UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et arithmétique 1

Corrigé du partiel

Exercice 1

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soit A un sous-ensemble de F. Montrer que
$$f^{-1}(C_F(A)) = C_E(f^{-1}(A))$$
(où $C_X(Y)$, qui peut aussi être noté $X \setminus Y$, est le complémentaire de l'ensemble Y dans l'ensemble X).

Soit $x \in E$. On a :
$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(F \setminus A) &\iff f(x) \in F \setminus A && \text{par définition de } f^{-1}(F \setminus A)\\
&\iff f(x) \notin A && \text{par définition de } F \setminus A\\
&\iff x \notin f^{-1}(A) && \text{par définition de } f^{-1}(A)\\
&\iff x \in E \setminus f^{-1}(A) && \text{par définition de } E \setminus f^{-1}(A).
\end{aligned}$$
On a donc :
$$f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A).$$

Exercice 2

On définit une suite réelle par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n + \frac{5}{2}n + 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4\left(-\frac{3}{2}\right)^n + n$. L'hypothèse de récurrence devra être clairement énoncée.

Montrons par récurrence que la propriété
$$\mathcal{P}(n): \quad u_n = 4\left(-\frac{3}{2}\right)^n + n$$
est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

Comme $u_0 = 4$ et $4\left(-\frac{3}{2}\right)^0 + 0 = 4 \times 1 + 0 = 4$, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 0$. On a alors :
$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= -\frac{3}{2}u_n + \frac{5}{2}n + 1 && \text{par définition}\\
&= -\frac{3}{2}\left(4\left(-\frac{3}{2}\right)^n + n\right) + \frac{5}{2}n + 1 && \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= 4\left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}n + 1\\
&= 4\left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1} + n + 1,
\end{aligned}$$
donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc démontré :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 4\left(-\frac{3}{2}\right)^n + n.$$

Exercice 3

Soit E un ensemble et A une partie de E. Soit l'application $\chi_A : E \to \{0,1\}$ définie par :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Question 1

Dans cette question uniquement, on pose $E = \{1,2,3,4\}$ et $A = \{1,2\}$. Explicitez χ_A.

Si $E = \{1,2,3,4\}$ et $A = \{1,2\}$, alors χ_A est l'application de $E = \{1,2,3,4\}$ dans $\{0,1\}$ donnée par :

$$\chi_A(1) = 1 \quad \chi_A(2) = 1 \quad \chi_A(3) = 0 \quad \chi_A(4) = 0.$$

Question 2

Donner une condition nécessaire et suffisante sur E et A pour que χ_A soit injective.

Si χ_A est injective, alors ses restrictions $\chi_A|_A$ et $\chi_A|_{E\setminus A}$ le sont aussi. Or, ce sont des applications constantes, par définition de χ_A. On a donc

$$|A| = |\chi_A(A)| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad |E \setminus A| = |\chi_A(E \setminus A)| \leqslant 1.$$

Réciproquement, supposons que $|A| \leqslant 1$ et $|E \setminus A| \leqslant 1$. Montrons que χ_A est injective. Soient $x, y \in E$ tels que $\chi_A(x) = \chi_A(y)$.

- Si $\chi_A(x) = \chi_A(y) = 0$, alors $x, y \in E \setminus A$ par définition de χ_A, or $E \setminus A$ est vide ou est un singleton, donc c'est le singleton $\{x\}$ et $y \in \{x\}$, donc $y = x$.
- Si $\chi_A(x) = \chi_A(y) = 1$, alors $x, y \in A$ par définition de χ_A, or A est vide ou est un singleton, donc c'est le singleton $\{x\}$ et $y \in \{x\}$, donc $y = x$.

L'application χ_A est donc injective si et seulement si A et $E \setminus A$ sont tous les deux vides ou réduits à un singleton.

Question 3

Donner une condition nécessaire et suffisante sur E et A pour que χ_A soit surjective.

Par définition de χ_A, on a $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$ et $E \setminus A = \chi_A^{-1}(\{0\})$. Si χ_A est surjective, les ensembles A et $E \setminus A$ sont donc non vides.

