UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et arithmétique 1

Feuille n°1 : introduction à la démonstration

Exercice 1

Que pensez-vous des démonstrations suivantes ?

1. **Énoncé**
   Soit un triangle ABC tel $AB = 10$, $BC = 5$ et $AC = 5\sqrt{5}$. Ce triangle est-il rectangle ?

   Démonstration
   AC est le plus grand côté.
   Supposons que le triangle soit rectangle, on aura $AC^2 = BC^2 + AB^2$.
   $(5\sqrt{5})^2 = 100 + 25$.
   $125 = 125$.
   Comme cette dernière égalité est vraie, le triangle est rectangle en B.

2. **Énoncé**
   Un triangle ayant des côtés de longueur 5, 10 et 11 est-il rectangle ?

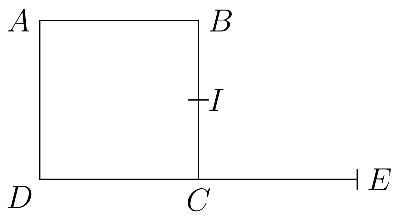
   Démonstration
   Soit ABC un triangle tel que $AB = 10$, $BC = 5$ et $AC = 11$. Supposons que ce triangle soit rectangle. Comme $[AC]$ est le plus grand côté, $[AC]$ serait l'hypoténuse. On aurait donc :
   $AC^2 = BC^2 + AB^2$,
   $11^2 = 5^2 + 10^2$,
   $121 = 25 + 100 = 125$.
   On obtient une contradiction ; le triangle n'est donc pas rectangle.

Exercice 2

Trouver l'erreur dans la copie de Claire.

- **Énoncé :** *$ABCD$ est un carré. I est le milieu de $[BC]$ et E le symétrique de D par rapport à C. Montrer que I est le milieu de $[AE]$.*

- **Copie de Claire :**



$ABCD$ est un carré, alors $[AD]$ est parallèle à $[BC]$. On sait que E est le symétrique de D par rapport à C, donc C est le milieu de $[DE]$. Dans le triangle ADE, la droite (CI) est parallèle à un côté $[AD]$ et elle passe par le milieu d'un autre côté $[DE]$, donc elle coupe le troisième côté $[AE]$ en son milieu. Donc I est le milieu de $[AE]$.

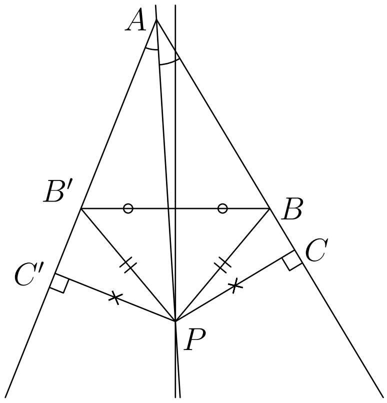
Exercice 3

Nous utiliserons les résultats suivants :

- Résultat 1 : Les points de la médiatrice d'un segment $[BB']$ sont équidistants de B et B'.
- Résultat 2 : Les points de la bissectrice d'un angle $\widehat{BAB'}$ sont équidistants des deux droites (AB) et (AB'). De plus, si P est un point de cette bissectrice, les points C et C' des droites (AB) et (AB') mesurant cette distance sont équidistants de A.

- Résultat 3 : Supposons donnés deux triangles DEF et $D'E'F'$ rectangles en E et E' respectivement et tels que $DE = D'E'$, $DF = D'F'$. Alors ces triangles sont isométriques. En particulier, $EF = E'F'$.

Soit ABB' un triangle. Comme sur le dessin, traçons la médiatrice du côté $[BB']$, ainsi que la bissectrice de l'angle en A. Notons P leur point d'intersection.



1. À l'aide des résultats 1 et 2, trouver les longueurs basées en P qui nous permettront de continuer le raisonnement, les points C et C' étant choisis tels que les angles indiqués soient perpendiculaires.

2. À l'aide de la question précédente et du résultat 3, montrer que $BC = B'C'$.

3. Tous les résultats obtenus sont notés sur le dessin.
Maintenant, d'après la seconde partie du résultat 2, on a aussi que les longueurs AC et AC' sont égales. Mais, on voit qu'avec $AC = AC'$ et $BC = B'C'$, il est nécessaire qu'on ait $AB = AB'$, les longueurs s'additionnant. Le triangle est donc isocèle en A.
Quel théorème, ce texte prétend-il prouver ? Détecter la faute présente dans le paragraphe de conclusion. Est-ce la seule ?

Exercice 4

Théorème : L'ensemble des nombres premiers est infini.

