UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 1

Feuille n^o 1 : logique, théorie des ensembles, combinatoire

Exercices à savoir faire

Exercice 1

Donner les tables de vérité des fonctions propositionnelles suivantes et indiquer, le cas échéant, si ce sont des tautologies :

1 $\mathcal{P}$ ou non $\mathcal{P}$ (principe du tiers exclu) ;

2 non $(\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}) \Leftrightarrow ((\text{non } \mathcal{P})$ et $(\text{non } \mathcal{Q}))$;

3 $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\text{non } (\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q}))$;

4 $((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})) \Rightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R})$ (transitivité de la relation d'implication) ;

5 $(\text{non } \mathcal{P} \Rightarrow \text{non } \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$.

Exercice 2

1 L'affirmation « je suis arrivé à la gare avant 10h » est-elle une condition nécessaire (suffisante, nécessaire et suffisante) pour « je suis monté dans le train de 9h30 » ?

2 Donner une condition suffisante et non nécessaire pour qu'un nombre entier soit strictement plus grand que 10.

3 Donner une condition nécessaire et non suffisante pour qu'un nombre entier soit divisible par 6.

Exercice 3

Considérons l'affirmation suivante : « s'il pleut ce matin, je prends mon parapluie ». À quelle affirmation parmi les suivantes correspond sa contraposée ?

1 « J'ai pris mon parapluie, donc il a plu ce matin » ;

2 « Je n'ai pas pris mon parapluie, donc il ne pleuvait pas ce matin » ;

3 « Il a fait beau, donc je n'ai pas pris mon parapluie ».

Exercice 4

Expliquer pourquoi la règle : « toute règle a une exception » se contredit elle-même. C'est le *paradoxe du menteur*.

Exercice 5

Traduire la formule suivante en une phrase (en français) qui ne comportera pas de symboles mathématiques.

$\forall n \in \mathbf{N}\,, \forall n' \in \mathbf{N}\,, (n \neq 0 \text{ et } n' \neq 0) \Rightarrow \exists y \in \mathbf{N}, \exists q \in \mathbf{N}, \exists q' \in \mathbf{N}\,, (y = q\,n \text{ et } y = q'\,n' \text{ et } y \neq 0).$

Exercice 6

Nier l'assertion : « tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans ».

Exercice 7

On considère les formules suivantes :

$$\exists n \in \mathbf{N}\ \forall p \in \mathbf{N} \quad p \leq n\,;$$

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \exists p \in \mathbf{N} \quad p \leq n\,;$$

$$\exists x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R} \quad x + y > 0\,;$$

$$\forall x \in \mathbf{R}\ \exists y \in \mathbf{R} \quad x + y > 0\,;$$

$$\exists x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R} \quad x + y > 0\,;$$

$$\forall x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R} \quad x + y > 0\,;$$

$$\exists x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R} \quad y^2 > x.$$

1 Écrire la négation de chacune de ces formules.
2 Pour chacune de ces formules, indiquer (en le justifiant) si l'assertion considérée est vraie ou fausse.

Exercice 8

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On considère les énoncés suivants :

1. Pour tout réel x, $f(x)$ est supérieur à 1.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe un réel positif x tel que $f(x)$ est positif.
5. L'application f est paire.
6. Il existe un réel x tel que pour tout réel y strictement supérieur à x, $f(x)$ est strictement supérieur à $f(y)$.

1 Traduire ces énoncés en formules mathématiques qui utilisent des quantificateurs.
2 Pour chacune des formules obtenues, écrire sa négation.
3 Pour chacun de ces énoncés, donner au moins deux exemples d'applications f qui le vérifient, et au moins deux exemples d'applications f qui ne le vérifient pas.

Exercice 9

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des femmes. Qu'est-ce qu'un élément $x \in \mathcal{F}$? Pour tout élément $x \in \mathcal{F}$, on note $B(x)$ l'assertion « x est brune » et $N(x)$ l'assertion « x a les yeux noirs ».

