Option Informatique
Complexité

Sujet

30 septembre 2006

1 Différence symétrique de deux ensembles (École de l'air, 2001)

▶ Soient A et B deux ensembles ; on note $A \Delta B$ la différence symétrique des deux ensembles A et B : c'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à un et un seul des deux ensembles A et B. Formellement :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

▶ Soit E un ensemble fixé. On considère Δ comme une loi de composition sur l'ensemble des parties de E : elle est clairement commutative.

Question 1 *Montrez que Δ est associative et qu'elle possède un neutre (on notera χ_A la fonction caractéristique de A).*

Question 2 *On note $|X|$ le cardinal d'un ensemble X fini. Montrez que, si A et B sont des ensembles finis, il en est de même de $A \Delta B$. Donnez un encadrement de $|A \Delta B|$, faisant intervenir $|A|$ et $|B|$. Dans quels cas les bornes de votre encadrement sont-elles atteintes ?*

Question 3 *Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de parties de E. Donnez une caractérisation simple des éléments de $A_1 \Delta A_2 \Delta \ldots \Delta A_n$.*

▶ Une partie finie de $\mathbb{N}$ sera représentée par la liste de ses membres, sans doublon mais pas forcément ordonnée. Par exemple, l'ensemble $\{2, 7, 19\}$ sera représenté par la liste `[7;19;2]` aussi bien que par la liste `[2;19;7]` mais pas par la liste `[2;7;19;7]`.

Question 4 *Rédigez en langage Caml une fonction de signature :*

```
diffsym : int list -> int list -> int list
```

spécifiée comme suit : `diffsym a b` *construit la liste représentant la différence symétrique des parties de $\mathbb{N}$ représentées par les listes* `a` *et* `b`*.*

Question 5 *Quel est le nombre maximal de comparaisons que vous effectuez pour construire la différence symétrique de deux ensembles de cardinaux respectifs p et q ?*

Question 6 *On suppose maintenant que les parties finies de $\mathbb{N}$ sont représentées par des listes classées par ordre croissant. Rédigez une nouvelle version de* `diffsym` *telle que le nombre maximal de comparaisons effectuées pour construire la différence symétrique de deux ensembles de cardinaux respectifs p et q soit majoré par $2(p+q)$.*

2 Calcul efficace de x^n

Le problème du calcul efficace de x^n pour n entier positif devient crucial lorsque n est particulièrement grand ou bien lorsque x est un type de données où le produit est algorithmiquement coûteux. C'est le cas si x est une matrice carrée de grande dimension ou bien si x est un polynôme de degré élevé. Dans ces cas, le temps d'exécution d'une multiplication n'est plus négligeable et il peut être raisonnable de rechercher des algorithmes où l'on cherche à minimiser le nombre de multiplications effectuées.

Ce qui intéresse l'informaticien dans le calcul de x^n est le nombre de multiplications par x où par des puissances déjà calculées de x. Pour essayer de compter et de minimiser ce nombre de multiplications, on peut se contenter d'étudier le cas où x est un entier et n un entier strictement positif. C'est ainsi que la question est abordée dans ce problème.

▶ Si $n > 0$ est un entier :

- on appelle représentation binaire minimale (en abrégé r.b.m.) de n, la représentation binaire de n où l'on ne considère que les chiffres significatifs, c'est-à-dire que l'on élimine tous les éventuels chiffres 0 figurant en tête (à gauche) de la représentation ;
- on note $\lambda(n)$ le nombre de chiffres de la représentation binaire minimale de n ;
- on note $\nu(n)$ le nombre de chiffres égaux à 1 dans la représentation binaire minimale de n.

▶ L'algorithme le plus simple pour calculer x^n est basé sur les équations suivantes, qui en donnent des implémentations respectivement récursive et itérative.

$$\forall n \geq 1 \; x^n = x^{n-1}x$$
$$x^n = \Pi_{i=1}^{n} x$$

Question 7 *Écrire un algorithme récursif, prenant en arguments un entier x et un entier $n > 0$ et calculant x^n en utilisant la première équation ci-dessus. Combien de multiplications sont-elles effectuées par l'algorithme en fonction de son deuxième argument n ?*

▶ L'algorithme de Legendre considère la représentation binaire minimale de l'exposant entier $n > 0$. n s'énonce ainsi : L'algorithme pour calculer x^n s'énonce ainsi :

- on part de la valeur 1 ;
- on parcourt la r.b.m. de n de gauche à droite ; pour chaque chiffre rencontré, on élève la valeur au carré, puis si le chiffre est 1, on multiplie la valeur par x.

Question 8 *Démontrer que cet algorithme est correct.*

Question 9 *On supposera que la représentation binaire minimale du nombre n est rangée dans un tableau `T`, dont le bit de poids fort est l'élément `T[0]`. Écrire une fonction `calcul : int vect -> int -> int` qui prend en arguments `T` et `x` et qui retourne x^n.*

Question 10 *Exprimer le nombre de multiplications qui sont effectuées par cet algorithme en fonction de $\lambda(n)$ et $\nu(n)$ où n est l'exposant ?*

3 Calcul de terme de suite

▶ On veut calculer les termes de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1,\; u_n = \frac{u_n - 1}{1} + \frac{u_{n-2}}{2} + \ldots + \frac{u_0}{n} \text{ pour } n \geq 1$$

Question 11 *Donner une implémentation itérative, puis récursive avec stockage d'une fonction `u : int -> float` prenant en argument `n` et retournant le n-ième terme de cette suite.*

Question 12 *Calculer les complexités asymptotiques temporelles et spatiales de ces fonctions.*

Question 13 *Reprendre les deux questions précédentes avec la relation de récurrence suivante :*

$$u_0 = 1, u_n = u_{\lfloor n/2 \rfloor} + u_{\lfloor n/3 \rfloor} \textit{ pour } n \geq 1$$