UNIVERSITÉ DE RENNES 1

**Algèbre et Arithmétique 1**

*Interrogation n°3 : mardi 19 octobre 2010*

*Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.*

Durée : 30 minutes

**NOM :**
**PRÉNOM :**

## Exercice 1

**1** Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -1$.

**a)** Donner, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la valeur de $u_n$ en fonction de $n$.

**b)** Calculer $u_{50}$.

**2** Soit $f$ une application d'un ensemble $A$ dans un ensemble $B$, et soit $X$ une partie de $B$. Donner la définition de $f^{-1}(X)$.

**3** Soit $f$ une application d'un ensemble $A$ sur un ensemble $B$. Donner la définition de « $f$ est surjective ».

## Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

Le but de l'exercice est de démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

**1** Écrire l'hypothèse de récurrence.
**2** Pour tout $n \in \mathbf{N}$, exprimer $S_{n+1}$ en fonction de $S_n$ et de $n$.
**3** Démontrer le résultat.

## Exercice 3

**1** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n^3 - n$ est un multiple de 3. (On précisera l'hypothèse de récurrence utilisée.)

**2** Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $a_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$.

**a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_{n+1} = 2a_n + 7 \cdot 3^{2n+2}$.

**b)** Montrer par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est un multiple de 7. (On précisera l'hypothèse de récurrence utilisée.)