1 Sous la forme d'un schéma, représenter, dans $\mathcal{F}$, l'ensemble $\mathcal{B}$ des éléments x de $\mathcal{F}$ pour lesquels $B(x)$ est vraie, et l'ensemble des éléments y de $\mathcal{F}$ pour lesquels $N(x)$ est vraie.

2 Indiquer si les formules suivantes sont vraies ou fausses.

$$\forall x \in \mathcal{F},\ (B(x) \text{ ou } N(x))\ ;$$

$$(\forall x \in \mathcal{F},\ B(x)) \text{ ou } (\forall x \in \mathcal{F},\ N(x)).$$

3 Expliquer ce que signifierait que ces formules soient vraies, puis fausses.

4 Ces deux formules sont-elles équivalentes ?

Exercice 10

1 Que pensez-vous du raisonnement suivant : « Démontrons l'énoncé suivant : pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est multiple de 3. Soit n un entier naturel. Par exemple $n = 4$. On a alors $n^3 - n = 4^3 - 4 = 4\,(4^2 - 1) = 4.15 = 4.3.5$ qui est bien multiple de 3. La proposition est donc démontrée ».

2 Que pensez-vous du raisonnement suivant : « Démontrons l'énoncé suivant : il existe un entier naturel n tel que $n^2 - n$ n'est pas multiple de 3. Si $n = 2$, on a $n^2 - n = 4 - 2 = 2$ qui n'est pas multiple de 3. La proposition est donc démontrée ».

Exercice 11

Démontrer par contraposition l'énoncé suivant : si n un entier naturel dont le carré est pair, alors n est pair.

Exercice 12

Démontrer par contraposition la formule suivante : $\forall x \in \mathbf{R},\ x^3 = 2 \Rightarrow x < 2$.

Exercice 13

Démontrer par l'absurde l'énoncé suivant : soit x un réel positif tel que, pour tout réel $y > 0$, on a $x \leq y$. Alors $x = 0$.

Exercice 14

Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre entier.

Exercice 15

Démontrer par récurrence la formule suivante : $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3 \Rightarrow 2^n > n^2$.

Exercice 16

Démontrer par récurrence la formule suivante : $\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$.

Exercice 17

Lire attentivement la démonstration par récurrence de l'affirmation suivante : « tous les crayons de couleur d'une même boîte B sont de la même couleur ». Soit B une boîte de crayons de couleurs. Si cette boîte contient un crayon, alors l'énoncé est vrai. Supposons que le résultat soit vrai si B a $n-1$ crayons. Si B a maintenant n crayons, en en retirant un, on obtient une boîte B' ayant $n-1$ crayons. Par hypothèse de récurrence, ils sont tous les $n-1$ de la même couleur c. Remettons le crayon retiré à nouveau dans B. Si l'on en retire un autre, on obtient une nouvelle boîte B'', dont tous les crayons ont même couleur d. Comme des crayons appartiennent à la fois à B' et B'', tous les crayons de B possèdent la même couleur $c = d$.

Que pensez-vous de cette démonstration ?

Exercice 18

1 Soit A un sous ensemble de $\mathbf{N}$ dont tous les éléments sont strictement plus grands que 100. Que peut-on dire du plus grand élément du complémentaire de A ?
2 Donner (si possible) l'exemple de deux sous-ensembles A et B de $\mathbf{N}$ tels que le plus petit élément de $A \cap B$ ne soit ni le plus petit élément de A, ni le plus petit élément de B.
3 Donner (si possible) l'exemple de deux sous-ensembles A et B de $\mathbf{N}$ tels que le plus petit élément de $A \cup B$ ne soit ni le plus petit élément de A, ni le plus petit élément de B.

Exercice 19

1 Dessiner si possible le graphe d'une application surjective f et d'une application g dont la composée $f \circ g$ ne soit pas surjective.
2 Dessiner si possible le graphe d'une application surjective f et d'une application g dont la composée $g \circ f$ ne soit pas surjective.
3 Dessiner si possible le graphe d'une application surjective f et d'une application g surjective dont la composée $g \circ f$ ne soit pas surjective.
4 Reprendre les questions précédentes avec « injective » au lieu de « surjective ».

