Informatique tronc commun
Calcul matriciel

Sujet

18 janvier 2008

1 Somme matricielle

1. Donner en Maple une procédure `somme_matricielle` qui calcule la somme de deux matrices `A` et `B`.
2. Rappeller la commande qui permet d'effectuer directement une telle addition.

2 Produit matriciel

1. Donner en Maple une procédure `produit_matriciel` qui calcule le produit de deux matrices d'entiers `A` et `B`.
2. Quelle est la complexité (en nombre d'opérations sur des entiers) d'une telle opération ?
3. Rappeller la commande qui permet d'effectuer directement un tel produit.

3 Calcul de déterminant

3.1 Méthode naïve : le développement par rapport à une ligne (ou une colonne)

1. Donner en Maple une procédure `extrait` qui prend en argument une matrice $A \in \mathcal{M}_n$, et deux entiers i, j appartenant à $[|1, n|]$, et renvoie la matrice A privée de sa ligne i et de sa colonne j, appartenant à $\mathcal{M}_{n-1}$. En déduire une procédure récursive `determinant_developpement` qui calcule le déterminant d'une matrice carrée en développant par rapport à une ligne ou une colonne.
2. Tester le programme précédent sur une matrice de taille respectable. Quelle est la complexité de cet algorithme ?
3. Comment obtient-on directement le déterminant d'une matrice en Maple ?

3.2 Méthode efficace : le pivot de Gauss

1. Donner en Maple une précédure `triangule` qui prend en argument une matrice `A`, et qui renvoie le couple `t(A),true` si `A` est trigonalisable, où `t(A)` est le résultat de la triangonalisation de `A` par l'algorithme du pivot de Gauss. Si `A` n'est pas trigonalisable, la fonction devra renvoyer `B,false`, où `B` est une matrice quelconque. En tirer une fonction `determinant_gauss` qui calcule le déterminant d'une matrice à l'aide de cet algorithme.
2. Quelle est la complexité de cet algorithme ?
3. Comment obtient-on directement le déterminant d'une matrice en Maple ?

4 Inversion de matrice

1. Donner en Maple une procédure `inverse_gauss` qui renvoie l'inverse d'une matrice `A` prise en argument, supposée carrée inversible. Cet inverse sera calculé à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss.
2. Comment obtient-on directement l'inverse d'une matrice en Maple ?

5 Réduction, calcul de puissances et application

Soit A la matrice définie par $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5.1 Étude de A

Préciser le noyau et l'image de A. Préciser le rang de A. Calculer le déterminant de A. Vérifier la cohérence de ces résultats.

5.2 Réduction de A

a Déterminer les valeurs propres de A. On définira trois variables a,b,c associées à ces valeurs propres.

b Déterminer les sous-espaces propres de A. On définira trois variables ba,bb,bc formant une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^3$.

c Pourquoi A est-elle diagonalisable ? (plusieurs réponses possibles)

d Définir une matrice P et une matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.

e Définir une variable `Pinv` associée l'inverse de P.

f Vérifier la formule $A = PDP^{-1}$

5.3 Polynômes de matrices

a Définir le polynôme caractéristique de A : `PA`.

b Trovuer ses racines. Vérifier la cohérence de ces résultats avec ceux du 5.2.

c Vérifier le théorème de Cayley-Hamilton : $\texttt{PA}(A) = 0$

d Factoriser `PA`.

e Soit Π_A le polynôme minimal de A. $\Pi_A = X$ ou $X+1$ ou $X-2$ ou $X(X+1)$ ou $X(X-2)$ ou $(X+1)(X-2)$ ou $X(X+1)(X-2)$. Pourquoi ? En déduire Π_A

5.4 Puissances de A

On note `An` la variable associée à A^n.

a Définir et calculer `An` : on veut ses coefficients en fonction de n. Dans la suite on étudiera une autre méthode de calcul de `An`.

b Il existe un unique polynôme Q_n et un unique polynôme R_n tels que

$$X^n = Q_n\texttt{PA} + R_n$$

avec $d(R_n) \leq 2$. Pourquoi ? Dans la suite on se propose de calculer R_n. On note $R_n = \alpha X^2 + \beta X + \delta$.