Réciproquement, si A et $E \setminus A$ sont non vides, alors :

- il existe un $x \in A$, et on a alors $\chi_A(x) = 1$;
- il existe un $y \in E \setminus A$, et on a alors $\chi_A(x) = 0$.

L'application χ_A est donc surjective.

On a donc montré que l'application χ_A est surjective si et seulement si A et $E \setminus A$ sont non vides.

Question 4

Donner une condition nécessaire et suffisante sur E et A pour que χ_A soit bijective.

L'application χ_A est bijective si et seulement si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si et seulement si :

- les ensembles A et $E \setminus A$ sont vides ou des singletons (pour l'injectivité, cf. question 2)
- et les ensembles A et $E \setminus A$ sont non vides (pour la surjectivité, cf. question 3),

c'est-à-dire si et seulement si les ensembles A et $E \setminus A$ sont tous les deux des singletons.

Comme $|E| = |A| + |E \setminus A|$ (car E est réunion disjointe de A et $E \setminus A$), on en déduit finalement que χ_A est bijective si et seulement si $|E| = 2$ et $|A| = 1$.

Question 5

Démontrez que pour tous sous-ensembles A et B de E on a :

$$\forall x \in E \qquad \chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x) \quad \text{et} \quad \chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x).$$

Justifiez toutes vos réponses.

Soient A et B deux parties de E.

Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned}
\chi_A(x)\chi_B(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases} \times \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B \\ 1 & \text{si } x \in B \end{cases} && \text{par définition de } \chi_A \text{ et } \chi_B \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ 1 & \text{si } x \in A \text{ et } x \in B \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \cap B \\ 1 & \text{si } x \in A \cap B \end{cases} && \text{par définition de } A \cap B \\
&= \chi_{A\cap B}(x) && \text{par définition de } \chi_{A\cap B}.
\end{aligned}$$

Notons que si D est une partie de E, alors $\chi_{E\setminus D}(x) = 1 - \chi_D(x)$ pour tout $x \in E$, d'après les définitions de χ_D et $\chi_{E\setminus D}$. Comme $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$ d'après les règles de De Morgan, on obtient, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned}
\chi_{A\cup B}(x) &= 1 - \chi_{(E\setminus A)\cap(E\setminus B)}(x) \\
&= 1 - \chi_{E\setminus A}(x)\chi_{E\setminus B}(x) \\
&= 1 - (1 - \chi_A(x))(1 - \chi_B(x)) \\
&= \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x).
\end{aligned}$$

Exercice 4

Soit E un ensemble, $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{Q}(x)$ deux propositions dépendant de $x \in E$. Soit $\mathcal{R}_1$ la proposition

$$(\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ et } (\exists x \in E, \mathcal{Q}(x))$$

Soit $\mathcal{R}_2$ la proposition

$$\exists x \in E, (\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x))$$

Soit $\mathcal{S}_1$ la proposition

$$(\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, \mathcal{Q}(x))$$

Soit $\mathcal{S}_2$ la proposition

$$\forall x \in E, (\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x))$$

Pour chacune des questions 1 à 4, répondre « oui » entraîne que vous devez produire une démonstration ; répondre « non » entraîne que vous devez produire un contre-exemple *explicite*.

Question 1

A-t-on nécessairement $\mathcal{R}_1 \Rightarrow \mathcal{R}_2$?

Non. En effet, considérons le cas $E = \mathbb{N}$ et les propositions $\mathcal{P}(x)\colon\ x = 0$ et $\mathcal{Q}(x)\colon\ x = 1$. Alors $(\exists x \in \mathbb{N}\quad x = 0)$ est vraie et $(\exists x \in \mathbb{N}\quad x = 1)$ est vraie, donc $\mathcal{R}_1$ est vraie. En revanche, $\mathcal{R}_2$ est fausse car sinon il existerait un $x \in \mathbb{N}$ tel que $x = 0$ et $x = 1$, et on en déduirait $0 = 1$, qui est faux.

Question 2

A-t-on nécessairement $\mathcal{R}_2 \Rightarrow \mathcal{R}_1$?

