UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et arithmétique 1

Corrigé du contrôle continu 3

Exercice 1

Un digicode est la donnée d'une suite de 5 chiffres compris entre 0 et 9.

Question 1

Combien y a-t-il de digicodes ?

C'est le cardinal de l'ensemble des applications de $\{0, 1, ..., 4\}$ dans $\{0, 1, ..., 9\}$, c'est-à-dire

$$10^5 = 100000.$$

Question 2

Combien y a-t-il de digicodes où aucun chiffre n'est répété ?

C'est le cardinal de l'ensemble des applications *injectives* de $\{0, 1, ..., 4\}$ dans $\{0, 1, ..., 9\}$, c'est-à-dire le nombre d'*arrangements*

$$\frac{10!}{5!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240.$$

Question 3

Combien y a-t-il de digicodes constitués d'une suite *strictement* croissante de chiffres ?

L'ensemble des suites strictement croissantes de cinq chiffres est en bjection avec l'ensemble des parties à cinq éléments de l'ensemble des chiffres. (La bijection est donnée dans un sens par l'ensemble des chiffres de la suite, et dans l'autre en rangeant par ordre croissant les chiffres contenus dans la partie.) Il y en a donc

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!^2} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2 \times 9 \times 2 \times 7 = 252.$$

Exercice 2

Si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Question 1

Montrer que pour tout entier naturel n on a $2^n \geqslant n+1$.

Première solution

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors l'ensemble vide $\emptyset$ et les singletons $\{x\}$ pour $x \in E$ sont $n+1$ éléments deux à deux distincts de $\mathcal{P}(E)$. Comme le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est 2^n, on en déduit $2^n \geqslant n+1$.

Seconde solution

Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathfrak{P}(n)\colon \quad 2^n \geqslant n+1$$

est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

La propriété $\mathfrak{P}(0)$ est $2^0 \geqslant 0+1$, c'est-à-dire $1 \geqslant 1$, qui est vraie.

Supposons que $\mathfrak{P}(n)$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 0$. On a alors $2^n \geqslant n+1$, donc

$$2^{n+1} \geqslant 2n+2 \geqslant n+2,$$

donc $\mathfrak{P}(n+1)$ est vraie.

Question 2

Soit E un ensemble fini. Déduire de la question précédente qu'il n'existe pas d'application surjective de E vers $\mathcal{P}(E)$.

S'il existait une application surjective de E sur $\mathcal{P}(E)$, alors on aurait $|E| \geqslant |\mathcal{P}(E)|$, c'est-à-dire $n \geqslant 2^n$ en notant $n = |E|$. D'après la question 1, c'est impossible.

Question 3

Soit E un ensemble. Construire une application injective de E vers $\mathcal{P}(E)$.

Montrons que l'application

$$\iota\colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ x & \longmapsto & \{x\} \end{array} \right.$$

est injective.

Soient $x, y \in E$ tels que $\iota(x) = \iota(y)$, alors $\{x\} = \{y\}$, donc $x = y$.

L'application $\iota\colon E \to \mathcal{P}(E)$ est donc injective.

Question 4

Soit E un ensemble et f une application de E vers $\mathcal{P}(E)$. Soit A l'ensemble des x de E tels que $x \notin f(x)$. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = A$. En considérant successivement les deux cas $x \in A$ et $x \notin A$, aboutir à une contradiction. Quel résultat vient-on de démontrer ?

Si $x \in A$, on aurait $x \in f(x)$ (puisque $f(x) = A$), donc $x \notin A$ par définition de A.

Si $x \notin A$, alors $x \notin f(x)$, donc $x \in A$ par définition de A.

Dans les deux cas, on arrive à une contradiction. Il n'existe donc pas de $x \in E$ tel que $f(x) = A$. En particulier f n'est pas surjective.

On a donc démontré qu'il n'existe pas d'application surjective de E sur $\mathcal{P}(E)$. (Contrairement à la réponse à la question 2, on n'a pas supposé ici que l'ensemble E est fini.)