> **Une parenthèse : résolution d'un système**
>
> – La définition d'une équation doit utiliser un nom d'inconnue muet. C'est à dire qui n'existe pas comme variable. On rend muettes les inconnues x, y par : `unassign('x','y');`.
> – Un système est composé de plusieurs équations entre accolades : `sys := {eq1,eq2,...}`
> – `solve` renvoie les solutions sous la forme d'un système `sol := {x = ..., y = ...}`.
> – À ce stade, x, y et ... sont des inconnues muettes qui n'existent pas.
> – Pour fabriquer les variables associées avec leur valeur : `assign(sol);`

c Désaffecter les objets `alpha`, `beta` et `delta` (au cas où ...). Définir la variable `Rn` associée à R_n.

d Définir un système de trois équations dont α, β et δ sont solutions : `sys`. Définir le système des solutions de ce système : `sol`. Affecter les trois variables `alpha`, `beta` et `delta` avec les valeurs obtenues. Retrouver R_n (on tape juste `Rn;`).

e Retrouver l'expression de A^n.

5.5 Application : suites récurrentes croisées

On considère les trois suites réelles u, v, w définies par leur premier terme u_O, v_0, w_0, et :

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n \\ v_{n+1} = u_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

a En notant U_n le vecteur colonne de coordonnées u_n, v_n, w_n, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et de A. En déduire U_n en fonction de A^n et de U_0.

b Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n et de u_0, v_0, w_0.

c Quelle est la nature de ces suites ?

5.6 Application : système différentiel

On considère les trois fonctions f, g, h définies par leur valeur en 0 et :

$$\begin{cases} f'(t) = g(t) \\ g'(t) = f(t) + h(t) \\ h'(t) = f(t) + g(t) + h(t) \end{cases}$$

1. En notant $Y(t)$ le vecteur colonne de coordonnées $f(t), g(t), h(t)$, exprimer $Y'(t)$ en fonction de $Y(t)$ et de A. On pose $Z(t) = P^{-1}Y(t)$. Exprimer $Z'(t)$ en fonction de D et de $Z(t)$.
2. Définir le vecteur $Z(t) = [F(t), G(t), H(t)]$
3. Résoudre l'équation différentielle en $Z(t)$ trouvée précédemment. On créera et on affectera les objets `F(t),G(t),H(t)`.
4. En déduire $Y(t)$ puis $f(t), g(t), h(t)$, que l'on notera `fs(t),gs(t),hs(t)`.
5. Résoudre directement le système différentiel initial. Toujours directement, trouver l'unique triplet solution vérifiant $f(0) = g(0) = h(0) = 0$. Toujours directement, trouver l'unique triplet solution vérifiant $f(0) = g(0) = h(0) = 1$. Retrouver ce triplet à l'aide de celui obtenu par la méthode de réduction.

5.7 Exponentielle de matrices

Soit A une matrice carrée. La série $\Sigma_{n=0}\frac{A^n}{n!}$ converge. Pourquoi ? On note alors $\exp(A)$ sa somme. On peut montrer que l'on a les propriétés usuelles de l'exponentielle, à savoir :
– $\exp(0) = 1$
– $\exp(A + B) = \exp(A) + \exp(B)$
– $\exp(A)$ est inversible, d'inverse $\exp(-A)$
On calcule l'exponentielle de A avec `exponential(A)`.

a Calculer $\exp(A)$ avec la matrice A de ce TP.

b Expliquer comment on peut calculer très simplement $\exp(A)$ à l'aide de D. Vérifier.

c Vérifier les propriétés annoncées en calculant $\exp(2A)$ et l'inverse de $\exp(A)$.

d Le système différentiel précédent s'écrit $Y' = AY$. On intuite $Y = \exp(tA) * Y(0)$. Pourquoi ? Définir une matrice `ea`$=\exp(t * A)$. Vérifier que l'intuition est correcte.