Licence 1 — Mathématiques & Prépa Ingénieurs | **Algèbre et Arithmétique 1**
Université Rennes 1 | 2016–2017

Feuille n° 3
Théorie des ensembles et applications

Ensembles

Exercice 1

On considère les ensembles $E = \{0, 2, 3, 4, 5\}$, $F = \{1, 2, 4, 5, 7\}$ et $G = \{1, 3, 5, 9, 11\}$.

1. Expliciter les ensembles $E \cap F$, $E \cap G$, $F \cap G$ et $E \cap F \cap G$.

2. Expliciter $E \cup F \cup G$.

3. A-t-on $E \cap G \subset F$?

Exercice 2

On considère les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

1. Quelles sont les différentes inclusions entre les ensembles ci-dessus ?

2. Les inclusions sont-elles strictes ? Justifier.

Exercice 3

1. Déterminer les ensembles qui correspondent aux régions grisées.

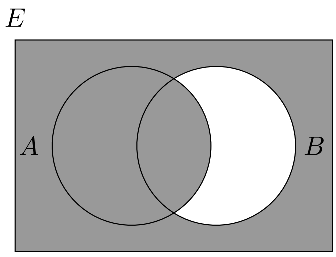


Figure 1

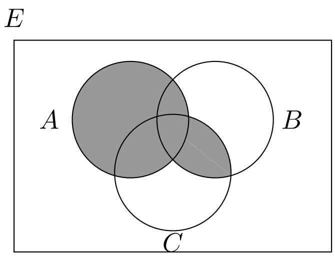


Figure 2

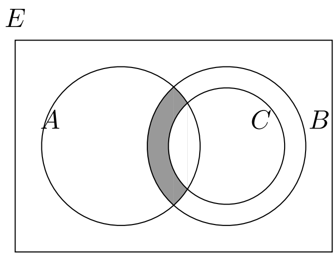
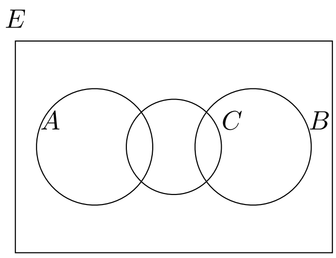
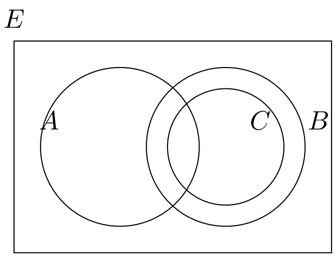


Figure 3

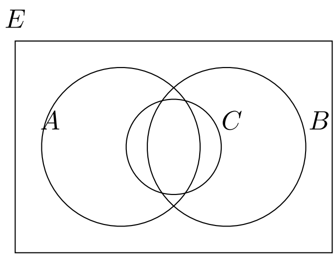
2. Hachurer les régions qui correspondent aux expressions données.



$(C \cap B^c) \cap A$



$(B \cup A) \setminus C$



$(A \setminus B) \cap C$

Exercice 4

1. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que $A \cap \mathcal{C}_E(B) \neq \emptyset \Longleftrightarrow A \not\subset B$.

2. Soient P et Q deux assertions. Montrer que $(P \text{ et non } (Q)) \Longleftrightarrow \text{non}(P \Longrightarrow Q)$.

Exercice 5

Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E. Montrer les formules suivantes :

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

2. $\mathcal{C}_E(\mathcal{C}_E A) = A$

3. $\mathcal{C}_E(A \cap B) = (\mathcal{C}_E A) \cup (\mathcal{C}_E B)$

4. $\mathcal{C}_E(A \cup B) = (\mathcal{C}_E A) \cap (\mathcal{C}_E B)$
Illustrer les résultats avec des « patates » et des couleurs.

Exercice 6

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. Démontrer les propositions suivantes :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad (A \cup B \subset A \cap B) \Rightarrow A = B,$
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), \quad (A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C) \Rightarrow B \subset C.$
3. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), \quad (A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C.$
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \backslash B = A \Leftrightarrow B \backslash A = B.$
5. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), \quad A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \mathcal{C}_E B = A \cap \mathcal{C}_E C.$

Exercice 7

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E.
Si $C \subset A \cup B$, a-t-on forcément $C \subset A$ ou $C \subset B$?

Exercice 8

Déterminer toutes les parties de $E = \{0, 1, 2, 3\}$.

Exercice 9

1. Soit $E = \{0, 1\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$, $E \times E$ et $\mathcal{P}(E \times E)$.
2. Déterminer $F = \mathcal{P}(\emptyset)$ et $\mathcal{P}(F)$.

Exercice 10

Montrer que l'ensemble $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ ne peut s'écrire comme produit cartésien de deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Exercice 11

Soient E et F deux ensembles.

1. Un sous-ensemble X de $E \cup F$ est-il toujours de la forme $A \cup B$ où A appartient à $\mathcal{P}(E)$ et B appartient à $\mathcal{P}(F)$?
2. Un sous-ensemble X de $E \times F$ est-il toujours de la forme $A \times B$ où A appartient à $\mathcal{P}(E)$ et B appartient à $\mathcal{P}(F)$?

Exercice 12

Soit E un ensemble et A et B des parties de E.

1. Déterminer toutes les parties X de E vérifiant $A \cup X = B$ (on pourra commencer par remarquer que si A n'est pas inclus dans B, de telles parties n'existent pas ; il reste à examiner le cas où A est inclus dans B ; on pourra s'aider de patates).
2. Déterminer toutes les parties X de E vérifiant $A \cap X = B$.

