



Algèbre et Arithmétique 1

Interrogation n°5 : mardi 23 novembre 2010

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.

Durée : 30 minutes

NOM :

PRÉNOM :

Exercice 1

1. Énoncer (sans démonstration) le théorème définissant la division euclidienne des entiers relatifs.

2. Démontrer que si a , b et c sont des entiers relatifs tels que $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$.

Exercice 2

Calculer (par un algorithme) le PGCD d de 91 et 399 et des entiers u et v tels que $91u + 399v = d$. (Le détail des calculs devra être indiqué).

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$ un entier. Montrer que $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$ ou $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Quel est le reste de la division euclidienne de $2^n - 1$ par 4 ?
(*Rappel : toutes les réponses doivent être démontrées.*)
3. Quels sont les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $2^n - 1$ est le carré d'un entier naturel ? (Indication : dans le cas où $n \geq 2$, on pourra utiliser les deux questions précédentes).