1S — 2008-05-09 — Devoir de mathématiques

Le barème est sur 100, et sera ramené sur 20 à la fin.

Exercice 1 (50 points) On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 10x + 23}{x + 3}$.

a. (2 points) Indiquer l'ensemble de définition de f.

b. (5 points) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, et indiquer les éventuelles asymptotes qui en découlent.

c. (5 points) Dire pourquoi f est dérivable, et calculer sa dérivée f'.

d. (5 points) Montrer que $f'(x)$ est du signe de $x^2 + 6x + 7$.

e. (5 points) Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f.

Note : exceptionnellement, on pourra se contenter de valeurs approchées pour la valeur de f aux extrémums.

f. (5 points) Écrire $f(x)$ sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{x+3}$, avec a, b et c des nombres à déterminer.

g. (3 points) En déduire que la droite d'équation $y = x+7$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f.

h. (3 points) Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x - 3) - 4$. Indiquer l'ensemble de définition de g.

i. (3 points) Comment la courbe représentative de g se déduit-elle de celle de f ?

j. (2 points) Montrer que la fonction g est impaire.

k. (5 points) En déduire que la courbe représentative de f admet un centre de symétrie à préciser.

l. (2 points) Calculer les coordonnées du point d'intersection des deux asymptotes de f. Que peut-on remarquer ?

m. (5 points) Dans un repère orthonormé (unité : 1 cm, x de -11 à 5, y de -8 à 16), tracer la courbe représentative de f, après avoir placé tous les points et droites remarquables évidemment.

Exercice 2 (15 points) ABC est un triangle. I et J sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[AC]$. D est le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ et $(B, 2)$. G est le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 2)$, $(A, 1)$ et $(C, 1)$.

a. (3 points) Construire le point D.

b. (4 points) Démontrer que G est le barycentre des points pondérés $(I, 2)$, $(J, 1)$.

c. (4 points) Démontrer que G est le barycentre des points pondérés $(D, 5)$, $(C, 1)$.

d. (4 points) En déduire que les droites (IJ) et (CD) sont sécantes en G.

Exercice 3 (10 points) Soit ABC un triangle du plan. On note J le milieu de $[BC]$, et G le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$.

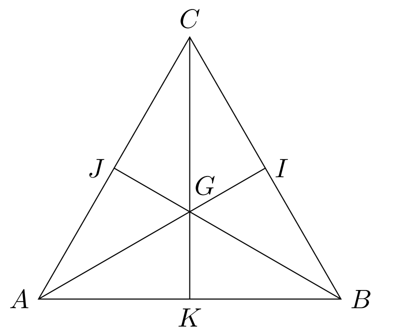
a. (3 points) Construire une figure. Placer J et G.

b. (3 points) Exprimer le vecteur $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{AJ}$.

c. (4 points) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M du plan tels que $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

Exercice 4 (10 points) ABC est un triangle équilatéral de côté a, où $a \in \mathbb{R}_+^*$. I, J et K sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. G est l'isobarycentre des points A, B et C.

Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GJ}$, $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{JB}.\overrightarrow{KC}$



Exercice 5 (15 points)

ABC est un triangle isocèle de sommet A tel que $BC = 5\,\text{cm}$ et $AB = 3\,\text{cm}$.

a. (3 points) Tracer une figure.

b. (4 points) Calculer $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.

c. (4 points) Calculer BH, où H est le projeté orthogonal de C sur (BA).

d. (4 points) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, et en déduire la valeur de $\cos\widehat{BAC}$. Donner ensuite une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAC}$ à 0,1° près.