

Durée : 1h

Les notes de cours et de TD sont autorisées.

### Exercice 1

---

On considère le corps de nombres  $K = \mathbb{Q}(3^{1/3})$ .

1. Montrer que  $1, 3^{1/3}, 3^{2/3}$  sont des éléments de l'anneau  $\mathcal{O}_K$  des entiers de  $K$ .
2. Calculer l'image de ces trois éléments par la trace  $\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}$  et la norme  $N_{K/\mathbb{Q}}$ .
3. Calculer le discriminant de la base  $(1, 3^{1/3}, 3^{2/3})$  de  $K$  sur  $\mathbb{Q}$ .
4. Montrer que si  $\frac{1}{3}(a + b3^{1/3} + c3^{2/3}) \in \mathcal{O}_K$ , avec  $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$ , alors  $a = 0$ . (On pourra considérer la trace du carré de cet élément de  $K$ ).
5. Sous les mêmes hypothèses, montrer que l'on a aussi  $b = c = 0$ . (On pourra considérer sa norme).
6. En déduire une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{O}_K$ .
7. Montrer que  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[3^{1/3}]$ .