Exercice 20

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Montrer les égalités $\mathcal{C}_E(A \cup B) = \mathcal{C}_E A \cap \mathcal{C}_E B$ et $\mathcal{C}_E(A \cap B) = \mathcal{C}_E A \cup \mathcal{C}_E B$. Illustrer le résultat avec des patates et des couleurs.

Exercice 21

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Montrer les formules suivantes :

1 $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.
2 $A \backslash B = A \Leftrightarrow B \backslash A = B$.
3 $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \mathcal{C}_E B = A \cap \mathcal{C}_E C$.

Exercice 22

Soit E un ensemble. Démontrer les formules suivantes :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cup B \subset A \cap B) \Rightarrow A = B$,
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C) \Rightarrow B \subset C$.
3. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

Exercice 23

Soient E et F deux ensembles et f une application $E \to F$.
1 Démontrer les formules suivantes :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$,
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
5. $\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
6. $\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

2 La formule $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset B \Leftrightarrow f(A) \subset f(B)$ est-elle toujours vraie ? On pourra, si besoin, donner un contre-exemple.
3 La formule $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ est-elle toujours vraie ? On pourra, si besoin, donner un contre-exemple.

Exercice 24

1 Au mois de janvier, Anatole a pris ses repas de midi au Restau U. Il y a mangé 17 fois de la pizza et 25 fois de la glace. Montrer qu'il a mangé de la pizza et de la glace au cours d'un des repas.
2 Dans une classe de 35 élèves, chaque étudiant doit apprendre au moins une des deux langues, anglais ou allemand. 25 étudient l'anglais et 20 apprennent les deux langues. Combien d'élèves étudient l'allemand ?
3 Hier soir, sur 100 français, 95 ont regardé le journal télévisé, 85 ont regardé le film qui suivait et 70 se sont couché de bonne heure. Combien de français (au moins) se sont couchés tôt après avoir regardé le journal et le film ?

Exercice 25

1 Montrer que dans un ensemble de cardinal 10, deux sous-ensembles de cardinal 7 ont une intersection non vide.

2 Montrer que dans un ensemble de cardinal 10, trois sous-ensembles de cardinal 7 ont une intersection non vide.
3 Dessiner (si possible) deux ensembles A et B avec cinq éléments chacun et dont la réunion a neuf éléments.
4 Dessiner (si possible) trois ensembles A, B et C avec cinq éléments chacun et dont la réunion a neuf éléments et l'intersection $A \cap B \cap C$ aucun.

Exercices à chercher

Exercice 26

Écrire le triangle de Pascal jusqu'à sa dixième ligne.

Exercice 27

Soit n un entier naturel non nul.
1 On considère deux ensembles A et B et une application $f : A \to B$. On suppose que A est un ensemble fini et que chaque élément de B a exactement n antécédents. Déterminer le cardinal de A.
2 On considère deux ensembles A et B et une application $f : A \to B$. On suppose que A est un ensemble fini et que chaque élément de B a exactement n antécédents sauf l'élément β qui n'a que deux antécédents. Déterminer le cardinal de A.
3 Donner l'exemple d'une application $f : A \to B$ où B est un ensemble fini sans que A le soit.

Exercice 28

Soit E un ensemble et A, B des parties de E.
1 Déterminer toutes les parties X de E vérifiant $A \cup X = B$ (on pourra commencer par remarquer que si A n'est pas inclus dans B, de telles parties n'existent pas ; il reste à examiner le cas où A est inclus dans B ; on pourra s'aider de patates).
2 Déterminer toutes les parties X de E vérifiant $A \cap X = B$.

Exercice 29

Pour n entier naturel, on note $p(n)$ le nombre de parties d'un ensemble à n éléments. Le nombre de parties du produit cartésien $A \times B$ d'un ensemble A à 5 éléments avec un ensemble B à 4 éléments est-il le produit $p(5) \times p(6)$? (Sinon que représente le nombre $p(5) \times p(6)$?)

