UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des nombres

Interrogation 2

Durée : 1h
Les notes de cours et de TD sont autorisées. Les calculatrices et les téléphones sont interdits.

Exercice 1

1. Soit p un nombre premier. Montrer que s'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $p \mid (x^2 + 6y^2)$, alors :
   - si $p \mid y$, alors $p^2 \mid (x^2 + 6y^2)$;
   - si $p \nmid y$, alors -6 est un carré dans $\mathbb{F}_p$.
2. Montrer que -6 est un carré dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $p = 2$, $p = 3$ ou $p \equiv 1, 5, 7$ ou $11 \pmod{24}$.
3. Montrer que pour tout $p \in \{2, 3\}$, il existe des entiers $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x^2 + 6y^2 = 2p$.
4. On suppose désormais que p est un nombre premier qui vérifie $p \equiv 1, 5, 7$ ou $11 \pmod{24}$. Énoncer le théorème de Minkowski et montrer qu'il existe des entiers $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x^2 + 6y^2 \in \{p, 2p, 3p\}$.
5. Montrer que si $x^2+6y^2 = p$ alors $p \equiv 1$ ou $7 \pmod{24}$. (Indication : on pourra réduire modulo 3).
6. Montrer que si $x^2 + 6y^2 = 2p$ alors $p \equiv 5$ ou $11 \pmod{24}$.
7. Montrer que si $x^2 + 6y^2 = 3p$ alors $p \equiv 5$ ou $11 \pmod{24}$. (Indication : on pourra montrer que $x = 3a$ pour un certain $a \in \mathbb{Z}$, puis diviser par 3 et réduire modulo 3).
8. Montrer que si $x^2 + 6y^2 = 3p$ alors il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $3a^2 + 2b^2 = p$.
9. On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $3a^2 + 2b^2 = p$. Montrer qu'il existe $x', y' \in \mathbb{Z}$ tels que $x'^2 + 6y'^2 = 2p$.
10. En considérant un nombre premier p explicite tel que l'équation diophantienne $x^2 + 6y^2 = p$ n'ait pas de solution, montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ n'est pas factoriel.