UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et arithmétique 1

Examen (2e session)

Durée de l'examen : 2h

Les documents (notes de cours, livres, etc) sont interdits. Les calculatrices sont interdites. Les appareils communicants (téléphones, etc) sont interdits.

Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration justifiant la réponse.

Une rédaction soignée est attendue, l'évaluation en tiendra compte.

Exercice 1

Soient a et b des entiers strictement positifs, et d leur pgcd. On considère l'application $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ définie par $f(m,n) = am + bn$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$.

1. On suppose *dans cette question uniquement* que $a = 15$ et $b = 6$.
   a) Calculer $f(0,8)$ et $f(6,-7)$.
   b) L'application f est-elle injective ?
   c) L'application f est-elle surjective ?
2. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$. L'application f est-elle injective ?
3. Soit p un entier relatif.
   a) Montrer que si $p = d$ alors p possède un antécédent par f. En déduire que si d divise p alors p possède un antécédent par f.
   b) Montrer que si d ne divise pas p, alors p ne possède pas d'antécédent par f.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que l'application f soit surjective.

Exercice 2

Soient x et y deux entiers, et soit p un nombre premier.

1. Si m est un entier tel que $1 \leqslant m \leqslant p-1$, montrer que p divise $\binom{p}{m}$. (Indication : écrire $\binom{p}{m}$ à l'aide de factorielles.)
2. En utilisant la formule du binôme, montrer que $(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}$.
3. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Si $y \equiv 0 \pmod{p^n}$, montrer que $(x+y)^p \equiv x^p \pmod{p^{n+1}}$.
4. Supposons que $x \equiv y \pmod{p}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x^{p^n} \equiv y^{p^n} \pmod{p^{n+1}}.$$

   (Indication : on pourra raisonner par récurrence, et appliquer la question précédente aux entiers x^{p^n} et $y^{p^n} - x^{p^n}$.)

Exercice 3

Soient E et F deux ensembles finis. Notons p le cardinal de E et n le cardinal de F.

1 Combien y a-t-il d'applications de E dans F? Démontrez votre réponse (on pourra, si on le souhaite, se limiter au cas où l'ensemble E n'est pas vide).
2 Donner la définition d'une *partition de* E. (Il n'y a pas de démonstration à faire dans cette question.)
3 Quel est le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E ? Démontrez votre réponse.
4 Soit f une application de E dans F. Montrer que $|f(E)| \leqslant |E|$. (On a noté ici $|X|$ le cardinal de l'ensemble X.)

Exercice 4

Soit

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-1)^2. \end{cases}$$

On considère l'intervalle $I = [0\,;3]$.

1 Dessiner le graphe de f. Aucune justification n'est demandée, en particulier il n'est pas nécessaire de faire une étude de fonction.
2 Déterminer le sous-ensemble $f(I)$. (La réponse doit être soigneusement démontrée.)
3 Déterminer le sous-ensemble $f^{-1}(I)$. (La réponse doit être soigneusement démontrée.)

Exercice 5

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. La proposition suivante est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad (x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y))$$

(Indication : on pourra, si on le souhaite, réécrire la proposition sous une forme équivalente ne faisant pas intervenir le connecteur implication.)