Algèbre et Arithmétique 1

Examen final (première session)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.

Durée : 2 heures

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. (a) Donner l'écriture en base 8 du nombre 3673.
   (b) Convertir en base 10 le nombre qui s'écrit $\overline{3042}$ en base 5.
   (Le détail des calculs devra apparaître sur la copie.)
2. Calculer le pgcd de 1078 et 1980, et deux entiers relatifs u et v tels que
   $$1078u + 1980v = \mathrm{pgcd}(1078, 1980).$$
   (Le détail des calculs devra apparaître sur la copie.)
3. Développer $(y - x)^6$, pour tous nombres réels x et y. *(Le résultat final ne devra contenir aucun coefficient binomial.)*
4. (a) Énoncer le petit théorème de Fermat.
   (b) Soient p et q des nombres premiers distincts. Soit x un entier relatif tel que x et $p\,q$ sont premiers entre eux. En utilisant le petit théorème de Fermat et le théorème de Gauss, montrer qu'on a
   $$x^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \quad [p\,q]\,.$$

Exercice 2

Dessiner (si possible) quatre ensembles de trois éléments chacun tels que la réunion de ces quatre ensembles soit de cardinal six et tels que l'intersection de deux quelconques d'entre eux soit de cardinal un.

Exercice 3

Soient E un ensemble, $A, B \subset E$ deux parties de E. On rappelle que $A\Delta B$ désigne l'ensemble $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Montrer que $A\Delta B = A \cap B$ si et seulement si $A = \varnothing$ et $B = \varnothing$. *(Toute propriété de $A\Delta B$ que vous utiliserez devra être démontrée.)*

Exercice 4

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, 13 divise $3^{3(k+1)} - 1$.
2. Montrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'entier $3^{3(n+1)} - 26n - 27$ est multiple de 169 (*indication : on pourra utiliser la question précédente).*

Exercice 5

1. Déterminer un inverse de 3 modulo 7, s'il en existe.
2. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$

$$3\,x \equiv 2 \quad [7]\,.$$

3. Résoudre le système d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$

$$\left\{ \begin{array}{rcll} 3\,x & \equiv & 2 & [7] \\ x & \equiv & 1 & [5] \\ x & \equiv & 5 & [12]\,. \end{array} \right.$$