Tronc Commun Maple
Recherche dichotomique, Approximation numérique

Sujet

26 novembre 2006

1 Recherche dichotomique

Ce problème consiste à déterminer si oui ou non un élément figure dans un tableau.

1. Comment procèderiez-vous si on vous fournit un tableau quelconque dans lequel chercher un élément ? Si le tableau est trié ?
2. Donner une implémentation diviser-pour régner de la recherche dichotomique dans un tableau trié.

2 Polynome d'interpolation

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $S = [x_0, X_1, \ldots, x_n]$ une liste de $(n+1)$ réels tous distincts. Le polynome d'interpolation de Lagrange pour l'approximation de $f$aux points de S est calculé selon la méthode de Newton par la formule :

$$P = \sum_{k=0}^{n} c(0,k)(x - x_0) \times \ldots \times (x - x_{k-1})$$

où les coefficients $c(p,q)$ sont définis par récurrence sur l'entier $q - p$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} c(k,k) = f(x_k) & \text{pour tout } k \\ c(p,q) = \frac{c(p+1,q) - c(p,q-1)}{x_q - x_p} & \end{array} \right.$$

1. Écrire un programme qui calcule ce polynome à partir de la fonction f et de la liste S.
2. Modifier ce programme pour qu'il utilise l'algorithme de Horner dans la construction de son résultat.

3 Calcul approché d'intégrales

3.1 Le principe

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable. On ne sait pas calculer $\int_a^b f = I$. ON approxime f par une application plus simple g telle que $J = \int_a^b g$ est facilement calculable.

Pour construire g, on procède de la façon suivante :

- On divise l'intervalle $[a,b]$ en intervalles $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n]$, avec $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n$.[1]
- Sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, on pose $g = P_i$, où P_i est un polynome.
- Alors $J = J_n = \sum_{i=0}^{n-1} (\int_{a_i}^{a_{i+1}} P_i)$

Ensuite, on majore l'erreur commise : $c_n = |J - J_n|$. Si on veut une approximation de $\int_a^b f$ à α près, on cherche l'entier n_0 tel que $c_{n_0} \leq \alpha$.

3.2 Méthode des rectangles

$i = 0 \ldots (n-1)$ On prend $y_i \in [a_i, a_{i+1}]$[2] et $P_i = \text{ cte } = f(\tilde{y_i})$. Alors $J_n = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(y_i)$.

[1] En général on choisit $a_i = a + i\frac{(b-a)}{n}$

[2] souvent, $y_i = (a_i + a_{i+1})/2$

Dans le cas où $a_i = a + i\frac{(b-a)}{n}$, on a :

$$J_n = \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(y_i)$$

Si de plus f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$:

$$|J_n - f| \leq \frac{(b-a)^2}{n}||f'||$$

Écrire un programme Maple prenant en entrée f,a,b et n et renvoyant la somme associée.

3.3 Méthode des trapèzes

$i = 0 \ldots (n-1)$. Sur $[a_i, a_{i+1}]$, $g = P_i$ où P_i est affine avec $P_i(a_i) = f(a_i)$ et $P_(a_{i+1}) = f(a_{i+1})$.[3]

Dans ce cas :

$$J_n = \frac{(b-a)}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a_i)\right]$$

Si f est $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, on a $c_n = |J - J_n| \leq \frac{||f''||}{12n^2}(b-a)^3$.

Écrire un programme Maple prenant en entrée f,a,b et n et renvoyant la somme associée, calculée selon la méthode des trapèzes.

[3] $P_i(x) = f(a_i) + \frac{f(a_{i+1})-f(a_i)}{a_{i+1}-a_i}(x_{a_i})$