# Informatique tronc commun
# Calcul matriciel

Sujet

24 mars 2007

## 1 Réduction, calcul de puissances et application

Soit $A$ la matrice définie par $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

### 1.1 Étude de $A$

Préciser le noyau et l'image de $A$. Préciser le rang de $A$. Calculer le déterminant de $A$. Vérifier la cohérence de ces résultats.

### 1.2 Réduction de $A$

a Déterminer les valeurs propres de $A$. On définira trois variables $a$,$b$,$c$ associées à ces valeurs propres.

b Déterminer les sous-espaces propres de $A$. On définira trois variables $ba$,$bb$,$bc$ formant une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^3$.

c Pourquoi $A$ est-elle diagonalisable ? (plusieurs réponses possibles)

d Définir une matrice $P$ et une matrice $D$ telle que $A = PDP^{-1}$.

e Définir une variable `Pinv` associée l'inverse de $P$.

f Vérifier la formule $A = PDP^{-1}$

### 1.3 Polynômes de matrices

a Définir le polynôme caractéristique de $A$ : `PA`.

b Trovuer ses racines. Vérifier la cohérence de ces résultats avec ceux du 1.2.

c Vérifier le théorème de Cayley-Hamilton : $\mathtt{PA}(A) = 0$

d Factoriser `PA`.

e Soit $\Pi_A$ le polynôme minimal de $A$. $\Pi_A = X$ ou $X+1$ ou $X-2$ ou $X(X+1)$ ou $X(X-2)$ ou $(X+1)(X-2)$ ou $X(X+1)(X-2)$. Pourquoi ? En déduire $\Pi_A$

### 1.4 Puissances de $A$

On note `An` la variable associée à $A^n$.

a Définir et calculer `An` : on veut ses coefficients en fonction de $n$. Dans la suite on étudiera une autre méthode de calcul de `An`.

b Il existe un unique polynôme $Q_n$ et un unique polynôme $R_n$ tels que

$$X^n = Q_n \mathtt{PA} + R_n$$

avec $d(R_n) \leq 2$. Pourquoi ? Dans la suite on se propose de calculer $R_n$. On note $R_n = \alpha X^2 + \beta X + \delta$.

**Une parenthèse : résolution d'un système**

- La définition d'une équation doit utiliser un nom d'inconnue muet. C'est à dire qui n'existe pas comme variable. On rend muettes les inconnues $x, y$ par : `unassign('x','y');`.
- Un système est composé de plusieurs équations entre accolades : `sys := {eq1,eq2,...}`
- `solve` renvoie les solutions sous la forme d'un système `sol := {x = ..., y = ...}`.
- À ce stade, $x, y$ et ... sont des inconnues muettes qui n'existent pas.
- Pour fabriquer les variables associées avec leur valeur : `assign(sol);`

c Désaffecter les objets `alpha`, `beta` et `delta` (au cas où ...). Définir la variable `Rn` associée à $R_n$.

d Définir un système de trois équations dont $\alpha, \beta$ et $\delta$ sont solutions : `sys`. Définir le système des solutions de ce système : `sol`. Affecter les trois variables `alpha`, `beta` et `delta` avec les valeurs obtenues. Retrouver $R_n$ (on tape juste `Rn;`).

e Retrouver l'expression de $A^n$.

### 1.5 Application : suites récurrentes croisées

On considère les trois suites réelles $u, v, w$ définies par leur premier terme $u_O, v_0, w_0$, et :

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n \\ v_{n+1} = u_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

a En notant $U_n$ le vecteur colonne de coordonnées $u_n, v_n, w_n$, exprimer $U_{n+1}$ en fonction de $U_n$ et de $A$. En déduire $U_n$ en fonction de $A^n$ et de $U_0$.

b Exprimer $u_n, v_n$ et $w_n$ en fonction de $n$ et de $u_0, v_0, w_0$.

c Quelle est la nature de ces suites ?

### 1.6 Application : système différentiel

On considère les trois fonctions $f, g, h$ définies par leur valeur en 0 et :

$$\begin{cases} f'(t) = g(t) \\ g'(t) = f(t) + h(t) \\ h'(t) = f(t) + g(t) + h(t) \end{cases}$$

1. En notant $Y(t)$ le vecteur colonne de coordonnées $f(t), g(t), h(t)$, exprimer $Y'(t)$ en fonction de $Y(t)$ et de $A$. On pose $Z(t) = P^{-1}Y(t)$. Exprimer $Z'(t)$ en fonction de $D$ et de $Z(t)$.
2. Définir le vecteur $Z(t) = [F(t), G(t), H(t)]$
3. Résoudre l'équation différentielle en $Z(t)$ trouvée précédemment. On créera et on affectera les objets `F(t),G(t),H(t)`.
4. En déduire $Y(t)$ puis $f(t), g(t), h(t)$, que l'on notera `fs(t),gs(t),hs(t)`.
5. Résoudre directement le système différentiel initial. Toujours directement, trouver l'unique triplet solution vérifiant $f(0) = g(0) = h(0) = 0$. Toujours directement, trouver l'unique triplet solution vérifiant $f(0) = g(0) = h(0) = 1$. Retrouver ce triplet à l'aide de celui obtenu par la méthode de réduction.

