1S — 2008-05-09 — Devoir de mathématiques — correction

Exercice 1 (50 points) $f(x) = \dfrac{x^2+10x+23}{x+3}$

a. $D_f =]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$

b. f est une fonction rationnelle, donc ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont celles du quotient des termes dominants, soit $\dfrac{x^2}{x} = x$. Donc

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-3}(x^2+10x+23) = 2$, $\lim\limits_{x\to-3}(x+3) = 0$, il faut donc étudier le signe de $x+3$:

x		-3	
$x+3$	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x) = -\infty$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x) = +\infty$

Donc la droite d'équation $x=-3$ est asymptote à la courbe.

c. f est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur tout son ensemble de définition.

$$f'(x) = \frac{(2x+10)(x+3)-(x^2+10x+23)1}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+7}{(x+3)^2}$$

d. Pour tout $x\neq-3$, $(x+3)^2>0$, donc $f'(x)$ est du signe de son numérateur x^2+6x+7.

e. $x^2+6x+7 = \left(x-(-3-\sqrt{2})\right)\left(x-(-3+\sqrt{2})\right)$

Ce qui permet de dresser le tableau de signe de f' et de variations de f :

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{2}$		-3		$-3+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1,17	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6,83	↗	$+\infty$

f. $ax+b+\dfrac{c}{x+3} = \dfrac{(ax+b)(x+3)+c}{x+3} = \dfrac{ax^2+(3a+b)x+(3b+c)}{x+3}$

On veut donc $ax^2+(3a+b)x+(3b+c) = 1x^2+10x+23$. Par identification des coefficients, on a donc $a=1$, $3a+b=10$, soit $b=7$, et $3b+c=23$, soit $c=2$.

Donc $f(x) = x+7+\dfrac{2}{x+3}$. On peut vérifier que le résultat est exact.

g. $f(x)-(x+7) = \dfrac{2}{x+3}$ d'après le calcul ci-dessus. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+7) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+7) = 0$.

Donc la droite d'équation $y=x+7$ est asymptote à la courbe des deux côtés.

h. $g(x)$ existe si et seulement si $f(x-3)$ existe, soit si $x-3\neq-3$, ou encore $x\neq0$. Donc $D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

i. Il y a deux étapes pour passer de f à g : soustraire 3 à x, ce qui correspond à une translation horizontale de vecteur $3\overrightarrow{i}$, et ajouter -4 au résultat, ce qui correspond à une translation verticale de vecteur $-4\overrightarrow{j}$.

Donc C_g est l'image de C_f par une translation de vecteur $3\overrightarrow{i}-4\overrightarrow{j}$.

j. Calculons $g(x)$. Pour ça nous utiliserons l'expression de f trouvée à la question f, car elle comporte moins de x.

$$g(x) = f(x-3)-4 = (x-3)+7+\frac{2}{(x-3)+3}+4 = x+\frac{2}{x}$$

L'ensemble de définition de g est symétrique par rapport à l'origine.

$$g(-x) = (-x)+\frac{2}{-x} = -\left(x+\frac{2}{x}\right)$$

Donc g est impaire.

k. Donc C_g est symétrique par rapport à l'origine. Donc C_f est symétrique par rapport à l'antécédent de l'origine par la translation.

