire les variations de f_n sur $]-1,+\infty[$. (On distinguera les cas n pair et n impair). On précisera les limites aux bornes sans étudier les branches infinies.

II. Étude d'une suite.

On définit une suite (U_n) par

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

1. **Calcul de U_1.**
   (a) Prouver l'existence de trois réels a, b, c tels que :
   $$\forall x \in [0,1], \quad \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale :
   $$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx.$$
   (c) Montrer que $U_1 = \frac{1}{4}$.
2. **Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**
   (a) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.
   (b) Justifier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. (On ne demande pas sa limite.)
   (c) Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}.$$

(d) En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. **Calcul de U_n pour $n \geqslant 2$.**
   Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose :
   $$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k.$$

   (a) Montrer que :
   $$S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$

   (b) En déduire que :
   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx.$$

   (c) En utilisant une intégration par parties dans le calcul de U_n, montrer que :
   $$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right].$$

   (d) En admettant que $U_n \sim \dfrac{\ln 2}{n+1}$, en déduire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k+1}$ converge vers $\ln 2$.

III. Étude d'une suite implicite.

On considère dans cette partie l'équation $f_n(x) = 2$, et on cherche à étudier les solutions de cette équation sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, l'équation admet une seule solution, qu'on notera désormais v_n.
2. Prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$ (on rappelle que $\ln 3 \simeq 1.1$).
3. Déterminer le sens de variation de la suite (v_n), et en déduire la nature de la suite.
4. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.
5. Déterminer un équivalent simple de $\ln v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. En utilisant le résultat de la question précédente, trouver un réel a tel que $v_n = 1 + \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.