Informatique tronc commun
Équations différentielles

Corrigé

28 novembre 2006

2 Un exemple où la résolution exacte est possible

Question 1 *Définir cette équation que l'on appellera* `eq1`*.*

```
> restart;
> equ := (diff(y(x),x)+3*y(x)=3+x);
```

$$equ := \frac{d}{dx}y\left(x\right)+3\,y\left(x\right)=3+x$$

Question 2 *Déterminer la solution générale de cette équation.*

```
> sol := dsolve ( equ, y(x));
```

$$sol := y\left(x\right)=\frac{8}{9}+1/3\,x+e^{-3\,x}\_C1$$

Question 3 *Déterminer la solution* `y1` *de cette équation qui est nulle en 0.*

```
> sol2 := dsolve (equ, y(0)=0, y(x));
```

$$sol2 := y\left(x\right)=\frac{8}{9}+1/3\,x-\frac{8}{9}\,e^{-3\,x}$$

Question 4 *Fabriquer* l'expression `y1`*.*

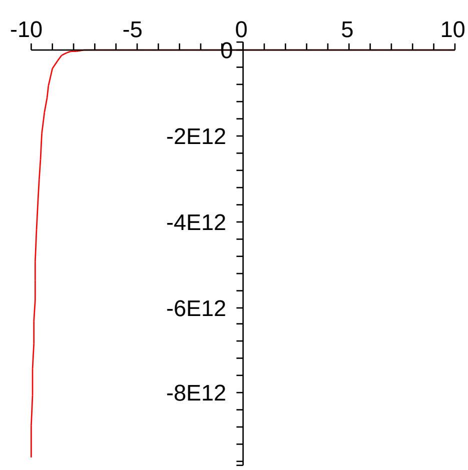
```
> assign(sol2);
```

Question 5 *Fabriquer l'*application `fy1` *associée à l'expression* `y1` *et tracer son graphe.*

```
> fy1 := unapply (y(x), x);
```

$$fy1 := x\mapsto\frac{8}{9}+1/3\,x-\frac{8}{9}\,e^{-3\,x}$$

```
> plot (fy1);
```



Question 6 *Fabriquer la solution approchée* `ay1` *de cette équation qui est nulle en 0.*

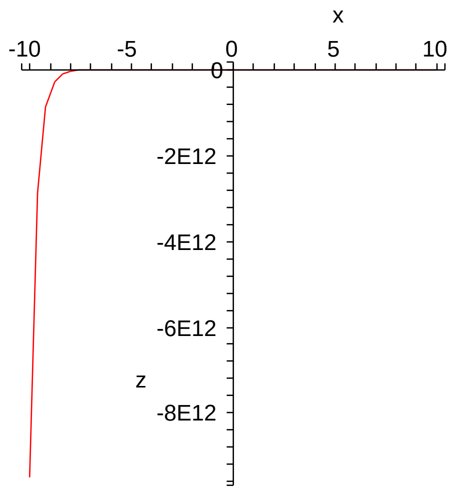
```
> equ2 := (diff(z(x),x)+3*z(x)=3+x);
```

$$equ2 := \frac{d}{dx}z(x) + 3\,z(x) = 3 + x$$

```
> sol3 := dsolve (equ2, z(0)=0,z(x),numeric):
```

Question 7 *Comparer le graphe de* `fy1` *avec celui donné par l'approximation numérique.*

```
> with (plots):
> odeplot(sol3,[x,z(x)]);
```



Question 8 *Fabriquer la procédure* `g1` *à trois variables telle que* `g1(a,b,x)` *est la valeur en* `x` *de la fonction f solution de* **??** *vérifiant $f(a) = b$.*

```
> g1 := (a,b,y) -> subs( x = y, op(2,dsolve (equ2, z(a) = b, z(x))));
```

$$g1 := (a,b,y) \mapsto \frac{8}{9} + 1/3\,y + e^{-3\,y}\left(-\frac{8}{9} - 1/3\,a + b\right)\left(e^{-3\,a}\right)^{-1}$$

```
> g1 (0,0,2);
```

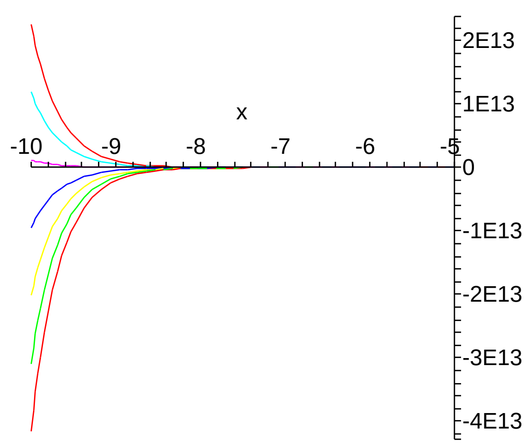
$$\frac{14}{9} - \frac{8}{9}\,e^{-6}$$

```
> g1(0,-1,x);
```

$$\frac{8}{9} + 1/3\,x - \frac{17}{9}\,e^{-3\,x}$$

Question 9 *Tracer, sur un même graphique, les courbes intégrales des fonctions f solutions de l'équation vérifiant $f(0) = k$ où k est une entier compris entre -3 et 3.*

```
> plot([seq (g1(0,k,x),k=-3..3)],x=-10..-5);
```