Exercice 30

Pour tout entier naturel $\mathbf{N}$, on note P_n la formule $2^n > n^2$.
1 Montrer que la formule $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ est vraie pour $n \geq 3$.

2 Pour quelles valeurs de l'entier n, P_n est-elle vraie ?

Exercice 31

Montrer, par récurrence sur n, la formule suivante : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbf{N},\ (1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 32

On considère n objets de différentes couleurs. Si a est un entier tel que $a \leq \sqrt{n-1}$, montrer que l'on peut trouver ou bien $a+1$ objets de la même couleur, ou bien $a+1$ objets de couleurs toutes différentes.

Exercice 33

Dans un groupe de 6 personnes, deux personnes quelconques ou bien s'aiment, ou bien se détestent. Montrer que l'on peut en trouver 3 qui sont amis, ou 3 qui sont mutuellement ennemis. (*Fixer une personne Anatole ; parmi ses 5 relations, Anatole a (au moins) 3 amis, ou 3 ennemis. Si Anatole a trois amis et que deux d'entre eux sont amis, le résultat est obtenu. Sinon...*)

Exercice 34

1 Soit X et Y deux ensembles finis. Combien y a-t-il d'applications injectives de X dans Y ? (La même question avec « surjectives » est naturelle, mais plus difficile.)
2 Estimer le nombre d'applications injectives de $\{1, \ldots, 30\}$ dans $\{1, \ldots, 365\}$. Sur une classe de 30 élèves, quelle est la probabilité que deux élèves soient nés le même jour ? (*Paradoxe des anniversaires*)

Exercice 35

1 Démontrer la relation $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n-1}^{p-1} + \mathrm{C}_{n-1}^p$ pour $n > p \geq 1$ en utilisant la formule qui calcule C_n^p à l'aide de factorielles.
2 Inversement, à l'aide de cette identité, démontrer par récurrence la formule qui calcule C_n^p.

Exercice 36

1 Démontrer de deux façons la formule $\mathrm{C}_n^p = \dfrac{n}{p}\mathrm{C}_{n-1}^{p-1}$ pour $n \geq p \geq 1$.

2 Démontrer de deux façons que $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_n^{n-p}$.

Exercice 37

1 À l'aide de la formule du binôme, démontrer que

$$\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^n = 2^n.$$

Donner une interprétation combinatoire de cette formule.

2 Calculer de même $\sum_{p=0}^{n}(-1)^p \mathrm{C}_n^p$ (pour une interprétation combinatoire du résultat, cf. l'exercice 38).

3 Calculer $\sum_{p=1}^{n} p\mathrm{C}_n^p$ et $\sum_{p=2}^{n} p(p-1)\mathrm{C}_n^p$. En déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{n} p^2\mathrm{C}_n^p$.

4 Retrouver la question précédente en dérivant (une puis deux fois) la formule du binôme pour $(1+x)^n$.

Exercice 38

Soit E un ensemble fini non vide. On se propose de montrer que E possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

1 On suppose dans cette question que E est de cardinal impair. Montrer que l'application $A \mapsto \mathcal{C}_E A$ est une bijection de l'ensemble des parties de E de cardinal pair sur l'ensemble des parties de E cardinal impair et conclure.

2 Dans cette question, E est un ensemble fini non vide quelconque. Soit x un élément de E. Démontrer le résultat cherché en utilisant l'application qui à une partie A de E associe $A \setminus \{x\}$ si $x \in A$ et $A \cup \{x\}$ si $x \notin A$.

3 Pout tout entier naturel n non nul, déduire de la question précédente la formule $\sum_{p=0}^{n}(-1)^p \mathrm{C}_n^p = 0$ (trouvée par une autre méthode à l'exercice 37).

