UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et arithmétique 1

Examen (1e session)

Durée de l'examen : 2h

Les documents (notes de cours, livres, etc) sont interdits. Les calculatrices sont interdites. Les appareils communicants (téléphones, etc) sont interdits.

Toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration justifiant la réponse.

Une rédaction soignée est attendue, l'évaluation en tiendra compte.

Exercice 1

Soient E et F deux ensembles et $f\colon E \to F$ une application. Soit A un sous-ensemble de F. Montrer que

$$f^{-1}(C_F(A)) = C_E(f^{-1}(A))$$

(où $C_X(Y)$, qui peut aussi être noté $X \setminus Y$, est le complémentaire de l'ensemble Y dans l'ensemble X).

Exercice 2

1. Sachant que $12350 = 13 \times 950$, déterminer le reste de la division euclidienne de 12345 par 13.
2. Montrer que $8^4 \equiv 1 \pmod{13}$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de 12345^{12345} par 13.

Exercice 3

1 Pour quels entiers naturels n, la proposition $P(n)$ suivante est-elle vraie ?

$$P(n)\colon \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, (x \leqslant y \Longrightarrow n \leqslant y)$$

2 Pour quels entiers naturels n, la proposition $Q(n)$ suivante est-elle vraie ?

$$Q(n)\colon \forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, (x \leqslant y \Longrightarrow n \leqslant y)$$

Rappel : les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration.

Exercice 4

On considère l'application

$$f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (x,y) & \longmapsto & 15x - 8y. \end{array} \right.$$

1. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
2. L'application f est-elle injective ?
3. Trouver $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $f(x_0, y_0) = 1$.
4. Montrer que l'application f est surjective.

Exercice 5

Soit n un entier naturel non nul et soit x un réel.

1. Rappeler la formule du binôme et donner le coefficient devant x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$.
2. En utilisant la formule $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ et en calculant de deux façons le coefficient devant x^n, montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$
3. Montrer que, pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$, on a $m^2 \equiv m \pmod 2$.
4. En déduire que $\binom{2n}{n}$ est pair.
5. Soit X un ensemble fini de cardinal $2n$, soit a un élément de X, soit A l'ensemble des parties de X à n éléments contenant a, et soit B l'ensemble des parties de X à n éléments ne contenant pas a. Exhiber une bijection de A sur B, et retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 6

Soient E, F et G des ensembles et $f\colon E \to F$ une application.

1. Soit $h\colon F \to G$ une application. Montrer que si $h \circ f$ est injective alors f est injective. Montrer que si $h \circ f$ est surjective alors h est surjective.
2. On suppose dans cette question que l'ensemble E n'est pas vide. Montrer que f est injective si, et seulement si, il existe une application $g\colon F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
3. Montrer que f est surjective si, et seulement si, il existe une application $g\colon F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
4. On suppose que E n'est pas vide. En déduire qu'il existe une application injective de E dans F si, et seulement si, il existe une application surjective de F dans E.