

Lois de réciprocité explicites pour une extension de type Lubin-Tate

Lionel FOURQUAUX

17 février 2002

Ce sujet m'a été proposé par M. Pierre COLMEZ. Il consiste à généraliser la théorie de Perrin-Riou au cadre des extensions associées à un groupe de Lubin-Tate au lieu de celui des extensions cyclotomiques, en obtenant en particulier une loi de réciprocité explicite et une construction de fonction L p -adique, et d'aboutir ainsi à une meilleure compréhension des fonctions L p -adiques des motifs.

Table des matières

| | | |
|---|--------------------------------|---|
| 1 | Des fonctions L p -adiques | 1 |
| 2 | La théorie de Perrin-Riou | 2 |
| 3 | Le sujet | 4 |

1 Des fonctions L p -adiques

Comme on ne sait pas construire les fonctions ζ et L p -adiques directement, toutes les constructions utilisent à la base le même principe : interpoler certaines valeurs spéciales de la fonction complexe, éventuellement un peu modifiée, ou des nombres reliés à cette fonction, à l'aide d'une expression intégrale. Par exemple, la fonction ζ de Kubota-Leopold s'obtient en interpolant des valeurs de la fonction ζ de Riemann aux entiers négatifs (c.f. [Col]) :

Théorème 1. *Si p est un nombre premier, et si $i \in \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$ (respectivement $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ si $p = 2$), alors il existe une unique fonction $\zeta_{p,i}$ continue sur \mathbf{Z}_p (respectivement sur $\mathbf{Z}_p \setminus \{1\}$ si $i = 1$) telle que la fonction $s \mapsto (s-1)\zeta_{p,i}(s)$ soit analytique sur \mathbf{Z}_p et que l'on ait $\zeta_{p,i}(-n) = (1-p^n)\zeta(-n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $-n \equiv i \pmod{p-1}$.*

Une telle construction donne en particulier de nombreux résultats de congruence entre les valeurs de la fonction considérée. Ainsi, dans le cas simple de la fonction ζ de Kubota-Leopold, on peut par exemple obtenir assez directement le théorème de Clausen-von Staudt (qui affirme que si b_n est le n^{e} nombre de Bernoulli, alors $b_n + \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p-1|n}} \frac{1}{p}$ est entier).

Le problème qui se pose lorsque l'on veut passer au cas des fonctions L associées aux motifs est qu'il faut disposer de suffisamment de nombres algébriques à interpoler (valeurs critiques au sens de Deligne). Ce point de vue conduit à des constructions comme celles de Manin et Vishik, Katz, Hida... On a ainsi obtenu des résultats assez importants dans le cas « ordinaire ». En revanche, le cas non ordinaire reste mal compris, sauf pour les courbes elliptiques à multiplication complexe, pour lesquelles on dispose d'une construction due à Katz pour la fonction L p -adique d'une variable, qui a été réétudiée récemment par Schneider et Teitelbaum (c.f. [ST]). Dans l'ensemble, ces résultats apparaissent assez disparates, et l'on souhaiterait obtenir une théorie plus unifiée et mieux comprise.

2 La théorie de Perrin-Riou

Un tel cadre, même s'il est encore en partie conjectural, est fourni par la théorie de Perrin-Riou, dans le cas d'une famille de représentations obtenue en tordant une représentation donnée par les puissances du caractère cyclotomique.

