Feuille n^o 2 : Raisonnements, récurrence

Exercice 1

Donner les tables de vérité des fonctions propositionnelles suivantes et indiquer, le cas échéant, si ce sont des tautologies :

1. $\mathcal{P}$ ou non $\mathcal{P}$ (principe du tiers exclu) ;
2. non $(\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}) \Leftrightarrow ((\text{non } \mathcal{P})$ et $(\text{non } \mathcal{Q}))$;
3. $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\text{non } (\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q})$;
4. $((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})) \Rightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R})$ (transitivité de la relation d'implication) ;
5. $(\text{non } \mathcal{P} \Rightarrow \text{non } \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$.

Exercice 2

Soient P et Q deux propositions.
Parmi les propositions suivantes, quelle est la négation de $P \Longrightarrow Q$? Justifier à l'aide d'une table de vérité.

1. P ou $(\text{non}\, Q)$
2. $(\text{non}\, Q) \Longrightarrow (\text{non}\, P)$
3. P et $(\text{non}\, Q)$

Exercice 3

1. L'affirmation « je suis arrivé à la gare avant 10h » est-elle une condition nécessaire (suffisante, nécessaire et suffisante) pour « je suis monté dans le train de 9h30 » ?
2. Donner une condition suffisante et non nécessaire pour qu'un nombre entier soit strictement plus grand que 10.
3. Donner une condition nécessaire et non suffisante pour qu'un nombre entier soit divisible par 6.

Exercice 4

Considérons l'affirmation suivante : « f croissante $\Longrightarrow f(3) \geq f(2)$ ». À quelle affirmation parmi les suivantes correspond sa contraposée ?

1. « $f(3) \geq f(2) \Longrightarrow f$ croissante » ;
2. « $f(3) < f(2) \Longrightarrow f$ n'est pas croissante » ;
3. « f n'est pas croissante $\Longrightarrow f(3) < f(2)$ ».

Exercice 5

Traduire la formule suivante en une phrase (en français) qui ne comportera pas de symboles mathématiques.

$$\forall n \in \mathbf{N}\,, \forall n' \in \mathbf{N}\,, (n \neq 0 \text{ et } n' \neq 0) \Rightarrow \exists y \in \mathbf{N}, \exists q \in \mathbf{N}, \exists q' \in \mathbf{N}\,, (y = q\,n \text{ et } y = q'\,n' \text{ et } y \neq 0).$$

Exercice 6

Nier l'assertion : « tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans ».

Exercice 7

On considère les formules suivantes :

$$\exists n \in \mathbf{N},\ \forall p \in \mathbf{N}, \quad p \leq n\,;$$
$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists p \in \mathbf{N}, \quad p \leq n\,;$$
$$\exists x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R}, \quad x + y > 0\,;$$
$$\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R}, \quad x + y > 0\,;$$

$$\exists x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R}, \quad x+y>0\,;$$
$$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R}, \quad x+y>0\,;$$
$$\exists x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R}, \quad y^2>x.$$

1. Écrire la négation de chacune de ces formules.

2. Pour chacune de ces formules, indiquer (en le justifiant) si l'assertion considérée est vraie ou fausse.

Exercice 8

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On considère les énoncés suivants :

1. Pour tout réel x, $f(x)$ est supérieur à 1.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe un réel positif x tel que $f(x)$ est positif.
5. L'application f est paire.
6. Il existe un réel x tel que pour tout réel y strictement supérieur à x, $f(x)$ est strictement supérieur à $f(y)$.

1. Traduire ces énoncés en formules mathématiques qui utilisent des quantificateurs.

2. Pour chacune des formules obtenues, écrire sa négation.

3. Pour chacun de ces énoncés, donner au moins deux exemples d'applications f qui le vérifient, et au moins deux exemples d'applications f qui ne le vérifient pas.

Exercice 9

Écrire la négation de la proposition suivante, puis traduire son sens mathématique avec une phrase.

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x+2k\pi)=\sin(x).$$

Exercice 10

1. Donner la définition d'une fonction constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à l'aide des quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

2. On se donne f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tous réels x, y, z on ait

$$f(x)=f(y) \text{ ou } f(x)=f(z).$$

Démontrer que la fonction f est constante.

Exercice 11

Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Traduire en langage courant les assertions suivantes. Pour chacune d'elles, trouver, si l'on peut, une fonction qui satisfait cette propriété, ainsi qu'une fonction qui ne la satisfait pas.

1. $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\ f(x)<f(y)$

2. $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists T \in \mathbf{R}^*,\ f(x)=f(x+T)$

3. $\exists T \in \mathbf{R}^*,\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x)=f(x+T)$

4. $\exists x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ y=f(x)$

Exercice 12

1. Que pensez-vous du raisonnement suivant : « Démontrons l'énoncé suivant : pour tout entier naturel n, n^3-n est multiple de 3. Soit n un entier naturel. Par exemple $n=4$. On a alors $n^3-n=4^3-4=4\,(4^2-1)=4.15=4.3.5$ qui est bien multiple de 3. La proposition est donc démontrée ».