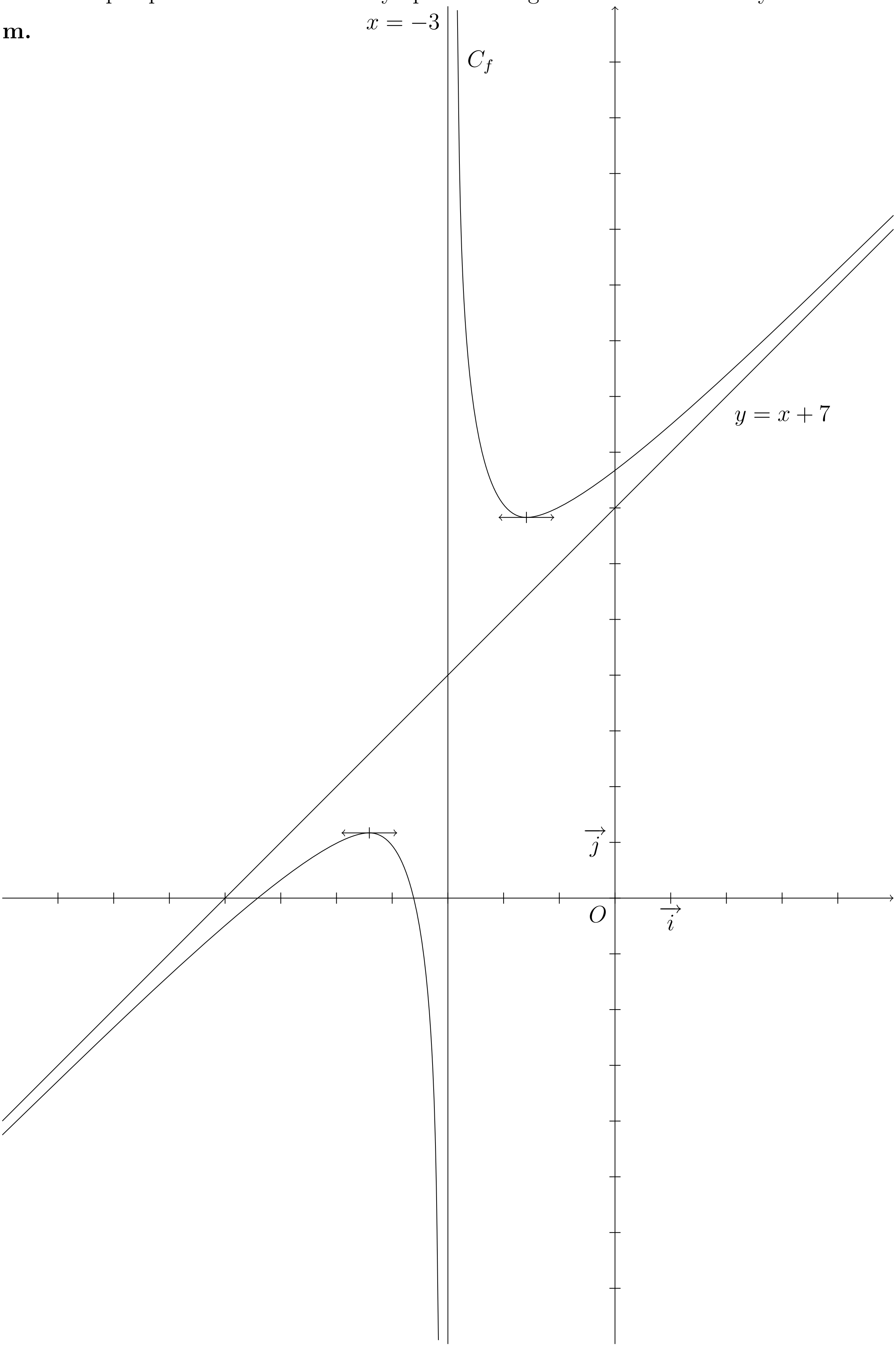
C_f est symétrique par rapport au point de coordonnées $(-3; 4)$.

l. Les asymptotes sont les droites d'équations $x = -3$ et $y = x + 7$, ce qui nous donne $x = -3$ et $y = -3 + 7 = 4$ pour l'intersection.

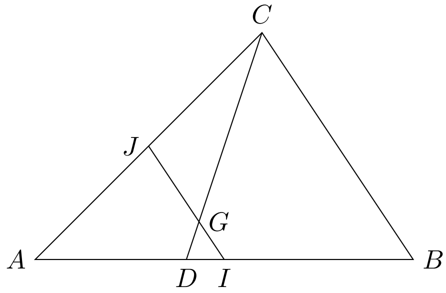
Les asymptotes se coupent au point de coordonnées $(-3; 4)$.

On remarque que l'intersection des asymptotes est également le centre de symétrie.

m.



Exercice 2 (15 points)



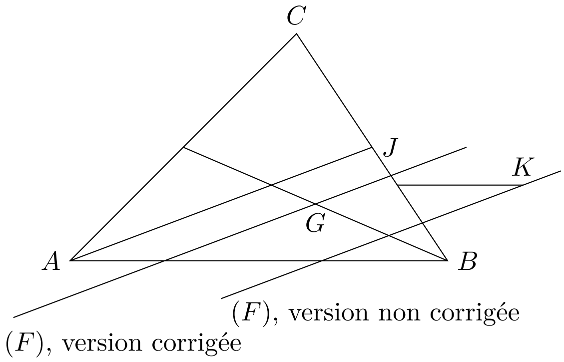
a. D est le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 2)$, donc $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2+3}(3\overrightarrow{AA} + 2\overrightarrow{AB})$, soit $\overrightarrow{AD} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

b. I est le milieu de $[AB]$, donc l'isobarycentre de A et B, donc en particulier le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 2)$. De même, J est le barycentre de $(A, 1)$ et $(C, 1)$. Donc par associativité, G est le barycentre de $(I, 2+2)$ et $(J, 1+1)$, soit, en divisant les poids par 2 : G est le barycentre de $(I, 2)$ et $(J, 1)$.

c. Après regroupement des points en double, G est le barycentre de $(A, 3)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$. Or D est le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 2)$. Donc par associativité, G est le barycentre de $(D, 5)$, $(C, 1)$.

d. G est un barycentre de I et J, donc G, I et J sont alignés. Pour la même raison, G, D et C sont alignés. Donc (IJ) et (CD) sont sécantes en G.

Exercice 3 (10 points) Soit ABC un triangle du plan. On note J le milieu de $[BC]$, et G le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$.



a. Si I est le milieu de $[AC]$, I est le barycentre de $(A, 1)$ et $(C, 1)$, donc par associativité, G est le barycentre de $(I, 2)$ et $(B, 2)$: G est le milieu de la médiane issue de B.

b. La somme des coefficients est nulle, donc on introduit n'importe quel point. Ici, l'énoncé suggère J :

$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA}) - (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}) - (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC})$

$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 0\overrightarrow{MJ} + 2\overrightarrow{JA} - (\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC})$

Comme J est le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{0}$, donc :

$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{AJ}$

c. Erreur d'énoncé : il fallait considérer $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ plutôt que $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, pour que G apparaisse. Les deux versions seront comptées juste.

