UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 1

Feuille n°2 : entiers naturels, combinatoire

1 Exercices à savoir faire

Exercice 1

1 Montrer que, pour tout entier n, $4^n + 5$ est un multiple de 3.
2 Montrer que, pour tout entier n, si $10^n + 7$ est multiple de 9, alors $10^{n+1} + 7$ l'est aussi. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2

On considère une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison a et on pose $U_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $U_n = (n+1)(u_0 + \frac{1}{2}an)$.

Exercice 3

On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison a et on pose encore $U_n = u_0 + \cdots + u_n$. On suppose que $a \neq 1$; montrer alors que $U_n = u_0 \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. Que vaut U_n dans le cas où $a = 1$?

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et $u_0 = 1$.
1 Déterminer un nombre réel a tel que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + a$ soit une suite géométrique.
2 En déduire une formule simple pour v_n puis une formule simple pour u_n.
3 Déduire de l'exercice une *méthode générale* pour calculer le n-ième terme d'une suite (u_n) définie par une récurrence $u_{n+1} = au_n + b$, où a et b sont des nombres réels.

Exercice 5

1 Montrer que, pour tout entier $n \geq 5$, on a $2^n < n!$.
2 Déterminer un entier A tel que pour tout $n \geq A$, on ait $3^n < n!$.

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. On cherche une formule close pour le terme général de cette suite.
1 Calculer u_2, u_3, u_4.

2 Pour tout entier naturel n, on appelle P_n l'assertion

$$u_n = 2^{n+1} - 3^n \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2^{n+2} - 3^{n+1}$$

Démontrer par récurrence sur n, que, pour tout entier naturel n, la proposition P_n est vraie.
3 Conclure.

Exercice 7

1 Au mois de janvier, Anatole a pris ses repas de midi au Restau U. Il y a mangé 17 fois de la pizza et 25 fois de la glace. Montrer qu'il a mangé de la pizza et de la glace au cours d'un des repas.
2 Dans une classe de 35 élèves, chaque étudiant doit apprendre au moins une des deux langues, anglais ou allemand. 25 étudient l'anglais et 20 apprennent les deux langues. Combien d'élèves étudient l'allemand ?
3 Hier soir, sur 100 français, 95 ont regardé le journal télévisé, 85 ont regardé le film qui suivait et 70 se sont couchés de bonne heure. Combien de français (au moins) se sont couchés tôt après avoir regardé le journal et le film ?

Exercice 8

1 Montrer que dans un ensemble de cardinal 10, deux sous ensembles de cardinal 7 ont une intersection non vide.
2 Montrer que dans un ensemble de cardinal 10, trois sous ensembles de cardinal 7 ont une intersection non vide.
3 Dessiner (si possible) deux ensembles A et B avec cinq éléments chacun et dont la réunion a neuf éléments.
4 Dessiner (si possible) trois ensembles A, B et C avec cinq éléments chacun et dont la réunion a neuf éléments et l'intersection $A \cap B \cap C$ aucun.

Exercice 9

Écrire le triangle de Pascal jusqu'à sa dixième ligne.

2 Exercices à chercher

Exercice 10

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$.
Montrer que la propriété (dite « de bon ordre ») :

toute partie non vide de E possède un plus petit élément.

implique que l'ordre est total :

deux éléments quelconques sont comparables, ou en d'autres termes :

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad x \leq y \quad \textit{ou} \quad y \leq x.$$

Exercice 11

On dispose d'un stock illimité de pièces de 3 euros et de 5 euros. Quels sont les montants que l'on peut payer en donnant la somme exacte ?

Exercice 12

1 Montrer par récurrence sur n les formules

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2 Que vaut, si n est impair, la somme $1 + 3 + 5 + \cdots + n$?

3 Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 13

1 Déterminer deux nombres réels a et b tels que l'on ait, pour tout nombre réel $x > 0$,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

2 Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 14

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ pour $n \geq 0$.

1 Démontrer que, pour tout entier n, on a $u_n \geq n^2$.

2 On définit une suite (v_n) en posant, pour tout entier n, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n, puis exprimer v_n en fonction de n.

3 Calculer u_n en fonction de n.

Exercice 15

Lire attentivement la démonstration par récurrence de l'affirmation suivante : « tous les crayons de couleur d'une même boîte B sont de la même couleur ». Soit B une boîte de crayons de couleurs. Si cette boîte contient un crayon, alors l'énoncé est vrai. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que le résultat soit vrai pour toute boîte B de n crayons. Soit maintenant B de $n+1$ crayons, en en retirant un, on obtient une boîte B' ayant n crayons. Par hypothèse de récurrence, ils sont tous les n de la même couleur c. Remettons le crayon retiré à nouveau dans B. Si l'on en retire un autre, on obtient une nouvelle boîte B'', dont tous les crayons ont même couleur d. Comme des crayons appartiennent à la fois à B' et B'', tous les crayons de B possèdent la même couleur $c = d$. Que pensez-vous de cette démonstration ?

