UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 1

Interrogation n°4 : mardi 9 novembre 2010

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.

Durée : 30 minutes

NOM :
PRÉNOM : CORRIGÉ

Exercice 1

1. Donner la table de vérité de « $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ ».

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
1	0	0
1	1	1
0	0	1
0	1	1

2. (a) Soit X un ensemble fini de cardinal n. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de X ?

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^n$$

(b) Soit $X = \{1, 2, 3\}$. Donner la liste de tous les éléments de $\mathcal{P}(X)$. Le résultat est-il compatible avec la réponse à la question (a) ?

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Le cardinal de $\mathcal{P}(X)$ est $8 = 2^3$, ce résultat est bien compatible avec la réponse à la question (a).

3. Pour $a, b \in \mathbb{C}$, développez $(a-b)^5$.

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. $(a-b)^5 = (a+(-b))^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

d'après la formule du binôme de Newton.

Exercice 2

On considère une population de 100 personnes, parmi lesquelles 95 possèdent un téléphone portable, 60 un ordinateur portable et 75 un baladeur numérique.

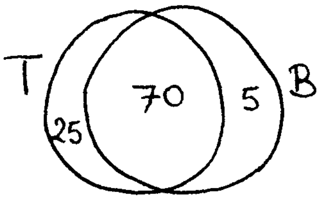
1. Quel est le nombre minimum de ces personnes possédant un téléphone portable et un baladeur numérique ? Indication : on pourra utiliser la formule d'inclusion-exclusion.
2. Quel est le nombre minimum de ces personnes possédant un ordinateur portable, un téléphone portable et un baladeur numérique ? Indication : on pourra utiliser le résultat de la question précédente.

1. Notons T le sous-ensemble des personnes possédant un téléphone portable,
B le sous-ensemble des personnes possédant un baladeur numérique.

D'après le principe d'inclusion-exclusion,

$$|T \cup B| = |T| + |B| - |T \cap B|$$
$$|T \cap B| = |T| + |B| - |T \cup B|$$
$$|T \cap B| \geqslant |T| + |B| - 100 \quad \text{car } |T \cup B| \leqslant 100$$
$$|T \cap B| \geqslant 95 + 75 - 100$$
$$|T \cap B| \geqslant 70.$$

De plus, il existe des configurations pour lesquelles $|T \cap B| = 70$. Par exemple, si les 5 personnes qui n'ont pas de téléphone possèdent un baladeur :



Le nombre minimal de personnes possédant un téléphone et un baladeur est donc 70.

2. Notons O le sous-ensemble des possesseurs d'ordinateurs.

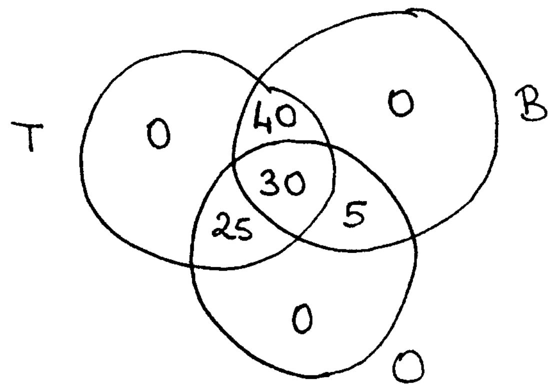
D'après le principe d'inclusion-exclusion,

$$|T\cap B\cap O| = |(T\cap B)\cap O| = |T\cap B| + |O| - |(T\cap B)\cup O|$$

Or $|T\cap B| \geqslant 70$ d'après la question 1.,
$|O| = 60$,
et $-|(T\cap B)\cup O| \geqslant -100$,

donc $|T\cap B\cap O| \geqslant 70 + 60 - 100$
$|T\cap B\cap O| \geqslant 30$.

De plus, dans la configuration décrite par le diagramme ci-dessus, $|T\cap B\cap O| = 30$:



Finalement, le nombre minimum de personnes possédant les trois appareils électroniques est 30.

Exercice 3

Soit n un entier naturel.

1. Montrer pour tout entier naturel k vérifiant $0 \leq k \leq n$ la relation

$$(n+1)\, C_n^k = (k+1)\, C_{n+1}^{k+1}.$$

2. En déduire la relation

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq n$.

Alors $$\frac{k+1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{k+1}{n+1} \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!}$$
$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$
$$= \binom{k}{n}.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $n+1$, on obtient l'égalité demandée :

$$(n+1)\left(\quad\right) = (k+1)\binom{n+1}{k+1}.$$

2. $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$ d'après la question 1.
$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}$$ en factorisant par $\frac{1}{n+1}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}$$ en réindexant la somme ("$\ell = k+1$")

$$= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{\ell=0}^{n+1}\binom{n+1}{\ell} - \binom{n+1}{0}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{\ell=0}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}1^{\ell}\,1^{n+1-\ell} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left((1+1)^{n+1} - 1\right)$$ d'après la formule du binôme de Newton

$$= \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right).$$