Oui. En effet, supposons que $\mathcal{R}_2$ est vraie. Il existe alors un $z \in E$ tel que $\mathcal{P}(z)$ et $\mathcal{Q}(z)$. Comme on a $\mathcal{P}(z)$, on en déduit que $(\exists x \in E\quad \mathcal{P}(x))$ est vraie. De même, comme $\mathcal{Q}(z)$, la proposition $(\exists x \in E\quad \mathcal{Q}(x))$ est vraie. Donc $\mathcal{R}_1$ est vraie.

Question 3

A-t-on nécessairement $\mathcal{S}_1 \Rightarrow \mathcal{S}_2$?

Non. En effet, considérons à nouveau $E = \mathbb{N}$ et les propositions $\mathcal{P}(x)\colon\ x = 0$ et $\mathcal{Q}(x)\colon\ x = 1$. Comme $\mathcal{P}(2)$ est fausse, la proposition $(\forall x \in \mathbb{N}\quad \mathcal{P}(x))$ est fausse, donc $\mathcal{S}_1$ est vraie. En revanche, $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{Q}(0)$ est fausse, donc l'implication $(\mathcal{P}(0) \Rightarrow \mathcal{Q}(0))$ est fausse, donc $\mathcal{S}_2$ est fausse.

Question 4

A-t-on nécessairement $\mathcal{S}_2 \Rightarrow \mathcal{S}_1$?

Oui. En effet, supposons que $\mathcal{S}_2$ est vraie, et montrons que $\mathcal{S}_1$ est vraie. Pour cela, supposons aussi que $(\forall x \in E\quad \mathcal{P}(x))$ est vraie. Soit $x \in E$, on a alors $\mathcal{P}(x)$, et d'après $\mathcal{S}_2$ on a aussi $(\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x))$, donc on a $\mathcal{Q}(x)$, comme voulu.

Exercice 5

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble fini E.

Question 1

Montrer que $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ et $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ où, dans les deux cas, les deux parties de la réunion sont disjointes.

Comme $B \setminus A \subseteq B$ par définition, on a $A \cup (B \setminus A) \subseteq A \cup B$.

Soit $x \in A \cup B$.

- Si $x \in A$, alors $x \in A \cup (B \setminus A)$.
- Si $x \notin A$, alors $x \in B$, et donc $x \in B \setminus A$, donc $x \in A \cup (B \setminus A)$.

On a donc $A \cup B \subseteq A \cup (B \setminus A)$. Par double inclusion, on en déduit $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.

Soit $x \in A \cap (B \setminus A)$, alors $x \in A$ et $x \in B \setminus A$, donc $x \notin A$: contradiction. Donc $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, i.e. la réunion $A \cup (B \setminus A)$ est disjointe.

Comme $A \cap B \subseteq B$ et $B \setminus A \subseteq B$ par définition, on a $(A \cap B) \cup (B \setminus A) \subseteq B$.

Soit $x \in B$.

- Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$.
- Si $x \notin A$, alors $x \in B \setminus A$.

Donc $x \in (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. On a donc montré $B \subseteq (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, donc $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ par double inclusion.

Comme $A \cap B \subseteq A$, on a $(A \cap B) \cap (B \setminus A) \subseteq A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ donc $(A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$. La réunion $(A \cap B) \cup (B \setminus A)$ est donc disjointe.

Question 2

En déduire que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (où $|X|$, qui peut aussi être noté $\mathrm{Card}(X)$, est le cardinal d'un ensemble fini X).

D'après la question 1, les ensembles A et $B \setminus A$ forment une partition de $A \cup B$, donc on a $|A \cup B| = |A| + |B \setminus A|$. De même, $A \cap B$ et $B \setminus A$ forment une partition de B, donc $|B| = |A \cap B| + |B \setminus A|$. Par soustraction, on en déduit $|A \cup B| - |B| = |A| - |A \cap B|$, donc

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Question 3

Montrer que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

On a :

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| && \text{d'après la question 2} \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |(A \cup B) \cap C| && \text{à nouveau d'après la question 2.} \end{aligned}$$

Or, on a $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ par distributivité de l'intersection par rapport à la réunion (qui se déduit de la distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$). On trouve donc :

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &\qquad \text{encore d'après la question 2.} \end{aligned}$$