Informatique tronc commun
Algorithmique

Corrigé

10 novembre 2006

1 Intégration avec Maple

Question 1 *Calcul d'intégrales.*

```
> int(1/(1+sin(t)^2),t=0..Pi);
                                        1/2
                                    Pi 2
                                    -------
                                       2

> int(exp(x)*cos(x)^3,x=0..Pi/2);
                                       Pi
                             3/10 exp(----) - 2/5
                                       2

> int(exp(-t^2)*ln(t),t=0..\infinity);
                              1/2
                            Pi    gamma         1/2
                          - ----------- - 1/2 Pi    ln(2)
                                 4
```

Question 2 *Intégrale fonction de la borne supérieure.*

```
> F:= x - > int(1/(t+sqrt(t^8+t^2+5)),t=0..2*x^2-3);
F:= x - > int(1/(t+sqrt(t^8+t^2+5)),t=0..2*x^2-3);
                                   2
                                2 x  - 3
                               /
                              |                  1
                F := x - >    |          --------------------- dt
                              |                  8    2
                             /           t + sqrt(t  + t  + 5)
                               0
> plot(F);
```

Le résultat de la commande plot est montré en Fig. 1.

2 Calcul approché d'Intégrales

Question 3 *Rappeller et justifier le théorème de convergence des sommes de Riemann.*

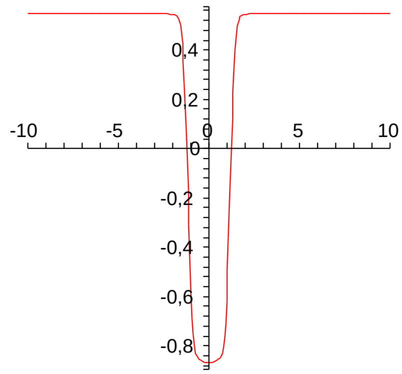

FIG. 1 – Le tracé de $x \mapsto \int_0^{2x^2-3} \frac{1}{t+\sqrt{t^8+t^2+5}}\, dt$

On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$, et $X_n = \{a_O, \dots, a_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ en n intervalles égaux (en l'ocurrence $a_i = a+i(b-a)/n$ pour $n > 0$). On choisit un point $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i]$ sur chaque segment de la subdivision, et définit la *somme de Riemann* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

Le *théorème de convergence des sommes de Riemann* affirme que la suite (u_n) converge vers une valeur $\int_a^b f(x), dx$ lorsque n tend vers l'infini.

La preuve vient de la démonstration qu'une fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment. En effet, d'après sa définition :

$$s(f, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \inf\{f(x)|x \in [a_{i-1}, a_i]\}(a_i - a_{i-1}) \leq u_n \leq S(f, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x)|x \in [a_{i-1}, a_i]\}(a_i - a_{i-1})$$

Et l'intégrabilité de f sur $[a, b]$ exprime exactement que $s(f, X_n)$ et $S(f, X_n)$ convergent vers une valeur commune (l'intégrale de Riemann de f). Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème d'encadrement pour conclure que (u_n) converge elle aussi vers cette intégrale.

Question 4 *Appliquer l'approximation par somme de Riemann en considérant*

$$I_-(f, a, b, n) = \frac{b-a}{n} \Sigma_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

$$I_+(f, a, b, n) = \frac{b-a}{n} \Sigma_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

```
> Iplus := (f,a,b,n) - > simplify((b-a)/n*sum(f(a+k*(b-a)/n),k=1..n));
                                             /  n                  \
                                             |-----                |
                                             | \          k (b - a) |
                                     (b - a) |  )    f(a + ---------)|
                                             | /              n     |
                                             |-----                |
                                             \k = 1                /
      Iplus := (f, a, b, n) - > simplify(--------------------------------)
                                                      n

> Imoins := (f,a,b,n) - > simplify((b-a)/n*sum(f(a+k*(b-a)/n),k=1..n));
                                             /  n                  \
                                             |-----                |
                                             | \          k (b - a) |
                                     (b - a) |  )    f(a + ---------)|
                                             | /              n     |
                                             |-----                |
                                             \k = 1                /
     Imoins := (f, a, b, n) - > simplify(--------------------------------)
                                                      n
```

```
> evalf(limit(Imoins(cos,1,3,n),n=infinity)) ;
                                    -0.7003509768

> evalf(limit(Iplus(cos,1,3,n),n=infinity)) ;
                                    -0.7003509768

> evalf(int(cos(x),x=1..3)) ;
                                    -0.7003509767
```

On procède de même pour $x \mapsto sin(4/x)$ et $x \mapsto 1/x$, en appelant simplement ces fonctions avec une syntaxe comme `Imoins(x- >sin(4/x),1,3,n);` ou `Iplus(x- >1/x,1,3,n);`.