2. Que pensez-vous du raisonnement suivant : « Démontrons l'énoncé suivant : il existe un entier naturel n tel que n^2-n n'est pas multiple de 3. Si $n=2$, on a $n^2-n=4-2=2$ qui n'est pas multiple de 3. La proposition est donc démontrée ».

Exercice 13

Démontrer par contraposition l'énoncé suivant : si n un entier naturel dont le carré est pair, alors n est pair.

Exercice 14

Démontrer par contraposition la proposition suivante : $\forall x \in \mathbf{R},\ x^3 = 2 \Rightarrow x < 2$.

Exercice 15

Démontrer par l'absurde l'énoncé suivant : soit x un réel positif tel que, pour tout réel $y > 0$, on a $x \leq y$. Alors $x = 0$.

Exercice 16

Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre entier.

Exercice 17

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $2^n < n! \Rightarrow 2^{n+1} < (n+1)!$.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 5$, on a $2^n < n!$.
3. Déterminer un entier A tel que, pour tout entier $n \geq A$, on ait $3^n < n!$.

Exercice 18

Démontrer par récurrence la formule suivante : $\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$.

Exercice 19

1. Montrer que, pour tout entier n, $4^n + 5$ est un multiple de 3.
2. Montrer que, pour tout entier n, si $10^n + 7$ est multiple de 9, alors $10^{n+1} + 7$ l'est aussi. Que peut-on en déduire ?

Exercice 20

On souhaite démontrer, par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout réel $x > 0$, on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

1. La récurrence porte-t-elle sur le paramètre n ? Sur le paramètre x ? Sur les deux ?
2. Formuler l'hypothèse de récurrence.
3. Vérifier que pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$, on a $(1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2$.
4. Rédiger la démonstration.

Exercice 21

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
2. Soit n un entier naturel impair. Que vaut la somme $1 + 3 + 5 + \cdots + n$?
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 22

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que l'on ait, pour tout nombre réel $x > 0$, $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Exercice 23

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Démontrer que, pour tout entier n, on a $u_n \geq n^2$.
2. On définit une suite (v_n) en posant, pour tout entier n, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Pour tout entier n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Puis, exprimer, pour tout entier n, v_n en fonction de n.
3. Pour tout entier n, calculer u_n en fonction de n.

Exercice 24

Lire attentivement la démonstration par récurrence de l'affirmation suivante : « tous les crayons de couleur d'une même boîte B sont de la même couleur ». Soit B une boîte de crayons de couleurs. Si cette boîte contient un crayon, alors l'énoncé est vrai. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que le résultat soit vrai pour toute boîte B de n crayons. Soit maintenant B de $n+1$ crayons, en en retirant un, on obtient une boîte B' ayant n crayons. Par hypothèse de récurrence, ils sont tous les n de la même couleur c. Remettons le crayon retiré à nouveau dans B. Si l'on en retire un autre, on obtient une nouvelle boîte B'', dont tous les crayons ont même couleur d. Comme des crayons appartiennent à la fois à B' et B'', tous les crayons de B possèdent la même couleur $c = d$. Que pensez-vous de cette démonstration ?

Exercice 25

Soit a un réel. On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison a ; pour tout entier naturel n, on pose $U_n = u_0 + \cdots + u_n$. On suppose que $a \neq 1$; montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = u_0 \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. Que vaut (U_n) dans le cas où $a = 1$?

Exercice 26

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

1. Soit a un nombre réel et (v_n) la suite définie par : pour tout entier $n \geq 0$, $v_n = u_n + a$. Déterminer une valeur de a telle que la suite (v_n) soit une suite géométrique.
2. En déduire, pour tout entier $n \geq 0$, une formule simple pour v_n en fonction de n puis une formule simple pour u_n en fonction de n.
3. Soient α et β des réels et (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$. Déduire des questions précédente une *méthode générale* pour calculer, pour tout entier n, la valeur de u_n en fonction de u_0, α, et β.

Exercice 27

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout entier naturel n, la formule de récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.
2. Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété « $u_n = 1 + 2^n$ ». Montrer en adaptant le raisonnement par récurrence que pour tout entier n, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exercice 28

1. Soient n et m des entiers strictement positifs et soit $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ une famille de $n \times m$ nombres réels. Montrer par récurrence sur n :
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$
2. Soit n un entier strictement positif et $(b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq i}}$ une famille de nombres réels. Déduire de ce qui précède :
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} b_{ij}.$$
Indication : pour appliquer le résultat précédent, on pourra compléter la famille par des zéros.
3. Pour tout entier strictement positif n, calculer
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{n-j+1}.$$