Exercice 16

Un récipient contient 1 dm^3 de riz, chaque grain faisant 1 mm^3. On dispose un grain de riz sur la première case d'un échiquier, deux sur la deuxième, quatre sur la suivante, et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre de grains. Combien de cases de l'échiquier seront remplies lorsque le pot de riz ne contiendra plus assez de grains ? Combien en reste-t-il dans le pot ?

Exercice 17

La suite (u_n) est définie par $u_1 = 1/2$ et $u_n = u_{n-1}/(2nu_{n-1} + 1)$, si $n \geq 2$. Calculer $u_1 + \cdots + u_n$, pour tout entier n. (Commencez par calculer explicitement cette somme pour de petites valeurs de n, conjecturez alors une formule générale que vous démontrerez ensuite par récurrence.)

Exercice 18

On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = 1$ et, si $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n/(1 + u_n)$.

1 Montrer que l'on a $u_n > 0$, pour tout entier n.

2 Montrer que la suite $(1/u_n)$ est arithmétique.

3 Calculer u_n, pour tout entier n.

Exercice 19

1 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout entier naturel n, la formule de récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

2 On note $\mathcal{P}_n$ la propriété « $u_n = 1 + 2^n$ » Montrer en adaptant le raisonnement par récurrence que pour tout n entier, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exercice 20

1 Soit $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ une famille de $n\times m$ nombres réels. Montrer par récurrence sur n :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}.$$

2 En déduire, si $(b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq i}}$ est une autre famille de nombres réels :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}b_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}b_{ij}.$$

Indication : pour appliquer le résultat précédent, on pourra compléter la famille par des zéros.

3 Calculer

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{n-j+1}.$$

Exercice 21

On définit la relation suivante sur l'ensemble des nombres entiers naturels : $n\sim m$ si la somme des chiffres de n dans l'écriture décimale est égale à celle de m.

Est-ce une relation réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Transitive ?

Exercice 22

On définit la relation suivante sur l'ensemble des nombres entiers naturels : $n\{m$ si la somme des chiffres de n dans l'écriture décimale est inférieure à celle de m.

1 Comparer 56, 89, 1211 et 4322.

2 Est-ce une relation réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Transitive ?

Exercice 23

Montrer que la relation $\leqslant$ (définie sur l'ensemble des entiers naturels) est antisymétrique. Est-ce une relation d'ordre sur $\mathbf{N}$?

Exercice 24

Soit n un entier naturel non nul.

1 On considère deux ensembles A et B et une application $f : A\to B$. On suppose que A est un ensemble fini et que chaque élément de B a exactement n antécédents. Déterminer le cardinal de A.

2 On considère deux ensembles A et B et une application $f : A\to B$. On suppose que A est un ensemble fini et que chaque élément de B a exactement n antécédents sauf l'élément β qui n'a que deux antécédents. Déterminer le cardinal de A.

3 Donner l'exemple d'une application $f : A \to B$ où B est un ensemble fini sans que A le soit.

Exercice 25

Pour n entier naturel, on note $p(n)$ le nombre de parties d'un ensemble à n éléments. Le nombre de parties du produit cartésien $A \times B$ d'un ensemble A à 5 éléments avec un ensemble B à 4 éléments est-il le produit $p(5) \times p(6)$? (Sinon que représente le nombre $p(5) \times p(6)$?)

Exercice 26

On considère n objets de différentes couleurs. Si a est un entier tel que $a \leq \sqrt{n-1}$, montrer que l'on peut trouver ou bien $a+1$ objets de la même couleur, ou bien $a+1$ objets de couleurs toutes différentes.

