UNIVERSITÉ DE RENNES 1

**Algèbre et Arithmétique 1**

*Examen final (seconde session)*

---

*Documents, notes de cours ou de TD et téléphones portables, sont interdits. Les calculatrices sont autorisées. Justifiez toutes vos réponses.*

Durée : 2 heures

---

**Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. Aucun point ne sera accordé en cas de réponse non démontrée.**

## Exercice 1

1. Calculer $\overline{123}^{(6)} \times \overline{321}^{(6)}$, en travaillant uniquement en base six. (Le détail de la multiplication doit être indiqué).
2. Vérifier le résultat de la question précédente en convertissant les nombres en base dix. (Les calculs faits pour réaliser cette conversion doivent être indiqués).
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $10^{3k} \equiv (-1)^k \pmod 7$.
4. Soit $N = \overline{c_{3n+2}c_{3n+1}\dots c_2c_1c_0}^{(10)}$ un entier écrit en base dix. (On n'impose pas $c_{3n+2} \neq 0$). Montrer que $N$ est multiple de 7 si et seulement si la somme
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \overline{c_{3k+2}c_{3k+1}c_{3k}}^{(10)}$$
est un multiple de 7. (Indication : on pourra utiliser la question précédente).
5. En utilisant la propriété énoncée à la question précédente, montrer que 1058291808 est multiple de 7.

## Exercice 2

1. Trouver tous les couples d'entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $6x + 10y = 15$.
2. Même question pour l'équation $6x + 10y = 30$.

## Exercice 3

Mme Durand achète une nouvelle voiture. Pour cela, elle emprunte 15000€ à sa banque, à un taux d'intérêts de 0.5% par mois, sur deux ans, en remboursant la même somme chaque mois. Notons $u_n$ la somme encore due par Mme Durand au bout de $n$ mois. La suite $(u_n)$ vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n - b$, avec $a = 1.005$ et $b$ la somme remboursée chaque mois, et on a $u_0 = 15000$.

1. Montrer qu'il existe un réel $\alpha$ tel que la suite $(u_n - \alpha)$ soit une suite géométrique.
2. Donner et démontrer une formule exprimant $u_n$ en fonction de $n$, $a$, $b$ et $u_0$.
3. Quelle somme Mme Durand aura-t-elle versé à sa banque au bout des deux ans ?
4. Quelle serait cette somme pour un emprunt sur un an au lieu de deux ?
5. Quelle serait cette somme pour un emprunt sur trois ans ?

## Exercice 4

À l'aide d'une table de vérité, montrer que les formules logiques « $\mathcal{P}$ ou $(\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R})$ » et « $(\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q})$ et $(\mathcal{P}$ ou $\mathcal{R})$ » sont équivalentes.

## Exercice 5

Soient $0 \leqslant m \leqslant k \leqslant n$ des entiers naturels.

1. En exprimant les coefficients binomiaux à l'aide de factorielles, montrer que
$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$
2. Si $m > 0$, en utilisant l'identité $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, montrer que
$$m\binom{n}{k}\binom{k}{m} = n\binom{n-1}{k-1}\binom{k-1}{m-1}.$$
3. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrer à nouveau que
$$\forall m \in \{0, \dots, n\} \quad \forall k \in \{m, \dots, n\} \qquad \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$