UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et arithmétique 1

Partiel du 14 novembre 2016

Durée du partiel : 2h

Les documents (notes de cours, livres, etc) sont interdits. Les calculatrices sont interdites. Les appareils communicants (téléphones, etc) sont interdits.

Toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration justifiant la réponse.

Exercice 1

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soit A un sous-ensemble de F. Montrer que

$$f^{-1}(C_F(A)) = C_E(f^{-1}(A))$$

(où $C_X(Y)$, qui peut aussi être noté $X \setminus Y$, est le complémentaire de l'ensemble Y dans l'ensemble X).

Exercice 2

On définit une suite réelle par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n + \frac{5}{2}n + 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4\left(-\frac{3}{2}\right)^n + n$. L'hypothèse de récurrence devra être clairement énoncée.

Exercice 3

Soit E un ensemble et A une partie de E. Soit l'application $\chi_A : E \to \{0,1\}$ définie par :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

1. Dans cette question uniquement, on pose $E = \{1,2,3,4\}$ et $A = \{1,2\}$. Explicitez χ_A.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur E et A pour que χ_A soit injective.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur E et A pour que χ_A soit surjective.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur E et A pour que χ_A soit bijective.
5. Démontrez que pour tous sous-ensembles A et B de E on a :

$$\forall x \in E \qquad \chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x) \quad \text{et} \quad \chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x).$$

Justifiez toutes vos réponses.

Exercice 4

Soit E un ensemble, $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{Q}(x)$ deux propositions dépendant de $x \in E$. Soit $\mathcal{R}_1$ la proposition

$$(\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ et } (\exists x \in E, \mathcal{Q}(x))$$

Soit $\mathcal{R}_2$ la proposition

$$\exists x \in E, (\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x))$$

Soit $\mathcal{S}_1$ la proposition

$$(\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, \mathcal{Q}(x))$$

Soit $\mathcal{S}_2$ la proposition

$$\forall x \in E, (\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x))$$

Pour chacune des questions 1. à 4., répondre « oui » entraîne que vous devez produire une démonstration ; répondre « non » entraîne que vous devez produire un contre-exemple *explicite*.

1. A-t-on nécessairement $\mathcal{R}_1 \Rightarrow \mathcal{R}_2$?
2. A-t-on nécessairement $\mathcal{R}_2 \Rightarrow \mathcal{R}_1$?
3. A-t-on nécessairement $\mathcal{S}_1 \Rightarrow \mathcal{S}_2$?
4. A-t-on nécessairement $\mathcal{S}_2 \Rightarrow \mathcal{S}_1$?

Exercice 5

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble fini E.

1. Montrer que $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ et $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ où, dans les deux cas, les deux parties de la réunion sont disjointes.
2. En déduire que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (où $|X|$, qui peut aussi être noté $\mathrm{Card}(X)$, est le cardinal d'un ensemble fini X).
3. Montrer que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$