Exercice 39

1 En développant $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$, montrer que $\mathrm{C}_{2n}^n = \sum_{p=0}^{n} \left(\mathrm{C}_n^p\right)^2$. (Remarquer que $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_n^{n-p}$.)

2 Donner une interprétation combinatoire de la formule précédente.

Exercice 40

Le but de cet exercice est de montrer que « l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas ».

Énoncé de l'exercice : Il s'agit de montrer que l'existence d'un ensemble dont les éléments sont tous les ensembles aboutit à une contradiction. Supposons qu'il existe un tel ensemble X. En considérant l'ensemble $y = \{x \in X,\ x \notin x\}$, aboutir à la contradiction cherchée (indication : y appartient-il à y ? cf. également le paradoxe du barbier ci-dessous). Ainsi l'ensemble X ne peut pas exister.

Commentaires : La découverte de ce « paradoxe » par le logicien Bertrand Russel en 1901 a permis par la suite de dégager de « bons » axiomes pour la formalisation de la théorie des ensembles. Une version « grand public » de ce paradoxe est connue sous le nom de *paradoxe du barbier* : le barbier du village est celui qui rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et eux seulement ; le barbier se rase-t-il lui même ?

Exercices pour aller plus loin

Exercice 41

Le principe d'inclusion-exclusion donne lieu à des inégalités : si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties d'un ensemble X, montrer par exemple que

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| \leq \left| \bigcup_i A_i \right| \leq \sum_i |A_i| \, .$$

Généraliser.

Exercice 42

Soit $D_{n,k}$ le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ qui ont exactement k points fixes (*dérangements*).

1 Montrer que $D_{n,0} + \cdots + D_{n,n} = n!$.

2 Montrer que $D_{n,k} = \mathrm{C}_n^k D_{n-k,0}$

3 En déduire que

$$\frac{1}{n!} D_{n,0} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Exercice 43

On définit la relation suivante sur l'ensemble des nombres entiers naturels : $n \sim m$ si la somme des chiffres de n dans l'écriture décimale est égale à celle de m.

Est-ce une relation réflexive ? symétrique ? anti-symétrique ? transitive ?

Exercice 44

On définit la relation suivante sur l'ensemble des nombres entiers naturels : $n\{m$ si la somme des chiffres de n dans l'écriture décimale est inférieure à celle de m.

1 Comparer 56, 89, 1211 et 4322.

2 Est-ce une relation réflexive ? symétrique ? anti-symétrique ? transitive ?

Exercice 45

Montrer que la relation $<$ (définie sur l'ensemble des entiers naturels) est anti-symétrique. Est-ce une relation d'ordre sur $\mathbf{N}$?

Exercice 46

Soient E et F des ensembles. On suppose qu'il existe une application injective $f : E \to F$ et une application injective $g : E \to F$. On se propose de montrer qu'il existe alors une bijection de E sur F. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Cantor-Bernstein* ou parfois *théorème de Cantor-Bernstein-Schröder*.

1 Montrer le résultat si l'on suppose en outre que E ou F est un ensemble fini.

2 Désormais on suppose E et F quelconques. Soit $h = g \circ f$ et $G = E \setminus g(F)$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties X de E vérifiant $G \cup h(X) \subset X$. Montrer que $\mathcal{F}$ est non vide et que si $X \in \mathcal{F}$ alors $G \cup h(X) \in \mathcal{F}$.

3 Soit A l'ensemble des éléments x de E tels que pour tout $X \in \mathcal{F}$ on a $x \in X$. En d'autres termes $A = \cap_{X \in \mathcal{F}} X$. Montrer qu'on a $G \subset A$, puis que A appartient à $\mathcal{F}$, puis que $G \cup h(A) = A$ (pour cette dernière propriété, utiliser le dernier point de la question précédente).

4 Soit $B = E \setminus A$, $A' = f(A)$ et $B' = g^{-1}(B)$. Montrer qu'on a $A' \cap B' = \varnothing$ et $A' \cup B' = F$.

5 Montrer que l'application $\varphi : E \to F$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

est une bijection de E sur F.