L'une des façons de comprendre ce point de vue est de considérer la construction de Coleman pour la fonction ζ de Kubota-Leopold, qui s'appuie sur le résultat suivant (c.f. [Col98]) :

Théorème 2 (Coleman). *Notons $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un système de racines primitives p^n -ièmes de l'unité tel que $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n$, et posons $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_p(\varepsilon_n)}$ l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}_p(\varepsilon_n)$. Alors, si $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est un élément de la limite projective $\varprojlim \mathcal{O}_{\mathbf{Q}_p(\varepsilon_n)}^*$ pour les applications normes, alors il existe une unique série $\text{Col}_u(T) \in (\mathbf{Z}_p[[T]])^*$ telle que l'on ait $\text{Col}_u(\varepsilon_n - 1) = u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.*

Posons $\mathbf{Q}_p(\infty) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{Q}_p(\varepsilon_n)$. On considère alors $u_\gamma = (u_{\gamma,n})_{n \in \mathbf{N}}$ avec $u_{\gamma,n} = \frac{\gamma(\varepsilon_n) - 1}{\varepsilon_n - 1}$ si $n \in \mathbf{N}$, pour $\gamma \in \text{Gal}(\mathbf{Q}_p(\infty)/\mathbf{Q}_p)$. Alors u_γ est un élément de $\varprojlim \mathcal{O}_{\mathbf{Q}_p(\varepsilon_n)}^*$, et si λ_{u_γ} est l'unique distribution tempérée sur \mathbf{Z}_p dont la transformée d'Amice est $\text{Col}_{u_\gamma}(T)$, alors on montre que l'on a obtenu une intégrale p -adique exprimant les valeurs de la fonction ζ de Riemann aux entiers négatifs :

$$\int_{\mathbf{Z}_p} x^{n+1} d\lambda_{u_\gamma}(x) = (-1)^n (1 - \chi(\gamma)^{n+1}) \zeta(-n) \quad (n \in \mathbf{N}),$$

où $\chi : \text{Gal}(\mathbf{Q}_p(\infty)/\mathbf{Q}_p) \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$ désigne le caractère cyclotomique. À partir de là, on obtient aisément la fonction ζ de Kubota-Leopold.

La théorie de Perrin-Riou peut être vue comme une vaste généralisation de cette construction. Avant d'en donner une idée, commençons par fixer quelques notations.

Comme les périodes p -adiques des variétés algébriques ne vivent pas dans \mathbf{C}_p , on est amené à considérer plutôt les anneaux de Fontaine \mathbf{B}_{cris} et \mathbf{B}_{dR} .

Le corps \mathbf{B}_{dR} est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète \mathbf{B}_{dR}^+ , muni d'une action continue de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p} = \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, de corps résiduel \mathbf{C}_p et dont l'idéal maximal est engendré par un élément t sur lequel $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit par le caractère cyclotomique. Cet élément t est un analogue p -adique de $2\pi i$. C'est dans le corps \mathbf{B}_{dR} que vivent les périodes p -adiques des variétés algébriques.

Les périodes p -adiques des variétés qui ont bonne réduction modulo p vivent dans un sous-anneau \mathbf{B}_{cris} de \mathbf{B}_{dR} , stable par l'action de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et muni d'un morphisme de Frobenius φ qui commute à l'action de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$. De plus, ces sous-anneaux sont reliés par les suites exactes fondamentales :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbf{Q}_p \rightarrow \mathbf{B}_{\text{cris}}^{\varphi=1} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}/\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathbf{Q}_p \rightarrow \mathbf{B}_{\text{cris}} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{cris}} \oplus \mathbf{B}_{\text{dR}}/\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Si V est une représentation p -adique de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on pose alors $\text{D}_{\text{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes V)^{\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ et $\text{D}_{\text{cris}}(V) = (\mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes V)^{\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}}$. On dit que V est de de Rham (respectivement cristalline) si $\dim_{\mathbf{Q}_p} \text{D}_{\text{dR}}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$ (respectivement $\dim_{\mathbf{Q}_p} \text{D}_{\text{cris}}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$).

