
Documents et calculatrice sont autorisés. Les téléphones portables sont interdits.

Durée : 30 minutes

Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration.

Exercice 1

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que s'il existe $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $p \mid (x^2 + 5y^2)$, alors p divise x ou -5 est un carré dans \mathbb{F}_p .
2. Montrer que si $p \neq 5$ et si -5 est un carré modulo p , alors il existe un couple d'entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x^2 + 5y^2 \in \{p, 2p\}$.
3. Trouver un nombre premier p qui s'écrive sous la forme $p = x^2 + 5y^2$, avec x et y entiers, et tel que $2p$ ne peut pas s'écrire sous cette forme.
4. Trouver un nombre premier p tel qu'il existe des entiers x et y vérifiant $2p = x^2 + 5y^2$, et tel que p ne s'écrive pas sous cette forme.
5. (*Question bonus*) Montrer qu'il existe un couple $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x^2 + 5y^2 \in \{p, 2p\}$ si et seulement si $p = 5$ ou $p \equiv 1, 3, 7$ ou $9 \pmod{20}$.