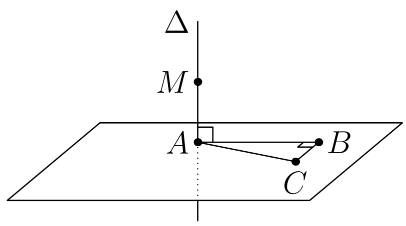
Voici une démonstration incomplète de ce théorème. L'exercice consiste à remplacer les _____ par des expressions convenables.

Plusieurs choix sont possibles. Éventuellement un ____ peut ne contenir aucun mot !

Raisonnons ___________ et supposons qu'il n'y ait qu'un nombre fini de nombres premiers, soit $p_1, \dots, p_r$. ___________ l'entier $n = p_1 \dots p_r + 1$; on a $n > 1$. Soit p un diviseur _______ de n. Par hypothèse, p est l'un des p_i. Par suite, p _____ $n - p_1 \dots p_r = 1$, ce qui est _______.

Exercice 5

Dans l'espace, on considère un triangle ABC rectangle en B et Δ la droite perpendiculaire au plan (ABC) et passant par A. Soit M un point de la droite Δ distinct de A.
Démontrer que les droites (BM) et (BC) sont perpendiculaires.



Voici une démonstration incomplète de cet exercice. Il manque des « expressions de liaison » : comme, en effet, car, si, or, par conséquent, d'où...

L'exercice consiste à remplacer les _____ par des expressions convenables. On essaiera de ne pas utiliser la même expression plusieurs fois.

Plusieurs choix sont possibles. Ěventuellement un ____ peut ne contenir aucun mot !

La droite (AM) est orthogonale à (BC) __________ une droite perpendiculaire à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
______________ le triangle ABC est rectangle en B, _________ la droite (BC) est perpendiculaire à (AB).
____________ la droite (BC) est orthogonale aux droites (AM) et (AB). Les droites (AM) et (AB) sont sécantes.
Or, pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, ______________ qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. ________________ (BC) est perpendiculaire au plan (ABM) et ________ (BC) est perpendiculaire à la droite (BM) __________ (BM) est contenue dans le plan (ABM).

Exercice 6

Voici une démonstration de première année d'université :
Supposons que f soit strictement croissante et surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit a un élément de $\mathbb{R}$. Pour montrer que f est continue en a, considérons $\varepsilon > 0$ et montrons qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Comme f est surjective, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) = f(a) - \varepsilon$. De même, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = f(a) + \varepsilon$.
Posons $\eta = \inf(a - b, c - a)$. Comme f est strictement croissante, $b < a < c$; donc $\eta > 0$. Si $|x - a| < \eta$, alors $b < x < c$. Comme f est strictement croissante, $f(b) < f(x) < f(c)$. Donc $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. On a bien montré que f est continue en tout point a de $\mathbb{R}$.

1. Énoncez le résultat ici démontré.
2. Énoncez une définition et un théorème utilisés dans cette démonstration.

Exercice 7

Maman dit à Nicolas : « Si tu ne ranges pas ta chambre, tu n'auras pas de chocolat ». Nicolas range sa chambre, mais Maman ne lui donne pas de chocolat. Pourquoi ?

Exercice 8

Le professeur de géométrie demande de démontrer que les médiatrices d'un triangle ABC passent toutes par un unique point. Euclide a écrit dans sa copie :

Notons O le point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de celle de $[BC]$. On a donc $OA = OB$ et $OB = OC$. Il en découle que $OA = OC$, donc O appartient à la médiatrice de $[AC]$. Ainsi, les trois médiatrices passent par le point O.

1. Qu'est-ce qu'une médiatrice ? Que se passe-t-il lorsque le triangle est aplati ?
2. La première phrase d'Euclide est-elle une simple notation, ou contient-elle une affirmation mathématique ?
3. Dans la deuxième phrase d'Euclide, pourquoi a-t-il écrit *donc* ?
4. Dans la troisième phrase d'Euclide, pourquoi a-t-il écrit *donc* ?
5. La phrase de conclusion est-elle correcte ? Cette démonstration répond-elle complètement à la question ?

Exercice 9

On considère quatre propositions A, B, C et D dont on ignore les valeurs de vérité. On suppose que les quatre propositions suivantes sont vraies :

P_1**:** $C \Longrightarrow [(\text{non}\, A) \text{ et } (\text{non}\, B)]$
P_2**:** $(\text{non}\, D) \Longrightarrow (\text{non}\, C)$
P_3**:** $D \Longleftrightarrow B$
P_4**:** $\text{non}[A \text{ et } (\text{non}\, B) \text{ et } (\text{non}\, C) \text{ et } (\text{non}\, D)]$.

