UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 1

Devoir à la maison

à rendre le 2 novembre dernier délai

Exercice 1

Soit A une partie d'un ensemble E, on appelle fonction caractéristique de A l'application $f_A : E \to \{0,1\}$ définie par

$$f_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Soit A et B deux parties de E, f_A et f_B leurs fonctions caractéristiques.
Montrer qu'on a les relations suivantes pour tout $x \in E$:

(1) $1 - f_A(x) = f_{\complement_E A}(x)$ où $\complement_E A$ est le complémentaire de A dans E.

(2) $f_A(x) f_B(x) = f_{A\cap B}(x)$.

(3) $f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x) = f_{A\cup B}(x)$.

(4) $f_A(x) + f_B(x) - 2 f_A(x) f_B(x) = f_{A\Delta B}(x)$ où $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Exercice 2

(1) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer en développant $(k+1)^3$ la quantité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3.$$

(3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n).$$

Exercice 3

(1) On rappelle que pour $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$ et $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!} \quad \text{et} \quad (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, a^p \, b^{n-p} \, .$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule du binôme ci-dessus, démontrer que

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

(2) Calculer de même

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p \, .$$

(3) Calculer

$$\sum_{p=1}^{n} p \, C_n^p \quad \text{et} \quad \sum_{p=2}^{n} p(p-1) \, C_n^p.$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{p=1}^{n} p^2 \, C_n^p.$$

(4) Retrouver la question précédente en dérivant (une puis deux fois) la fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto (1+x)^n \, .$$

Exercice 4

On rappelle qu'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble $\mathcal{M}$ est une relation binaire vérifiant pour tout $a, b, c \in \mathcal{M}$:
(i) $a\mathcal{R}a$,
(ii) ($a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$)$\Rightarrow a = b$,
(iii) ($a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$)$\Rightarrow a\mathcal{R}c$.

Soient E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
(1) Montrer que la relation $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.
(2) Trouver le plus petit majorant et le plus grand minorant de $\{A, B\}$ pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$.