Proposition. *Soit $f\colon A \to B$ une application surjective. Si l'ensemble A est fini, alors l'ensemble B est fini et $|A| \geqslant |B|$.*

Démonstration. On démontre la proposition par récurrence sur $|A|$. Plus précisément, notons $\mathscr{P}(n)$, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété : « pour tout ensemble fini A de cardinal n et tout ensemble B, s'il existe une application surjective $f\colon A \to B$ alors l'ensemble B est fini et $|B| \leqslant n$ ».

Initialisation : Un ensemble de cardinal 0 est, par définition, en bijection avec l'ensemble vide, donc est vide. De plus, si $f\colon \varnothing \to B$ est surjective, alors $B = f(\varnothing) = \varnothing$, donc l'ensemble B est fini et $|B| = 0$. Donc la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soit A un ensemble fini de cardinal $n+1$, et soit B un ensemble tel qu'il existe une surjection $f\colon A \to B$.

Comme $|A| = n + 1 \geqslant 1$, l'ensemble A n'est pas vide. Soit $x \in A$, et soit $A' = A \setminus \{x\}$. Alors $\{x\}$ et A' forment une partition de A, et $|\{x\}| = 1$, donc $|A'| = |A| - 1 = n$.

L'application

$$f|_{A'}^{f(A')}\colon \left\{ \begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & f(A') \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array} \right.$$

est surjective par définition, donc, par l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$, l'ensemble $f(A')$ est fini et $\left|f(A')\right| \leqslant |A'| = n$.

Comme $A = A' \cup \{x\}$, on a $f(A) = f(A') \cup f(\{x\})$, or l'application f est surjective, donc $B = f(A') \cup \{f(x)\}$.

- Si $f(x) \in f(A')$, alors $B = f(A')$ est fini, et $|B| \leqslant n$.
- Si $f(x) \notin f(A')$, alors $f(A')$ et $\{f(x)\}$ forment une partition de B, donc l'ensemble B est fini et $|B| = |A'| + 1 \leqslant n + 1$.

Donc l'ensemble B est fini et $|B| \leqslant n + 1$. On a donc démontré la propriété $\mathscr{P}(n + 1)$.

Par récurrence, on en déduit que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, ce qui démontre la proposition. $\square$