AR1 Examen final 2^e session : corrigé

Exercice 1

1_

$$\overline{123}^{(6)} \times \overline{321}^{(6)} = \overline{44323}^{(6)}$$

$$\begin{array}{r} \overline{123}^{(6)} \\ \times \quad \overline{321}^{(6)} \\ \hline \overline{123}^{(6)} \\ \overline{250}\cdot \\ \overline{413}\cdot\cdot \\ \hline \overline{44323}^{(6)} \end{array}$$

2_

$\overline{123}^{(6)} = 3 + 6 \times (2 + 6 \times 1) = 51$

$\overline{321}^{(6)} = 1 + 6 \times (2 + 6 \times 3) = 121$

$\overline{44323}^{(6)} = 3 + 6 \times (2 + 6 \times (3 + 6 \times (4 + 6 \times 4)))$

$= 3 + 6 \times (2 + 6 \times 171)$

$= 3 + 6 \times 1028$

$= 6171$

$= 51 \times 121$, ce qui confirme la réponse donnée à la question 1.

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times \quad 51 \\ \hline 121 \\ 605\cdot \\ \hline 6171 \end{array}$$

3_

On a $10^{3k} = 1000^k$,

or $1001 = 7 \times 143$ donc $1000 \equiv -1 \pmod 7$,

donc $10^{3k} \equiv (-1)^k \pmod 7$.

4_

On a $N = \overline{c_{3n+2}\, c_{3n+1} \cdots c_2\, c_1\, c_0}^{(10)}$

$= \sum_{k=0}^{n} 10^{3k}\, \overline{c_{3k+2}\, c_{3k+1}\, c_{3k}}^{(10)}$

$\equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, \overline{c_{3k+2}\, c_{3k+1}\, c_{3k}}^{(10)} \pmod 7$ d'après la question 3,

donc $7 \mid N \iff 7 \mid \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, \overline{c_{3k+2}\, c_{3k+1}\, c_{3k}}^{(10)}$

5_ D'après la question 4_, on a :

$7 \mid 1058291808 \iff 7 \mid (808 - 291 + 58 - 1)$

$\iff 7 \mid 574$,

or $574 = 7 \times 82$,

donc 1058291808 est multiple de 7.

Exercice 2

1-

Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $6x + 10y = 15$,

on a $6x+10y = 2(3x+5y)$ donc $2 | 15$, ce qui est faux.

Il n'existe donc pas de couple d'entiers $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $6x + 10y = 15$.

2-

Si $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, on a
$$6x + 10y = 30 \iff 3x + 5y = 15$$
$$\iff 3x + 5(y-3) = 0$$
$$\iff 3x = -5(y-3).$$

Si $3x = -5(y-3)$, alors $5 | 3x$, or 5 est premier et $5 \nmid 3$,

donc $5 | x$ (par le lemme d'Euclide),

donc il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 5k$,

et on a $-5(y-3) = 3x = 15k$ donc $y = 3 - 3k$.

Réciproquement, si $k \in \mathbb{Z}$, alors $3(5k) = 15k = -5((3-3k)-3)$,

donc le couple $(x,y) = (5k, 3-3k) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie bien $3x = -5(y-3)$.

L'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de $6x + 10y = 30$

est donc $\{(5k, 3-3k) \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 3

1-

Comme $u_{n+1} = au_n - b$, on a $u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha) + a\alpha - b - \alpha$,

donc $u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$ si $(a-1)\alpha - b = 0$.

Comme $a = 1{,}005 \neq 1$, on peut poser $\alpha = \frac{b}{a-1} = \frac{b}{0{,}005}$,

et on a alors $u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$, donc la suite $(u_n - \alpha)$ est une suite géométrique de raison a.

2-

La suite $(u_n - \alpha)$, pour $\alpha = \frac{b}{a-1}$, étant une suite géométrique de raison a, d'après la question précédente,

on a $u_n - \alpha = a^n (u_0 - \alpha)$,

donc $u_n = \alpha + a^n(u_0 - \alpha)$

donc $u_n = a^n u_0 - b\,\frac{a^n - 1}{a-1}$

3-

Notons N la durée de l'emprunt, en mois.

L'emprunt étant remboursé au bout de N mois, on a $u_N = 0$,

donc $a^N u_0 - b \frac{a^N - 1}{a - 1} = 0$ d'après la question 2.,

donc $b = \frac{a-1}{a^N - 1} a^N u_0$.

La somme totale versée par Mme Durand est alors $Nb = \frac{a-1}{a^N-1} N a^N u_0$.

Ici, on a $\begin{cases} a = 1{,}005 \\ u_0 = 15\,000 \\ N = 24 \end{cases}$ donc $Nb \simeq 15955{,}42$ € (arrondi au cent supérieur).

4-

On a $N = 12$, donc $Nb \simeq 15\,491{,}96$ €.

5-

On a $N = 36$, donc $Nb \simeq 16\,427{,}85$ €.

Exercice 4

P	Q	R	Q et R	P ou (Q et R)	P ou Q	P ou R	(P ou Q) et (P ou R)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Les colonnes de la table correspondant à « P ou (Q et R) » et à « (P ou Q) et (P ou R) » étant identiques, ces deux formules logiques sont équivalentes.

Exercice 5

1 -

Comme $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$, on a

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{k!}{m!\,(k-m)!}$$

$$= \frac{n!}{m!\,(k-m)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,\frac{(n-m)!}{(k-m)!\,((n-m)-(k-m))!}$$

$$= \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m} .$$

2 -

Notons que comme $m > 0$ et $0 \leq m \leq k \leq n$, on a $1 \leq m \leq k \leq n$.

On a alors : $m\binom{n}{k}\binom{k}{m} = k\binom{n}{k}\binom{k-1}{m-1}$ car $m\binom{k}{m} = k\binom{k-1}{m-1}$

$= n\binom{n-1}{k-1}\binom{k-1}{m-1}$ car $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

3 -

Montrons par récurrence sur n que la proposition

$(\mathcal{P}(n))$ $\quad \forall m \in \{0,\dots,n\} \quad \forall k \in \{m,\dots,n\} \quad \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, il s'agit de montrer que $\binom{0}{0}\binom{0}{0} = \binom{0}{0}\binom{0-0}{0-0}$
  Comme $\binom{0}{0} = 1$, c'est immédiat.
- Supposons que $\mathcal{P}(\cancel{n})$ est vraie pour un certain entier $n \geq 1$.
  Soit $m \in \{0,\dots,n\}$ et soit $k \in \{m,\dots,n\}$.
  Si $m = 0$, on a $\binom{k}{m} = \binom{k}{0} = 1$ et $\binom{n}{m} = \binom{n}{0} = 1$,
  donc $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{k} = \binom{n}{m}\binom{n-0}{k-0} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$.
  Si $m \geq 1$, alors $m\binom{n}{k}\binom{k}{m} = n\binom{n-1}{k-1}\binom{k-1}{m-1}$ d'après la question 2.
  $= n\binom{n-1}{m-1}\binom{n-m}{k-m}$ car $\mathcal{P}(n-1)$ est vraie (avec $0 \leq m-1 \leq k-1 \leq n-1$)
  $= m\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$ car $m\binom{n}{m} = n\binom{n-1}{m-1}$,
  donc $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$ puisque $m \neq 0$.
  Donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Par récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.