UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 1

Interrogation n°2 : mardi 5 octobre 2010

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.

Durée : 30 minutes

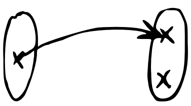
NOM : corrigé
PRÉNOM :

Exercice 1

1) Rappeler les définitions d'une application injective et d'une application surjective.
2) Dessiner avec des patates une application injective qui n'est pas surjective.
3) Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

1) Soit $f : A \to B$ une application.
On dit que f est injective si $\forall (x, x') \in A^2 \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.
On dit que f est surjective si $\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad f(x) = y$.

2)

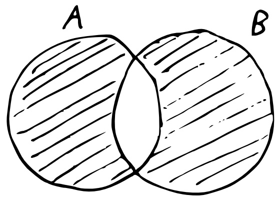


3) Supposons que f et g sont surjectives.
Soit $z \in C$. Comme g est surjective, il existe un $y \in B$ tel que $z = g(y)$.
Comme f est surjective, il existe alors un $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
On a alors $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.
On a donc montré : $\forall z \in C \quad \exists x \in A \quad (g \circ f)(x) = z$,
c'est-à-dire que $g \circ f$ est surjective.

Exercice 2

Soient A et B deux ensembles. On définit la différence symétrique de A et B comme l'ensemble $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
1) Faire un dessin (diagramme "patates").
2) Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1)



partie hachurée $= A \Delta B$

2) * Montrons que $A\Delta B \subset (A\cup B) \setminus (A\cap B)$.

Soit $x \in A\Delta B$, c'est-à-dire $x \in (A\setminus B) \cup (B\setminus A)$.

- Si $x \in A\setminus B$, alors $x\in A$ donc $x \in A\cup B$.
- Si $x \in B\setminus A$, alors $x \in B$ donc $x\in A\cup B$.

On a donc $x \in A\cup B$.

Si $x\in A\cap B$, on a $x \in B$ donc $x \notin A\setminus B$
et $x\in A$ donc $x\notin B\setminus A$
donc $x \notin (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

Comme $x\in A\Delta B$ on a donc $x \notin A\cap B$.

Donc $x \in (A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

* Montrons que $(A\cup B)\setminus(A\cap B) \subset A\Delta B$.

Soit $x \in (A\cup B)\setminus(A\cap B)$. On a $x\in A\cup B$ et $x\notin A\cap B$.

- Si $x\in A$, alors $x\notin B$ car $x\notin A\cap B$, donc $x \in A\setminus B$ donc $x \in A\Delta B$.
- Si $x \in B$, alors $x\notin A$ car $x\notin A\cap B$, donc $x\in B\setminus A$ donc $x\in A\Delta B$.

On a donc $x\in A\Delta B$.

Par double inclusion, on en déduit que $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

Exercice 3

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1) Montrer que

$$\forall A \subset E, \forall B \subset E \qquad A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$

2) En déduire que

$$\forall A \subset E, \forall B \subset E \qquad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

3) Montrer que si f est injective alors

$$\forall A \subset E, \forall B \subset E \qquad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

1) Soient A et B deux parties de E, telles que $A \subset B$.
Soit $y \in f(A)$. Par définition de $f(A)$, il existe un $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
Comme $x \in A$ et $A \subset B$, on a $x \in B$, donc $y = f(x) \in f(B)$.
On a donc : $\forall A \subset E, \forall B \subset E \quad A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

2) Soient A et B deux parties de E.
On a $A \cap B \subset A$, donc, d'après la question 1, $f(A \cap B) \subset f(A)$.
De même, on a $A \cap B \subset B$ donc $f(A \cap B) \subset f(B)$.
On a donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

3) Supposons que f est injective.
Soient A et B deux parties de E.
D'après la question 2, on a $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Montrons que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
Soit $y \in f(A) \cap f(B)$.
Comme $y \in f(A)$, il existe un $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
Comme $y \in f(B)$, il existe un $x' \in B$ tel que $y = f(x')$,
or $f(x) = y = f(x')$ et f est injective, donc $x = x'$.
On a donc $y = f(x)$ et $x \in A \cap B$, donc $y \in f(A \cap B)$.
Par double inclusion, on en déduit $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.