Si V est une représentation de de Rham, on dispose d'une application « exponentielle de Bloch-Kato »

$$\exp_V : \text{D}_{\text{dR}}(V) \rightarrow H^1(\mathbf{Q}_p, V).$$

De plus, si l'on pose V^* la représentation duale de V , et $V(k)$ la représentation tordue par la k -ième puissance du caractère cyclotomique, alors $\text{D}_{\text{dR}}(V^*(1))$ s'identifie naturellement au dual de $\text{D}_{\text{dR}}(V)$, ce qui permet de définir l'exponentielle duale

$$\exp_{V^*(k+1)}^* : H^1(\mathbf{Q}_p, V(-k)) \rightarrow \text{D}_{\text{dR}}(V(-k)).$$

Soit Γ le groupe de Galois de l'extension maximale de \mathbf{Q} non ramifiée en dehors de p . Notons $\mathcal{D}(\Gamma)$ (respectivement $\mathcal{D}_0(\Gamma)$, $\tilde{\mathcal{D}}(\Gamma)$) l'ensemble des distributions sur Γ (respectivement des mesures sur Γ , des

pseudo-mesures sur Γ — c'est-à-dire des éléments du localisé de $\mathcal{D}_0(\Gamma)$ en la partie multiplicative engendrée par les images réciproques par le caractère cyclotomique des mesures μ sur \mathbf{Z}_p^* de la forme $\int_{\mathbf{Z}_p^*} f(x) d\mu(x) = f(u) - u^k \eta(u) f(1)$ pour $k \in \mathbf{Z}$, $u \in 1 + p\mathbf{Z}_p$ et η un caractère d'ordre fini de \mathbf{Z}_p^* . Soit Λ l'algèbre d'Iwasawa, c'est-à-dire l'algèbre des mesures sur Γ à valeurs dans \mathbf{Z}_p (on a $\mathcal{D}_0(\Gamma) = \mathbf{Q}_p \otimes \Lambda$). Si A est un \mathbf{Z}_p -module topologique complet muni d'une action continue de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on définit le module d'Iwasawa $H_{\text{Iw}}^i(\mathbf{Q}_p, A)$ comme le Λ -module $H^i(\mathbf{Q}_p, \Lambda \otimes A)$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 3 (Perrin-Riou). *Si V est une représentation cristalline de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors il existe une unique application « exponentielle de Perrin-Riou » :*

$$\text{Exp}_V : \mathbf{D}_{\text{cris}}(V) \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}(\Gamma) \otimes_{\Lambda} H_{\text{Iw}}^1(\mathbf{Q}_p, V)$$

telle que si k est un entier suffisamment grand et si $v \in \mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$, alors

$$\int_{\Gamma} \chi(x)^k d\text{Exp}_V(v)(x) = \exp_{V(k)} \left(\frac{1 - p^{-1}\varphi^{-1}}{1 - \varphi} \left(\frac{\Gamma(k)}{(-t)^k} v \right) \right),$$

avec χ le caractère cyclotomique.

On obtient donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{D}}(\Gamma) \otimes_{\Lambda} H_{\text{Iw}}^1(\mathbf{Q}_p, V) & \xrightarrow{\mu \mapsto \int_{\Gamma} \chi(x)^k d\mu} & H^1(\mathbf{Q}_p, V(k)) \\ \text{Exp}_V \uparrow & & \uparrow \text{exp}_{V(k)} \\ \mathbf{D}_{\text{cris}}(V) & \xrightarrow{\text{divers facteurs}} & \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) \end{array}$$

⏟
dépendant de k

On voit alors que l'exponentielle de Perrin-Riou interpole les exponentielles de Bloch-Kato pour différentes valeurs de k . La loi de réciprocité explicite de Perrin-Riou précise alors ce qui se passe dans la partie droite du diagramme (c.f. [Col98]) :

Théorème 4. *Si $k \in \mathbf{Z}$ est assez petit, alors*

$$\int_{\Gamma} \chi(x)^k d\text{Exp}_V(v)(x) = \left(\exp_{V^*(1-k)} \right)^{-1} \left(\frac{1 - p^{-1}\varphi^{-1}}{1 - \varphi} \left(\frac{\Gamma^*(k)}{(-t)^k} v \right) \right),$$

où l'on a posé $\Gamma^*(k) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Gamma(k+s)$. Si de plus $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)^{\varphi=1} = \mathbf{D}_{\text{cris}}(V)^{\varphi=p^{-1}} = 0$, alors

