UNIVERSITÉ DE RENNES 1

**Algèbre et arithmétique 1**

*Corrigé du contrôle continu 2*

## Exercice 1

Soit $E$ un ensemble. Soient $A$, $B$ et $C$ des parties de $E$. Montrer que :

$$(A \cap B \subset A \cap C \,\text{et}\, A \cup B \subset A \cup C) \Rightarrow B \subset C.$$

Supposons que $A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C$. Soit $x \in B$. On a alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cup C$, donc $x \in A$ ou $x \in C$.

- Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$, donc $x \in A \cap C$, donc $x \in C$.
- Si $x \in C$, on a directement $x \in C$.

Donc $x \in C$. On a donc montré $B \subset C$.

## Exercice 2

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles. Soient $f_1$, $f_2$ des applications de $E$ dans $F$ et $g$ une application de $F$ dans $G$. On suppose $g \circ f_1 = g \circ f_2$ et $g$ injective. Montrer que $f_1 = f_2$.

Soit $x \in E$. Comme $g \circ f_1 = g \circ f_2$, on a $g(f_1(x)) = g(f_2(x))$, or $g$ est injective, donc $f_1(x) = f_2(x)$. On a donc $f_1 = f_2$.

## Exercice 3

Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n+1} k 2^{k-1} = n 2^{n+1} + 1.$$

On énoncera précisément l'hypothèse de récurrence considérée.

Montrons, par récurrence sur l'entier $n \geqslant 0$, la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \qquad \sum_{k=1}^{n+1} k 2^{k-1} = n 2^{n+1} + 1.$$

*Initialisation* : La propriété $\mathcal{P}(0)$ est

$$\sum_{k=1}^{1} k 2^{k-1} = 1,$$

c'est-à-dire $1 = 1$, qui est vraie.

*Hérédité* : Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 0$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k2^{k-1} = n2^{n+1} + 1,$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+2} k2^{k-1} &= n2^{n+1} + 1 + (n+2)2^{n+1} \\ &= (2n+2)2^{n+1} + 1 \\ &= (n+1)2^{n+2} + 1,\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par récurrence, on en déduit que l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n+1} k2^{k-1} = n2^{n+1} + 1$$

est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.