Question 5 *Écrire deux procédures itératives fonctions de* `a,b` *et* `n`*, vous permettant de calculer I_- et I_+. Ces procédures ne devront pas utiliser* `sum`*.*

```
Imoins := proc (f,a,b,n)
local res, i, ak;
res := 0;
ak := (b-a)/n;
for i from 0 to (n-1) do
  res :=res+f(ak);
  ak :=ak+(b-a)/n;
od;
evalf(res*(b-a)/n);
end;
```

```
Iplus := proc(f,a,b,n)
local res, i, ak;
res := 0;
ak := a+(b-a)/n;
for i from 1 to n do
  res := res+f(ak);
  ak := ak+(b-a)/n;
od;
evalf(res*(b-a)/n);
end;
```

Il est possible de comparer notre implémentation de ces fonctions aux implémentations de la méthode des rectangles de Maple. Essayez les commandes `leftsum`, `rightsum` et `middlesum`, que l'on obtient en chargeant le package `student` (commande `with(student)`).

Question 6 *Définir la valeur $g(x)$ de la fonction g entre a_i et a_{i+1}.*

$$g(x) = f(a_i) + \frac{f(a_{i+1}) - f(a_i)}{a_{i+1} - a_i}(x - a_i)$$

Question 7 *Calculer l'intégrale de cette fonction (à la main) et en déduire une formule faisant apparaître l'intégrale de g à l'aide d'une somme.*

$$\int_a^b g(x), dx = \sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i)\frac{(f(a_{i+1}) + f(a_i))}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right)$$

Question 8 *Écrire une fonction* `trap := proc (a,b,n)` *calculant l'approximation de f à l'aide de la méthode des trapèzes, la tester sur les exemples précdents.*

```
trap := proc(f,a,b,n)
local res, i, ak;
res :=0;
ak := a;
for i from 1 to n do
  res :=res+f(ak);
  ak := ak+(b-a)/n;
od;
evalf((res+(f(b)-f(a))/2)*(b-a)/n);
end;
```

```
> evalf(trap(cos,1,3,200));
                                    -0.7003451409

> evalf(Imoins(cos,1,3,200));
                                    -0.7079966149

> evalf(int(cos(x),x=1..3));
                                    -0.7003509767
```

On procède de même pour les autres fonctions. On ne peut évidemment pas faire calculer la limite de cette procédure en l'infini. Maple possède cependant une implémentation de la méthode des trapèzes, à laquelle on peut comparer notre fonction :

```
> with(student);

> evalf(trapezoid(cos(x),x=1..3,200));
                                    -0.7003451405
```

Question 9 *Calculer l'aire de la figure réalisée sur un segment a_i, a_{i+1}, en prenant la parabole passant par les points $(a_i, f(a_i))$, $(\frac{a_{i+1}-a_i}{2}, f(\frac{a_{i+1}-a_i}{2}))$ et $(a_{i+1}, f(a_{i+1}))$.*

On rappelle la formule d'interpolation lagrangienne donnant le polynôme de degré n passant par n points $x_0, \ldots, x_n$:

$$l_j(X) = \prod_{i=0, j\neq i}^{n} \frac{X - x_i}{x_j - x_i}$$

On pose $m_i = \frac{a_{i+1}+a_i}{2}$. La valeur de la parabole passant par les trois points considérés est, entre a_i et a_{i+1} :

$$g(x) = f(a_i)\frac{(x-m_i)(x-a_{i+1})}{(a_i-m_i)(a_i-a_{i+1})} + f(m_i)\frac{(x-a_i)(x-a_{i+1})}{(m_i-a_i)(m_i-a_{i+1})} + f(a_{i+1})\frac{(x-a_i)(x-m_i)}{(a_{i+1}-a_i)(a_{i+1}-m_i)}$$

On en tire :

$$\int_a^b g(x), dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i+1}-a_i}{6}\left[f(a_i) + 4f(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}) + f(a_{i+1})\right] = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{n-2} 2f(a_i) + \sum_{i=0}^{n-1} 4f(\frac{a_i+a_{i+1}}{2})\right)$$

Question 10 *Réaliser un programme* `simp` *prenant en paramètres* `a`, `b` *et* `n` *et donnant l'approximation de* f *à l'aide de la méthode de Simpson.*

```
simp := proc(f,a,b,n)
local res,ak,i ;
res :=0 ;
ak :=a ;
for i from 1 to n do
  res := res+ f(ak) + 4*f(ak+(b-a)/(2*n))
                    + f(ak +(b-a)/n) ;
  ak := ak+(b-a)/n ;
od ;
evalf(res*(b-a)/(6*n)) ;
end ;
```

```
> simp(cos,1,3,200) ;
                                -0.7003509761

> trap(cos,1,3,200) ;
                                -0.7003451409

> evalf(int(cos(x),x=1..3)) ;
                                -0.7003509767

> with(student) ;

> evalf(simpson(cos(x),x=1..3,200)) ;
                                -0.7003509766
```

Là encore, on compare nos résultats à l'implémentation de Maple de la méthode de simpson, sur laquelle vous pouvez obtenir de l'aide avec la commande `?simpson`.