Exercice 27

Dans un groupe de 6 personnes, deux personnes quelconques ou bien s'aiment, ou bien se détestent. Montrer que l'on peut en trouver 3 qui sont amis, ou 3 qui sont mutuellement ennemis. (*Fixer une personne Anatole ; parmi ses 5 relations, Anatole a (au moins) 3 amis, ou 3 ennemis. Si Anatole a trois amis et que deux d'entre eux sont amis, le résultat est obtenu. Sinon...*)

Exercice 28

1 Soit X et Y deux ensembles finis. Combien y a-t-il d'applications injectives de X dans Y ? (La même question avec « surjectives » est naturelle, mais plus difficile.)
2 Estimer le nombre d'applications injectives de $\{1, \ldots, 30\}$ dans $\{1, \ldots, 365\}$. Sur une classe de 30 élèves, quelle est la probabilité que deux élèves soient nés le même jour ? (*Paradoxe des anniversaires*)

Exercice 29

1 Démontrer la relation $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n-1}^{p-1} + \mathrm{C}_{n-1}^p$ pour $n > p \geq 1$ en utilisant la formule qui calcule C_n^p à l'aide de factorielles.
2 Inversement, à l'aide de cette identité, démontrer par récurrence la formule qui calcule C_n^p.

Exercice 30

1 Démontrer de deux façons la formule $\mathrm{C}_n^p = \dfrac{n}{p}\mathrm{C}_{n-1}^{p-1}$ pour $n \geq p \geq 1$.
2 Démontrer de deux façons que $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_n^{n-p}$.

Exercice 31

1 À l'aide de la formule du binôme, démontrer que

$$\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^n = 2^n.$$

Donner une interprétation combinatoire de cette formule.

2 Calculer de même $\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \mathrm{C}_n^p$ (pour une interprétation combinatoire du résultat, cf. l'exercice 38 de la feuille 1).

3 Calculer $\sum_{p=1}^{n} p\mathrm{C}_n^p$ et $\sum_{p=2}^{n} p(p-1)\mathrm{C}_n^p$. En déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{n} p^2\mathrm{C}_n^p$.

4 Retrouver la question précédente en dérivant (une puis deux fois) la formule du binôme pour $(1+x)^n$.

Exercice 32

1 En développant $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$, montrer que $\mathrm{C}_{2n}^n = \sum_{p=0}^{n} \left(\mathrm{C}_n^p\right)^2$. (Remarquer que $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_n^{n-p}$.)

2 Donner une interprétation combinatoire de la formule précédente.

3 Exercices pour aller plus loin

Exercice 33

Soit (x_n) une suite de réels dans $]0,1[$. On pose $S_n = x_1 + \cdots + x_n$. Montrer l'inégalité

$$1 - S_n \leq (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \leq \frac{1}{1+S_n}.$$

Exercice 34

Si n est un entier ≥ 1 et x un réel dans $[0,1]$, montrer l'inégalité

$$1 - nx \leq (1-x)^n \leq 1 - \frac{nx}{1+(n-1)x}.$$

Exercice 35

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$.

Exercice 36

1 Si x et y sont deux nombres réels positifs, montrer que $\sqrt{xy} \leq (x+y)/2$.
2 Montrer par récurrence sur n que si $x_1, \ldots, x_{2^n}$ sont des nombres réels positifs,

$$(x_1 \cdots x_{2^n})^{1/2^n} \leq (x_1 + \cdots + x_{2^n})/2^n.$$

3 Soit $N \geq 2$ et soit $x_1, \ldots, x_N$ des nombres réels positifs. Démontrer que

$$(x_1 \cdots x_N)^{1/N} \leq (x_1 + \cdots + x_N)/N$$

(*inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique*). Pour cela, choisir un entier n tel que $N \leq 2^n$; poser, pour $N \leq k \leq 2^n$, $x_k = (x_1 + \cdots + x_N)/N$; appliquer la question précédente.

Exercice 37

1 Peut-on paver un échiquier privé de deux cases diagonalement opposées par des dominos (chacun recouvrant exactement deux cases) ?
2 Démontrer que l'on peut paver un échiquier 8×8 par des triominos en forme de L (recouvrant trois cases) de sorte à laisser vide une case quelconque prescrite à l'avance. (Remplacer 8 par 2^n, et faire une récurrence…)
3 Quels rectangles sont pavables par des triominos en forme de L ? (La réponse générale n'est semble-t-il pas connue…)

Exercice 38

Démontrer la commutativité de la multiplication dans l'ensemble des nombres entiers naturels, à l'aide des formules de définition de cette multiplication.

Exercice 39

Le principe d'inclusion-exclusion donne lieu à des inégalités : si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties d'un ensemble X, montrer par exemple que

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| \leq \left| \bigcup_i A_i \right| \leq \sum_i |A_i| .$$

Généraliser.

Exercice 40

Soit $D_{n,k}$ le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ qui ont exactement k points fixes (*dérangements*).
1 Montrer que $D_{n,0} + \cdots + D_{n,n} = n!$.
2 Montrer que $D_{n,k} = \mathrm{C}_n^k D_{n-k,0}$

3 En déduire que

$$\frac{1}{n!}D_{n,0} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}.$$