UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et arithmétique 1

Corrigé du contrôle continu 1

Exercice 1

Soient P et Q deux propositions. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont équivalentes à la négation de $P \Longrightarrow Q$? Justifier à l'aide d'une table de vérité.

1. P ou (non Q)
2. (non Q) $\Longrightarrow$ (non P)
3. P et (non Q)

La table de vérité de ces propositions est :

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg(P \Longrightarrow Q)$	$P \vee \neg Q$	$\neg Q \Longrightarrow \neg P$	$P \wedge \neg Q$
F	F	V	V	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	V	V	F	V
V	V	F	F	F	V	V	F

Comme seule la colonne de $P \wedge \neg Q$ est identique à celle de $\neg(P \Longrightarrow Q)$, on en déduit que seule cette proposition (la troisième) est équivalente à la négation de $P \Longrightarrow Q$.

Exercice 2

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère la proposition :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

1. Expliquez par une phrase le sens de cette proposition par une phrase comportant le moins de symboles mathématiques possible.

Elle est équivalente (par définition) à « la fonction f est croissante ».

2. Donnez la négation de cette proposition.

La négation de cette proposition est :

$$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \leqslant y \text{ et } f(x) > f(y).$$

Exercice 3

Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x - y = 1.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = x - 1 \in \mathbb{R}$. On a alors $x - y = x - (x-1) = 1$.
Ceci démontre : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x - y = 1$.