Informatique tronc commun
Équations différentielles

Sujet

28 novembre 2006

1 Définition d'une équation différentielle et résolution

▶ Une équation différentielle du premier ordre est une égalité de la forme $f(x, y(x), y'(x)) = 0$. En Maple, c'est une *expression booléenne*. On peut définir cette égalité en Maple par : `> équation := ((f(x,y(x),y'(x))) = 0);`

On obtient l'expression $y'(x)$ par : `diff(y(x),x)`.

▶ Pour résoudre une équation différentielle sans condition initiale :

`> solution := dsolve (équation, y(x));`

Dans la réponse, le symbole `_C1` désigne une constante d'intégration.

▶ Pour résoudre une équation différentielle avec condition initiale

`> solution := dsolve({équation, y(`α`)=`β`}, y(x));`

▶ Le résultat de `dsolve` est une égalité, Ce n'est pas une affectation. Le symbole `y(x)` n'est donc pas défini. On peut le définir avec `> assign (solution);`. Après cette instrucion, $y(x)$ est défini comme étant *l'expression* solution de l'équation différentielle initiale. Ce n'est toujours pas une fonction.

On peut fabriquer la fonction associée par :

`> fy := unapply(y(x),x);`

On peut alors tracer le graphe de la solution par :

`> plot(fy(x),x=a..b);` ou `> plot(fy);`

Attention : dans le cas d'une solution générale avec constante d'intégration, il faut avant tout donner une valeur à cette constante (sinon le tracé est vide).

On fait donc :

```
> y1(x) := subs(_C1=valeur ; y(x));
  fy1 := unapply(y1(x),x);
  plot(fy1);
```

▶ Maple ne sait pas résoudre certaines équation différentielles. Dans ce cas, il peut fournir un tracé approximatif du graphe d'une solution. On utilise :

`> solution := dsolve({équation, y(0)=1}, y(x), numeric);`

`solution` est une *procédure*, capable de renvoyer une approximation de $y(x)$ pour tout x donné. Pour obtenir cette valeur pour $x = 2$, par exemple :

`> solution(2);`

On peut alors obtenir une approximaiton du tracé du graphe grace à la fonction `odeplot` de la bibliothèque `plots` avec :

`> with(plots); odeplot(solution,[x,y(x)],a..b);`

2 Un exemple où la résolution exacte est possible

▶ On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + 3y(x) = 3 + x \tag{1}$$

Question 1 *Définir cette équation que l'on appellera* `eq1`.

Question 2 *Déterminer la solution générale de cette équation.*

Question 3 *Déterminer la solution* `y1` *de cette équation qui est nulle en 0.*

Question 4 *Fabriquer* l'expression `y1`.

Question 5 *Fabriquer l'*application `fy1` *associée à l'expression* `y1` *et tracer son graphe.*

Question 6 *Fabriquer la solution approchée* `ay1` *de cette équation qui est nulle en 0.*

Question 7 *Comparer le graphe de* `fy1` *avec celui donné par l'approximation numérique.*

Question 8 *Fabriquer la procédure* `g1` *à trois variables telle que* `g1(a,b,x)` *est la valeur en* `x` *de la fonction f solution de 1 vérifiant $f(a) = b$.*

Question 9 *Tracer, sur un même graphique, les courbes intégrales des fonctions f solutions de l'équation vérifiant $f(0) = k$ où k est une entier compris entre -3 et 3.*

3 Une équation linéaire du second ordre

On considère l'équation différentielle

$$(1+x)y''(x) - 2y'(x) + (1-x)y(x) = xe^{-x} \tag{2}$$

Question 10 *Déterminer la solution générale de cette équation, et retrouver ainsi la structure de l'ensemble des solutions.*

Question 11 *Déterminer les solutions qui valent 1 en $x = 0$.*

Question 12 *Déterminer les solutions qui valent 1 en $x = 0$ et dont la dérivée est nulle en $x = 0$.*