3 Une équation linéaire du second ordre

On considère l'équation différentielle

$$(1+x)y''(x) - 2y'(x) + (1-x)y(x) = xe^{-x} \tag{1}$$

Question 10 *Déterminer la solution générale de cette équation, et retrouver ainsi la structure de l'ensemble des solutions.*

```
> unassign(y);
> equ3 := (1+X)*diff(y(x),x$2)-2*diff(y(x),x)+(1-x)*y(x)=x*exp(-x);
```

$$equ3 := (1+X)\frac{d}{d\,`\$`(x,2)}y(x) - 2\frac{d}{dx}y(x) + (1-x)\,y(x) = xe^{-x}$$

```
> with(DEtools):
> odeadvisor(equ3,help);
```

$$[[\_2nd\_order, \_linear, \_nonhomogeneous]]$$

```
> dsolve(equ3):
```

Question 11 *Déterminer les solutions qui valent 1 en $x = 0$.*

```
> dsolve (equ3, y(0) = 1):
```

Question 12 *Déterminer les solutions qui valent 1 en $x = 0$ et dont la dérivée est nulle en $x = 0$.*

```
> dsolve (equ3, y(0) = 1, D(y)(0) = 0):
```

Question 13 *Déterminer les solutions qui valent 1 en $x = 0$ et en $x = 1$.*

```
> dsolve (equ3, y(0) = 1, y(1) = 1):
```

4 Un système différentiel

Question 14 *Résoudre le système, et retrouver ainsi la structure de l'ensemble des solutions. Retrouver la solution telle que $x(0) = y(0) = 1$.*

```
> equ4 := (diff (x(t),t) = 5*x(t)-2*y(t));
```

$$equ4 := \frac{d}{dt}x(t) = 5\,x(t) - 2\,y(t)$$

```
> equ5 := (diff(y(t),t) = -x(t) +6*y(t));
```

$$equ5 := \frac{d}{dt}y(t) = -x(t) + 6\,y(t)$$

```
> inc := x(t),y(t);
```

$$inc := \{x(t), y(t)\}$$

```
> dsolve (equ4,equ5,inc);
```

$$\left\{y(t) = -\_C1\,e^{7\,t} + 1/2\,\_C2\,e^{4\,t}, x(t) = \_C1\,e^{7\,t} + \_C2\,e^{4\,t}\right\}$$

```
> dsolve (equ4, equ5, y(0) = 1, x(0) = 1,inc);
```

$$\left\{y(t) = 1/3\,e^{7\,t} + 2/3\,e^{4\,t}, x(t) = -1/3\,e^{7\,t} + 4/3\,e^{4\,t}\right\}$$

Question 15 *Résoudre le système, et retrouver ainsi la structure de l'ensemble des solutions.*

```
> equ7 := (diff (y(t),t) = -x(t) +6*y(t) +t);
```

$$equ7 := \frac{d}{dt}y(t) = -x(t) + 6\,y(t) + t$$

```
> dsolve (equ6,equ7, inc);
```

$$\left\{x(t) = 2\,\_C2\,e^{4\,t} - \_C1\,e^{7\,t} - \frac{11}{392} - \frac{5}{18}e^{t} - 1/14\,t, y(t) = \_C2\,e^{4\,t} + \_C1\,e^{7\,t} - \frac{27}{784} - \frac{5}{28}t - 1/18\,e^{t}\right\}$$

5 Un algorithme de résolution numérique : la méthode d'Euler

Question 16 *Définir les objets f, a, b, x_0, y_0, $h = 0.1$, puis n et p. Dans toute la suite, vous utiliserez ces symboles lorsque leurs valeurs seront nécessaires, dans un souci de généralisation. Pensez à utiliser la fonction `floor` pour obtenir la partie entière d'une valeur.*

```
> a := -1; b := 1; x0 := 0; y0 := 0;
```

$$a := -1$$
$$b := 1$$
$$x0 := 0$$
$$y0 := 0$$

```
> h := 0.1; n := floor((b-x0)/h); p := floor((x0 - a)/h);
```

$$h := 0.1$$
$$n := 10$$
$$p := 10$$

Question 17 *Définir un tableau* `X` *et un tableau* `Y` *indicés de 0 à n. Définir un tableau* `Xprime` *et un tableau* `Yprime` *indicés de 0 à p.*

```
> X := array(0..n,[]); Y := array(0..n,[]);
```