Version corrigée : On commence par simplifier. Les coefficients suggèrent d'introduire G dans le calcul :

$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) = 4\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 4\overrightarrow{MG}$

On cherche donc les points M tels que $-2\overrightarrow{AJ}$ soit colinéaire à $4\overrightarrow{MG}$.

Donc (F) est la droite parallèle à (AJ) passant par G.

Version non corrigée : On commence par simplifier. Pour ça, on introduit le point H, barycentre de $(B, 2)$ et $(C, 1)$:

$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC}) = 3\overrightarrow{MH} + (2\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{AB}$

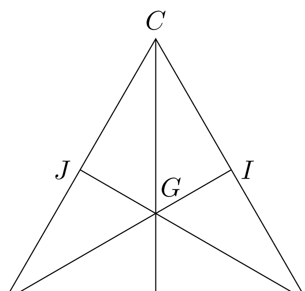
Soit K le point tel que $\overrightarrow{HK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, alors :

$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MH} + 3\overrightarrow{HK} = 3(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HK}) = 3\overrightarrow{MK}$

On cherche donc les points M tels que $-2\overrightarrow{AJ}$ soit colinéaire à $3\overrightarrow{MK}$.

Donc (F) est la droite parallèle à (AJ) passant par K.

Exercice 4 (10 points) ABC est un triangle équilatéral de côté a, où $a \in \mathbb{R}_+^*$. I, J et K sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. G est l'isobarycentre des points A, B et C.



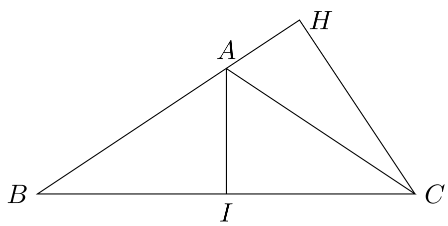
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KC}).\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{KC}.\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires et de même sens ; $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{KC}$ sont orthogonaux, donc :

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = ||\overrightarrow{BK}||\,||\overrightarrow{BA}|| + 0 = \dfrac{a^2}{2}$
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IG}) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IG}$
$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires et de même sens ; $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{IG}$ sont orthogonaux, donc :
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BG} = ||\overrightarrow{BC}||\,||\overrightarrow{BI}|| + 0 = \dfrac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires et de même sens, comme ci-dessus, donc $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BI} = \dfrac{a^2}{2}$
$\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GJ}$ sont colinéaires et de sens opposé, donc $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GJ} = -||\overrightarrow{GB}||\,||\overrightarrow{GJ}||$. On connaît la hauteur d'un triangle équilatéral : $BJ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$; de plus, $GB = 2GJ = \dfrac{2}{3}BJ$, ce qui nous donne :
$\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GJ} = -\dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}a \times \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}a = -\dfrac{a^2}{6}$
$\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = (\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC}) = \overrightarrow{GI}^2 + \overrightarrow{GI}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = GI^2 + 0 + 0 - IB \times IC$
$\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{12} - \dfrac{a^2}{4} = -\dfrac{a^2}{6}$
On a $\overrightarrow{JB} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{KC} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{GC}$, donc :
$\overrightarrow{JB}.\overrightarrow{KC} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{GB}.\dfrac{3}{2}\overrightarrow{GC} = \dfrac{9}{4}\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = \dfrac{9}{4} \times \left(-\dfrac{a^2}{6}\right) = -\dfrac{3a^2}{8}$

Exercice 5 (15 points)
ABC est un triangle isocèle de sommet A tel que $BC = 5\,\text{cm}$ et $AB = 3\,\text{cm}$.



a.

b. Soit I le milieu de $[BC]$. Comme ABC est isocèle, $[AI]$ est aussi une hauteur, donc (AI) est perpendiculaire à (BC).
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IA}$
$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires et de même sens, donc :
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = ||\overrightarrow{BC}||\,||\overrightarrow{BI}|| + 0 = 5 \times \dfrac{5}{2}$
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \dfrac{25}{2}$

c. On peut calculer $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ en introduisant H plutôt que I :
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HC}).\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BA} = BH \times BA + 0 = 3BH$
Donc $3\overrightarrow{BH} = \dfrac{25}{2}$, ce qui donne $BH = \dfrac{25}{6}$.
d. On introduit le point H dans le calcul :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} = -AB\,AH$
Or $AH = BH - BA$, on sait que $BH = \dfrac{26}{6}$ et $BA = 3$, donc $AH = \dfrac{7}{6}$.
Ce qui donne enfin : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\dfrac{7}{2}$
D'autre part, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$, donc $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = -\dfrac{7}{18}$
Ce qui donne environ 112,9° pour $\widehat{BAC}$.