Question 13 *Déterminer les solutions qui valent 1 en $x = 0$ et en $x = 1$.*

4 Un système différentiel

▶ On considère le système différentiel

$$\begin{aligned} x' &= 5x - 2y \quad (3) \\ y' &= -x + 6y \quad (4) \end{aligned}$$

Question 14 *Résoudre le système, et retrouver ainsi la structure de l'ensemble des solutions. Retrouver la solution telle que $x(0) = y(0) = 1$.*

▶ On considère le système différentiel

$$\begin{aligned} x' &= 5x - 2y + e^t \quad (5) \\ y' &= -x + 6y + t \quad (6) \end{aligned}$$

Question 15 *Résoudre le système, et retrouver ainsi la structure de l'ensemble des solutions.*

5 Un algorithme de résolution numérique : la méthode d'Euler

▶ Soit une équation différentielle

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{7}$$

que l'on munit des conditions initiales $y(x_0) = y_0$. On veut une solution approchée de y (notée Y) sur un intervalle $[a, b]$ qui contient x_0. Soit h un réel tel que $0 < h < \min(x_0 - a, b - x_0)$

On partage l'intervalle $[x_0, b]$ en n intervalles $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de longueur h.

$$x_i = x_0 + ih$$

où n est tel que $x_n \leq b$ et $x_{n+1} > b$:

$$n = \lfloor \frac{b - x_0}{h} \rfloor$$

On partage l'intervalle $[a, x_0]$ en p intervalles $x'_p, x'_{p-1}, \ldots, x'_1$ de longueur h.

$$x'_i = x_O - ih$$

où p est tel que $x_p \geq a$ et $x_{p+1} < a$:

$$p = \lfloor \frac{x_0 - a}{h} \rfloor$$

On construit une fonction Y **affine sur chaque intervalle** ainsi construit. Il reste à trouver la valeur de Y en chaque x_i et en chaque x'_i.

On pose $Y(x_0) = y(x_0) = y_0$. Supposons contruits $Y(x_0), \ldots, Y(x_i)$. On pose $Y(x_{i+1}) = Y(x_i) + hf(x_i, Y(x_i))$. Supposons construits $Y(x'_0), \ldots, Y(x'_i)$. On pose $Y(x'_{i+1}) = Y(x'_i) - hf(x'_i, Y(x'_i))$.

On peut montrer que l'on a alors

$$||y - Y||_\infty \leq Bh$$

où B est une constante. Quand h est petit, Y est donc une bonne approximation de y.

▶ On va programmer le calcul des $x_i, x'_i, Y(x_i), Y(x'_i)$.

On reprend l'équation 1 avec $a = -1$, $b = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Question 16 *Définir les objets f, a, b, x_0, y_0, $h = 0.1$, puis n et p. Dans toute la suite, vous utiliserez ces symboles lorsque leurs valeurs seront nécessaires, dans un souci de généralisation. Pensez à utiliser la fonction `floor` pour obtenir la partie entière d'une valeur.*

Question 17 *Définir un tableau `X` et un tableau `Y` indicés de 0 à n. Définir un tableau `Xprime` et un tableau `Yprime` indicés de 0 à p.*

Question 18 *Replir la case 0 de `X` ainsi que celle de `Y`, puis, à l'aide d'une boucle `for`, les autres cases de `X` et`Y`.*

Question 19 *Reprendre la question précédente pour `Xprime` et `Yprime`.*

Question 20 *Tracer, sur un même graphique, le graphe de `Y` et celui de `fy1`. Comparer.*

Question 21 *Améliorer l'approximation du tracé.*

Question 22 *Écrire une procédure `Euler(g,a,b,x0,y0,h)` qui a pour effet d'afficher une approximation du tracé sur $[a, b]$ de la solution de $y' = g(x, y)$, où $y(x_0) = y_0$, pour un pas de h.*

Question 23 *Modifier cette procédure de façon à ce qu'elle affiche aussi le graphe de la solution exacte si Maple peut la trouver.*