On suppose A vraie. Quelles sont les valeurs de vérité de B, C et D ? Donner toutes les solutions possibles.

Exercice 10

Fernand est un étudiant qui doit se rendre journellement à l'université. On considère les propositions suivantes :

(P_1) Si Fernand a une voiture, soit il n'aime pas prendre l'autobus, soit il habite loin d'une ligne de bus.
(P_2) S'il n'a pas de bicyclette, alors il a nécessairement une voiture.
(P_3) S'il craint la marche à pied et s'il habite loin d'une ligne de bus, alors il a une bicyclette.
(P_4) S'il n'a pas de bicyclette, alors il craint la marche à pied.
(P_5) S'il n'aime pas prendre l'autobus, alors il habite loin d'une ligne de bus.

1. Formaliser la proposition P_2, puis les propositions P_1, (non P_2), P_3, P_4 et P_5 en utilisant les notations suivantes :
   V: « Fernand a une voiture. »
   B: « Fernand a une bicyclette. »
   A: « Fernand aime prendre l'autobus. »
   P: « Fernand craint la marche à pied. »
   L: « Fernand habite loin d'une ligne de bus. »
   On suppose que les propositions (non P_2), P_3, P_4 et P_5 sont vraies.
2. Que peut-on en déduire pour la proposition P_1 ? Fernand a-t-il une voiture ?
3. Montrer que Fernand n'habite pas loin d'une ligne de bus.
4. Fernand aime-t-il prendre l'autobus ?
5. Donner alors les valeurs de vérité des propositions V, B, A, P et L et vérifier que les propositions (non P_2), P_3, P_4 et P_5 sont vraies.

Exercice 11

La démonstration suivante est-elle correcte ?
Soit x est un élément de $\mathbb{R}$, montrer que, si $|x| + 2x = 3$, alors $x > 0$.
Démonstration :
Soit x un élément de $\mathbb{R}$. Supposons que $|x| + 2x = 3$.
La présence d'une valeur absolue nous conduit à examiner deux cas :

- *1er cas : $x \geqslant 0$ Dans ce cas $|x| = x$. L'égalité ci-dessus devient $3x = 3$. On en déduit que $x = 1$ et donc x est bien strictement positif.*
- *$2^{\text{ème}}$ cas : $x < 0$ Dans ce cas $|x| = -x$. L'égalité devient alors $x = 3$. Donc x est bien strictement positif.*

Ainsi dans tous les cas x est strictement positif.

Exercice 12

Dans la démonstration fausse suivante, sur quelle ligne est l'erreur ?

1 Soient a et b deux nombres réels, que l'on suppose égaux.
2
3 On a $a = b$.
4 En multipliant par a, on en déduit $a^2 = ab$,
5 donc $a^2 - b^2 = ab - b^2$,

donc, en factorisant à l'aide de l'identité remarquable $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, on en déduit $(a+b)(a-b) = b(a-b)$, donc, en simplifiant, $a+b=b$, donc $a=0$.

Ceci étant vrai pour tout couple de nombre réels égaux, on en déduit que tout nombre réel est nul.

Exercice 13

En utilisant une table de vérité, démontrer que les formules logiques suivantes sont toujours vraies.

1. $A \text{ ou non } A$
2. $\text{non non } A \iff A$
3. $A \text{ ou } B \iff B \text{ ou } A$
4. $\text{non}(A \text{ et } B) \iff (\text{non } A \text{ ou non } B))$
5. $(A \Longleftrightarrow B) \iff (A \Longrightarrow B) \text{ et } (B \Longrightarrow B)$.

Exercice 14

1. En utilisant une table de vérité, montrer l'équivalence de
$$A \Longleftrightarrow B \qquad \text{et} \qquad (A \text{ et } B) \text{ ou } (\text{non } A \text{ et non } B).$$
2. En déduire que $A \Longleftrightarrow B$ est équivalent à $\text{non } A \Longleftrightarrow \text{non } B$.
3. En utilisant une table de vérité, montrer l'équivalence de
$$A \Longrightarrow B \qquad \text{et} \qquad \text{non } A \text{ ou } B.$$
4. En déduire que $A \Longrightarrow B$ est équivalent à $\text{non } B \Longrightarrow \text{non } A$.
5. Montrer que $\text{non}(A \Longrightarrow B)$ est équivalent à $A \text{ et non } B$.

Exercice 15

En procédant par double implication, montrer que
$$A \text{ ou } (A \text{ et } B) \iff A \qquad \text{et} \qquad A \text{ et } (A \text{ ou } B) \iff A.$$