Applications

Exercice 13

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \to x^2$, et soit $A = [-1, 4]$. Déterminer l'image directe $f(A)$ de A par f, puis l'image réciproque $f^{-1}(A)$ de A par f.
2. On considère la fonction sinus $sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Quelle est l'image directe, par sin, de $\mathbf{R}$? de $[0, 2\pi]$? de $[0, \pi/2]$?
3. Quelle est l'image réciproque, par sin, de $[0, 1]$? de $[3, 4]$? de $[1, 2]$?

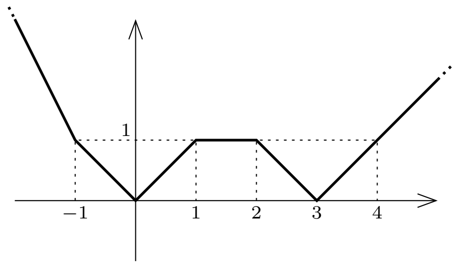
Exercice 14

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

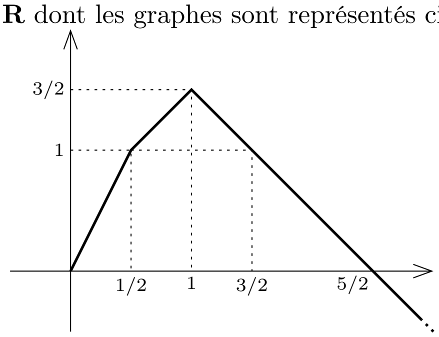
1. $f_0 : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $n \to 2n$.
2. $f_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}^*$, $n \to n + 1$.
3. $f_2 : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $n \to -n$.
4. $f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \to x^2$.
5. $f_4 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $x \to x^2$.
6. $f_5 : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \to z^2$.

Exercice 15

On considère les deux fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^+$ et $g : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}$ dont les graphes sont représentés ci-dessous :



Graphe de f



Graphe de g

1. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?
2. Par lecture du graphe, déterminer $f^{-1}(\{1\})$ et $f([2,4])$.
3. L'application g est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?
4. Par lecture du graphe, déterminer $g([1/2, 3/2])$ et $g^{-1}([0,1])$.

Exercice 16

1. Dessiner un graphe qui ne représente pas une application.
2. Dessiner, si possible, le graphe d'une application surjective f et d'une application g dont la composée $f \circ g$ ne soit pas surjective.
3. Dessiner, si possible, le graphe d'une application surjective f et d'une application g dont la composée $g \circ f$ ne soit pas surjective.
4. Dessiner, si possible, le graphe d'une application surjective f et d'une application g surjective dont la composée $g \circ f$ ne soit pas surjective.
5. Reprendre les questions précédentes avec « injective » au lieu de « surjective ».
6. Reprendre l'ensemble des questions précédentes et illustrer les propriétés demandées à l'aide de « patates » et de « flèches ».

Exercice 17

Soient E, F, G, H quatre ensembles. f une application de E dans F et g une application de G dans H. On considère

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & E \times G & \longrightarrow & F \times H \\ & & (x,y) & \longmapsto & (f(x), g(y)) \end{array}$$

1. Prouvez que Φ est injective ssi f et g sont injectives.
2. Prouvez que Φ est surjective ssi f et g sont surjectives
3. Prouvez que Φ est bijective ssi f et g sont bijectives.

Exercice 18

Soient les applications

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & & x & \longmapsto & 2x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} g & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \frac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$$

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 19

Soient E, F et G trois ensembles, $h : E \to F$, $f : F \to G$ et $g : F \to G$ trois applications. $g \circ h = f \circ h$ implique-t-il que $g = f$? Et si h est injective ? surjective ?

Exercice 20

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Montrer que :

1. $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$.

3. A-t-on égalité en général ?

Exercice 21

Soient E et F deux ensembles et f une application $E \to F$.

1. Démontrer les formules suivantes :

(a) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$,

(b) $\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$,

(c) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,

(d) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

(e) $\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,

(f) $\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,

(g) $\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

2. La proposition $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset B \Leftrightarrow f(A) \subset f(B)$ est-elle toujours vraie ?

3. La proposition $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ est-elle toujours vraie ?

Exercice 22

Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.

2. Pour toutes les parties A et B de X, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 23

Soient E un ensemble et $f : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$ une application, telle que, pour toutes les parties disjointes A et B de E, on ait $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.

1. Montrer que $f(\emptyset) = 0$.

2. Montrer que, pour toutes les parties A et B de E, on a $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.

Exercice 24

Soient E un ensemble, A et B deux parties de E. Soit l'application :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ & X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

1. Démontrer que : f injective $\Longleftrightarrow A \cup B = E$.

2. Démontrer que : f surjective $\Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

3. À quelle condition f est-elle bijective ? Expliciter alors f^{-1}.

Exercice 25

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f = f$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) f est injective,

(b) f est surjective,

(c) f est bijective.

On montrera que (a) implique (b), puis que (b) implique (c) et enfin que (c) implique (a).

Exercice 26

Soit X un ensemble. Si $A \subset X$, on note χ_A la fonction caractéristique associée : $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Montrer que l'application Φ, définie ci-dessous, est bijective :

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{F}(X, \{0, 1\}) \\ & & A & \mapsto & \chi_A \end{array}$$

Exercice 27

Les trois premières questions sont indépendantes de la dernière :

1. Déterminer une bijection entre $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}^*$.

2. En déduire une bijection entre $\{1/n, n \geq 1\}$ et $\{1/n, n \geq 2\}$.

3. En déduire une bijection entre $[0, 1]$ et $[0, 1[$.

4. Trouver une bijection entre $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$.