

Concours Blanc : Épreuve de mathématiques

Lycée Carnot

6 janvier 2010

Problème 2 : Nombre de surjections entre ensembles finis

Dans tout ce problème, on note, pour tous entiers naturels n et p , $S_{n,p}$ le nombre de surjections de l'ensemble $\{1; 2; \dots; n\}$, vers l'ensemble $\{1; 2; \dots; p\}$. Un exemple de telle application

pour $n = 3$ et $p = 2$ est $f : \{1; 2; 3\} \rightarrow \{1; 2\}$ définie par $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 1 \end{cases}$. On convient que

$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n,0} = 0$, et $\forall p \in \mathbb{N}, S_{0,p} = 0$.

1 Exemples et généralités

1. Déterminer les valeurs de $S_{3,2}$ et $S_{4,2}$ en faisant la liste de toutes les applications convables.
2. Que peut-on dire de $S_{n,p}$ quand $n < p$?
3. Déterminer, pour tout entier n , la valeur de $S_{n,1}$.
4. Déterminer, pour tout entier n , la valeur de $S_{n,n}$.

2 Détermination de $S_{n,2}$

Pour alléger les notations, on pose dans cette partie, $\forall n \geq 2, u_n = S_{n,2}$.

1. Vérifier que $u_2 = 2$.
2. Prouver que, $\forall n \geq 2, u_{n+1} = 2(u_n + 1)$ (on pourra fixer l'image de $n + 1$ par une application surjective de $\{1; 2; \dots; n + 1\}$ dans $\{1; 2\}$, et considérer les possibilités pour les images des autres éléments).
3. À l'aide de cette relation de récurrence, déterminer la valeur de u_n .
4. Retrouver cette valeur à l'aide d'un raisonnement combinatoire direct, en comptant le nombre d'applications de $\{1; 2; \dots; n\}$ dans $\{1; 2\}$ qui ne sont pas surjectives.

3 Détermination de $S_{n,3}$

On pose désormais, $\forall n \geq 3, v_n = S_{n,3}$.

1. Vérifier que $v_3 = 6$.
2. Prouver que, $\forall n \geq 3, v_{n+1} = 3(v_n + u_n) = 3v_n + 3 \times 2^n - 6$.
3. Écrire un programme Pascal calculant la valeur de v_n pour un entier n choisi par l'utilisateur, à l'aide de la relation de récurrence précédente.

4. On pose $\forall n \geq 3, w_n = v_n - 3$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (w_n) .
5. On pose désormais, $\forall n \geq 3, t_n = w_n + 3 \times 2^n$. Montrer que (t_n) est une suite géométrique de raison 3.
6. En déduire la valeur de t_n , puis celle de u_n et de w_n .
7. Par un raisonnement direct inspiré de celui de la question 2.4 (dénombrer le nombre d'applications non surjectives), retrouver la valeur de v_n .

4 Détermination de $S_{n+1,n}$

1. Soit f une application surjective de $\{1; 2; \dots; n+1\}$ dans $\{1; 2; \dots; n\}$. Montrer qu'il existe un unique élément dans $\{1; 2; \dots; n\}$ ayant deux antécédents par f .
2. De combien de façons peut-on choisir ces deux antécédents ?
3. En déduire que $S_{n+1,n} = \frac{n(n+1)!}{2}$.

5 Cas général

1. Montrer que, $\forall n \geq 2, \forall p \geq n, S_{n,p} = nS_{n,p-1} + S_{n-1,p-1}$.
2. À l'aide de cette relation, dresser un tableau similaire au triangle de Pascal donnant les valeurs de $S_{n,p}$ pour des entiers n et p inférieurs ou égaux à 5.
3. Soit j un entier inférieur ou égal à $p-1$, et k tel que $j \leq k \leq p$, prouver que

$$\binom{p}{k} \binom{k}{j} = \binom{p}{j} \binom{p-j}{k-j}$$

4. En déduire que $\sum_{k=q}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{q} = 0$ (on pourra faire apparaître une formule du binôme de Newton).
5. Déterminer en fonction de $S_{n,k}$, le nombre d'applications de $\{1; 2; \dots; n\}$ dans $\{1; 2; \dots; p\}$ prenant exactement j valeurs différentes (j étant ici un entier inférieur ou égal à p).
6. En déduire que $p^n = \sum_{j=1}^{j=p} \binom{p}{j} S_{n,j}$.
7. Prouver à l'aide des deux résultats précédents que $S_{n,p} = (-1)^p \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n$ (calculer la somme de droite en remplaçant k^n par la formule obtenue à la question 6).