### 1.7 Exponentielle de matrices

Soit $A$ une matrice carrée. La série $\Sigma_{n=0}\frac{A^n}{n!}$ converge. Pourquoi ? On note alors $\exp(A)$ sa somme. On peut montrer que l'on a les propriétés usuelles de l'exponentielle, à savoir :
- $\exp(0) = 1$
- $\exp(A + B) = \exp(A) + \exp(B)$
- $\exp(A)$ est inversible, d'inverse $\exp(-A)$

On calcule l'exponentielle de $A$ avec `exponential(A)`.

a Calculer $\exp(A)$ avec la matrice $A$ de ce TP.

b Expliquer comment on peut calculer très simplement $\exp(A)$ à l'aide de $D$. Vérifier.

c Vérifier les propriétés annoncées en calculant $\exp(2A)$ et l'inverse de $\exp(A)$.

d Le système différentiel précédent s'écrit $Y' = AY$. On intuite $Y = \exp(tA) * Y(0)$. Pourquoi ? Définir une matrice `ea`$=\exp(t * A)$. Vérifier que l'intuition est correcte.

### 1.8 Une série de matrices

Soit $N$ une norme sur $\mathbb{M}_n(K)$. Soit $B$ une matrice carrée telle que $N(B) < 1$. La série $\Sigma_{n=0}B$ converge. Poruquoi ?

a Avez-vosu une idée de sa somme ? Vérifier avec $B = A/3$. Pourquoi prendre ici $A/3$ et pas $A$ ?

b Montrer que $B$ est diagonalisable. Définir une matrice diagonale $D_B$ semblable à $B$, à l'aide de $D$.

c Expliquer comment calculer sa somme simplement à l'aide de $D_B$.

d On peut choisir ce que l'on veut pour $N$. Par exemple $N = |||\dot{|}|_\infty$. il semble qu'il y ait un rapport entre l'affirmation $N(A) < 1$ (qui dépend de $N$ a priori) et une propriété qui ne dépend que de $A$. Laquelle, selon vous ? Vérifier sur des exemples cette intuition.

### 1.9 Le rayon spectral

Soit $N$ une norme sur $\mathbb{M}_n(K)$. Soit $A$ une matrice carrée. Le *rayon spectral* de $A$ est le maximum des modules de ses valeurs proprres. Notation : $\rho(A)$.

On a le théorème $\rho(A) < 1 \Leftrightarrow (A^k)$ tend vers 0.

1. Tiens ! Quel rapport avec la dernière question 1.8.d ?
2. Vérifier sur des exemples.

## 2 Séries vectorielles et application aux matrices

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel normé (par $||||$). Soit $u = (u_n)$ une suite de $E$ et, pour $n \geq 0$ : $S_n = \Sigma_{n\geq 0}^n u_k$.

**Définitions :**
On dit que la série $\Sigma_{n\geq 0}u_n$ *converge pour* $||\dot{|}|$ si $(S_n)$ converge.

On note $\Sigma_{k=0}^{\infty}u_k$ la somme de la série dans ce cas : c'est la limite de $(S_n)$.

**Normes équivalentes :**
La notion de convergence et la valeur de la somme ne changent pas si on remplace $||||$ par une norme équivalente.

**Convergence absolue :**
La série vectorielle $\Sigma_{n\geq 0}u_n$ est aboslument convergente si la série de réels positifs $\Sigma_{n\geq 0}||u_n||$ converge.

**Cas d'un espace complet :**
Si l'espace est complet, *convergence absolue*$\Rightarrow$ *convergence.*

**Cas d'un espace de dimension finie $p$ :**
- Toutes les normes sont équivalentes.
- Il est complet, donc *convergence absolue*$\Rightarrow$ *convergence.*
- Soit $e$ une base.
  $\Sigma_{n\geq 0}u_k$ converge ssi les $p$ séries réelles des coordonnées convergent.
  Dans ce cas : la $i$-ème coordonnée de $\Sigma_{k=0}^{\infty}u_k$ est la somme de la $i$-ème série des coordonnées.

**Application aux matrices :**
- $\mathbb{M}_p(K)$ est de dimension finie.
- On peut parler de série de matrices et utiliser ce qui précède.
- Avec la base canonique :
  une série de matrices converge ssi les $p^2$ séries des coefficients convergents.
  Dans ce cas, le coefficient $(i, j)$ de la somme est la somme de la série des coefficients $(i, j)$.

$\Rightarrow$

Vérifier tout ceci sur des exemples avec Maple.