Informatique tronc commun

Sujet

20 octobre 2006

1 Intégration avec Maple

▶ On rappelle les commandes suivantes :

`sum(E(i),i=1..n)`	La valeur *numérique* de $\Sigma_{i=1}^{n}(E(i))$
`Sum(E(i),i=1..n)`	La valeur *symbolique* de $\Sigma_{i=1}^{n}(E(i))$
`int(f(x),x=a..b)`	La valeur *numérique* de $\int_{x=a}^{b} f(x)$
`Int(f(x),x=a..b)`	La valeur *symbolique* de $\int_{x=a}^{b} f(x)$

On notera que si l'on ne précise pas de bornes d'intégration (mais simplement la variable) dans l'utilisation de la commande `int`, Maple renvoie une primitive.

Question 1 *Calculez les intégrales suivantes:*

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+sin(t)^2}\,dt,\ \int_0^{\pi/2} e(x)\cos(x)^3\,dx$$

$$\int_0^{\infty} e(-t^2)\ln(t)\,dt$$

Question 2 *Définissez l'intégrale fonction de la borne supérieure suivante et tracer son graphe:*

$$x \mapsto \int_O^{2x^2-3} \frac{1}{t+\sqrt{t^8+t^2+5}}\,dt$$

2 Calcul approché d'intégrales

Question 3 *Rappeller et justifier le théorème de convergence des sommes de Riemann.*

Question 4 *Appliquer l'approximation par somme de Riemann en considérant*

$$I_-(f,a,b,n) = \frac{b-a}{n}\Sigma_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

$$I_+(f,a,b,n) = \frac{b-a}{n}\Sigma_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

On peut par exemple définir I_- et I_+ ainsi:

```
> dx=(b-a)/n;

> Imoins = dx*sum(f(a+(i-1)*dx),i=0..(n-1));

> Iplus = dx*sum(f(a+(i-1)*dx),i=1..n);
```

Procéder de cette façon pour faire calculer à Maple la limite de I_- et I_+ lorsque n tend vers $+\infty$. Tester vos résultats pour $a=1$, $b=3$ et différentes valeurs de n sur les fonctions cos, $x \mapsto sin(4/x)$ et $x \mapsto 1/x$.

Question 5 *Écrire deux procédures itératives fonctions de `a`,`b` et `n`, vous permettant de calculer I_- et I_+. Ces procédures ne devront pas utiliser `sum`.*

▶ La méthode des trapèzes est une amélioration de la méthode ci-dessus qui, au lieu d'approximer $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx$ par $f(k)(a_{i+1}-a_i)$ pour $k=a_i$ ou $k=a_{i+1}$, l'approxime par l'aire comprise sous la fonction affine g passant par les points $(a_i, f(a_i))$ et $(a_{i+1}, f(a_{i+1}))$.

Question 6 *Définir la valeur $g(x)$ de la fonction g entre a_i et a_{i+1}.*

Question 7 *Calculer l'intégrale de cette fonction (à la main) et en déduire une formule faisant apparaître l'intégrale de g à l'aide d'une somme.*

Question 8 *Écrire une fonction `trap := proc (a,b,n)` calculant l'approximation de f à l'aide de la méthode des trapèzes, la tester sur les exemples précdents.*

▶ La méthode de Simpson consiste à déterminer la parabole passant par les points $(a_i, f(a_i))$ pour $i=3k$, $i=3k+1$, $i=3k+2$.

Question 9 *Calculer l'aire de la figure réalisée sur un segment a_i, a_{i+1}, en prenant la parabole passant par les points $(a_i, f(a_i))$, $(\frac{a_{i+1}-a_i}{2}, f(\frac{a_{i+1}-a_i}{2}))$ et $(a_{i+1}, f(a_{i+1}))$.*

Question 10 *Réaliser un programme `simp` prenant en paramètres `a`, `b` et `n` et donnant l'approximation de f à l'aide de la méthode de Simpson.*