Question 18 *Replir la case 0 de* `X` *ainsi que celle de* `Y`*, puis, à l'aide d'une boucle* `for`*, les autres cases de* `X` *et*`Y`*.*

```
> X[0] := x0; Y[0] := y0;
```

$$X_0 := 0$$
$$Y_0 := 0$$

```
> for i from 0 to n-1 do
> X[i+1] := X[0]+(i+1)*h;
> Y[i+1] := Y[i]+h*f(X[i],Y[i]);
> od;
```

$$X_1 := 0.1$$
$$Y_1 := 0.3$$
$$X_2 := 0.2$$
$$Y_2 := 0.52$$
$$X_3 := 0.3$$
$$Y_3 := 0.684$$
$$X_4 := 0.4$$
$$Y_4 := 0.8088$$
$$X_5 := 0.5$$
$$Y_5 := 0.90616$$
$$X_6 := 0.6$$
$$Y_6 := 0.984312$$
$$X_7 := 0.7$$
$$Y_7 := 1.0490184$$
$$X_8 := 0.8$$
$$Y_8 := 1.10431288$$
$$X_9 := 0.9$$
$$Y_9 := 1.153019016$$
$$X_{10} := 1.0$$
$$Y_{10} := 1.197113311$$

Question 19 *Reprendre la question précédente pour* `Xprime` *et* `Yprime`*.*

```
> Xprime := array(0..p,[]); Yprime := array(0..p,[]);
```

```
> Xprime[0] := x0; Yprime[0] := y0;
```

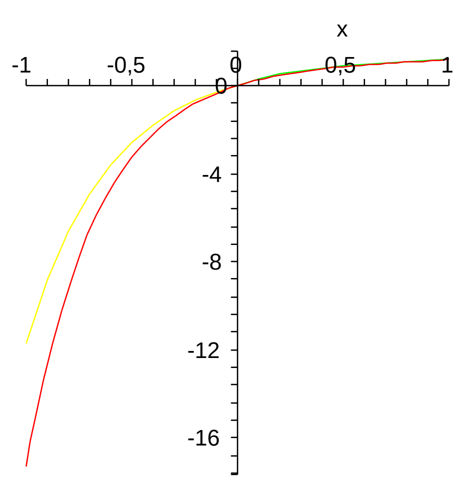
$$Xprime_0 := 0$$
$$Yprime_0 := 0$$

```
> for i from 0 to n-1 do
> Xprime[i+1]:= Xprime[0]-(i+1)*h;
> Yprime[i+1]:= Yprime[i]-h*f(Xprime[i],Yprime[i]);
> od;
```

$$
\begin{aligned}
Xprime_1 &:= -0.1\\
Yprime_1 &:= -0.3\\
Xprime_2 &:= -0.2\\
Yprime_2 &:= -0.68\\
Xprime_3 &:= -0.3\\
Yprime_3 &:= -1.164\\
Xprime_4 &:= -0.4\\
Yprime_4 &:= -1.7832\\
Xprime_5 &:= -0.5\\
Yprime_5 &:= -2.57816\\
Xprime_6 &:= -0.6\\
Yprime_6 &:= -3.601608\\
Xprime_7 &:= -0.7\\
Yprime_7 &:= -4.9220904\\
Xprime_8 &:= -0.8\\
Yprime_8 &:= -6.62871752\\
Xprime_9 &:= -0.9\\
Yprime_9 &:= -8.837332776\\
Xprime_{10} &:= -1.0\\
Yprime_{10} &:= -11.69853261
\end{aligned}
$$

Question 20 *Tracer, sur un même graphique, le graphe de `Y` et celui de `fy1`. Comparer.*

```
> plot (
> [seq ( [ X[i], Y[i] ], i=0..n)],
> [seq ( [ Xprime[i], Yprime[i] ], i=0..p)],
> fy1(x)
> ,
> x=a..b
> );
```



Question 21 *Améliorer l'approximation du tracé.*

Il suffit de reprendre les questions précédentes en re-validant la feuille de style pour une nouvelle valeur de h, strictement inférieure à la précédente.

Question 22 *Écrire une procédure `Euler(g,a,b,`x_0`,`y_0`,h)` qui a pour effet d'afficher une approximation du tracé sur $[a, b]$ de la solution de $y' = g(x, y)$, où $y(x_0) = y_0$, pour un pas de h.*

La procédure en question écrit directement les commandes-ci dessus postérieures à la définition de `a`,`b`, et `h`, et en remplaçant toutes les occurences de `f` par `g`.

Question 23 *Modifier cette procédure de façon à ce qu'elle affiche aussi le graphe de la solution exacte si Maple peut la trouver.*

On adapte le résultat de la question 8 pour la fair etracer à la place de `fy1` dans le résultat de la question 20.