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \int_{\Gamma} \langle \chi(x) \rangle^s d\text{Exp}_V(v)(x) = \exp_V \left(\frac{1 - p^{-1}\varphi^{-1}}{1 - \varphi} v \right),$$

avec $\langle x \rangle = x\omega(x)^{-1}$, $\omega(x)$ désignant la racine $(p-1)$ -ième (respectivement carrée si $p=2$) dans \mathbf{Q}_p^* qui est congrue à x modulo p (respectivement 4 si $p=2$). Enfin, si de plus $\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi} v \in (\mathbf{B}_{\text{cris}}^+ \otimes V)^{\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}}$, alors $\int_{\Gamma} \langle \chi(x) \rangle^s d\text{Exp}_V(v)(x)$ est analytique au voisinage de $s=0$ et on a

$$\exp_{V^*(1)} \left(\int_{\Gamma} d\text{Exp}_V(v)(x) \right) = \frac{1 - p^{-1}\varphi^{-1}}{1 - \varphi} v.$$

On peut montrer à partir de là que le prolongement par linéarité de l'exponentielle de Perrin-Riou à $\tilde{\mathcal{D}}(\Gamma) \otimes D_{\text{cris}}(V)$ réalise un isomorphisme de $\tilde{\mathcal{D}}(\Gamma) \otimes D_{\text{cris}}(V)$ sur $\tilde{\mathcal{D}}(\Gamma) \otimes_{\Lambda} H_{\text{Iw}}^1(\mathbf{Q}_p, V)$, dont l'inverse sera noté Log_V .

À partir de là, on peut retrouver les fonctions L p -adiques. Par exemple, dans le cas où $V = \mathbf{Q}_p(1)$, si $u \in \varprojlim \mathcal{O}_{\mathbf{Q}_p(\varepsilon_n)}^*$ et si $\delta(u)$ est l'élément de $\tilde{\mathcal{D}}(\Gamma) \otimes_{\Lambda} H_{\text{Iw}}^1(\mathbf{Q}_p, V)$ qui lui est associé par la théorie de Kummer, alors $t\text{Log}_{\mathbf{Q}_p(1)}(\delta(u))$ est une distribution sur Γ à valeurs dans \mathbf{Q}_p , qui est exactement celle obtenue en tirant par χ^{-1} la restriction à \mathbf{Z}_p^* de la distribution λ_u issue de la construction de Coleman. Dans le cas général, il faut supposer que l'on dispose d'un « système compatible d'éléments spéciaux », analogue de u , et l'on obtient alors une théorie assez satisfaisante pour les fonctions L p -adiques ainsi construites (même si elle est encore en partie conjecturale).

3 Le sujet

La question que je compte étudier est la suivante. La construction de Perrin-Riou s'applique à la famille de représentations obtenue en tordant une représentation donnée par le caractère cyclotomique. Ne pourrait-on pas l'étendre au cas plus général où l'extension cyclotomique $\mathbf{Q}_p(\infty)$ est remplacée par l'extension associée à un groupe de Lubin-Tate donné ?

Certains éléments laissent à penser que oui, notamment le fait que la construction de Coleman fonctionne dans ce cas. On obtiendrait alors une construction beaucoup plus générale des fonctions L p -adiques des motifs, et sans doute à une meilleure compréhension des dites fonctions.

Références

- [Col] Pierre Colmez, *Fonctions L attachées aux caractères de Dirichlet*, Notes de cours, version provisoire.
- [Col98] ———, *Fonctions L p -adiques*, Séminaire N. Bourbaki (1998), no. 851.
- [ST] Peter Schneider and Jeremy Teitelbaum, *p -adic Fourier theory*, prépublication, <http://www.math.uni-muenster.de/u/pschnei/publ/pre/fourier.dvi>.