R_j) の差核†に一致するとき(→ 271 代数多様体 F B)，前層 $\mathscr{F}$ は層†であるという．

以後はアーベル群の層のみを考えることにする．右導来関手†の理論を使うと，層 $\mathscr{F}$ のコホモロジー群 $H^{\cdot}(\mathscr{S},\mathscr{F})$ が定義される．$H^{\cdot}(X_{\mathrm{et}},\mathscr{F})$, $H^{\cdot}(X_{\mathrm{Zar}},\mathscr{F})$, $H^{\cdot}(X_{\mathrm{fl}},\mathscr{F})$ を $\mathscr{F}$ を係数とする X の**エタール・コホモロジー**(étale cohomology)，**Zariski コホモロジー**，**平坦コホモロジー**と呼ぶ．概型の間の射 $f\colon X\to Y$ と X_{et} (または $X_{\mathrm{Zar}},X_{\mathrm{fl}}$)上の層 $\mathscr{F}$ に対し，$(f_*\mathscr{F})(S)=\mathscr{F}(X\times_Y S)$ とおくことによって Y_{et} 等上の層である順像 $f_*\mathscr{F}$ が定まり，その右導来関手として**高次順像** $R^if_*\mathscr{F}$ も定義される．

例をあげる．$\boldsymbol{G}_m(S)=\Gamma(S,\mathscr{O}_S)^*$ によって定まる前層 $\boldsymbol{G}_m$ はエタール(Zariski，平坦)サイトにおける層で，可逆層に関する降下†(descent)理論によると，$\mathrm{Pic}(X)=H^1(X,\mathscr{O}_X^*)=H^1(X_{\mathrm{Zar}},\boldsymbol{G}_m)\cong H^1(X_{\mathrm{et}},\boldsymbol{G}_m)\cong H^1(X_{\mathrm{fl}},\boldsymbol{G}_m)$ なる標準的同型がある．n を $\mathscr{O}_S$ の元として可逆な有理整数とすれば，n 乗準同型 $\boldsymbol{G}_m\to\boldsymbol{G}_m$ の核 μ_n は $X_{\mathrm{et}},X_{\mathrm{fl}}$ の層(1 の n 乗根の層)であり，$1\to\mu_n\to\boldsymbol{G}_m\to\boldsymbol{G}_m\to 1$ は X_{et} と X_{fl} における層完全列．

以下ではエタール位相について述べる．概型 X の幾何学的点† $x\colon \mathrm{Spec}\,\bar{k}\to X$ に対し，x の持ち上げ $i\colon \mathrm{Spec}\,\bar{k}\to U$ つきのエタール射 $f\colon U\to X$ を，x の**エタール近傍**(étale neighborhood)という．X_{et} 上の層 $\mathscr{F}$ の x での茎† $\mathscr{F}_x$ は $\mathscr{F}_x=\varinjlim_U \Gamma(U,\mathscr{F})$ (U は x のエタール近傍)で定義される．X として体 k のスペクトル $\mathrm{Spec}\,k$ をとると，幾何学的点 $\mathrm{Spec}\,\bar{k}$ での茎 $\mathscr{F}_{\bar{k}}$ は $G=\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 加群であって，$H^i(X_{\mathrm{et}},\mathscr{F})\cong H^i(G,\mathscr{F}_{\bar{k}})$ が成立する．言い換えると，$\mathrm{Spec}\,k$ 上のエタール・コホモロジー理論は k の Galois コホモロジー理論と等価である．

X_{et} 上の層 $\mathscr{F}$ が**ねじれ層**(torsion sheaf)であるとは，任意の $s\in\mathscr{F}(S)$, $S\in\mathrm{Ob}(\mathrm{Et}/X)$ に対してある正の自然数 n があって $ns=0$ となることをいう．ねじれ層 $\mathscr{F}$ が X 上のエタール有限概型 $\widetilde{X}$ で表現される，すなわち $\mathscr{F}=\mathrm{Hom}(\cdot,\widetilde{X})$ となるとき，$\mathscr{F}$ は**局所定数層**(locally constant sheaf)と呼ばれる．G を有限アーベル群，例えば $\boldsymbol{Z}/(n)$ として，$\widetilde{X}=\coprod_{g\in G}X_g$ ($X_g=X$) で表現される層は自明な局所定数層で，単に G で表す．n が $\mathscr{O}_X$ で可逆なら μ_n は局所定数層であるが一般には自明ではない．また $\cup_i X_i=X$ となる X の有限個の部分概型 X_i が存在し，制限 $\mathscr{F}|_{X_i}$ が局所定数層となるとき，$\mathscr{F}$ は**構成可能層**(constructible sheaf)と呼ばれる．ネーター概型 X_{et} 上，任意のねじれ層は構成可能層の一般化された帰納的極限(filtered direct limit)である．

ねじれ層のコホモロジーは，古典的な特異コホモロジーに似た性質を持つ．ネーター概型 X が分離閉体 k 上固有(またはアフィン)，$i>2\dim X$ (または $i>\dim X$)ならば $H^i(X_{\mathrm{et}},\mathscr{F})=0$．$f\colon X\to S$ が概型間の固有射ならば，S の任意の幾何学的点 s における $R^qf_*\mathscr{F}$ の茎は $H^q(X_{s,\mathrm{et}},\mathscr{F})$ ($X_s=s\times_S X$)と同型，さらに f がスムーズであって，$\mathscr{F}$ が自明，s が別の幾何学的点 t の特殊化†ならば，$H^q(X_{t,\mathrm{et}},\mathscr{F})$ から $H^q(X_{s,\mathrm{et}},\mathscr{F})$ への同型がある．

X が固有でない場合，**コンパクト台コホモロジー**も重要である．体 k 上の有限型分離概型 X に対して，k 上の完備†概型への埋め込み $j\colon X\to V$ が存在する(**永田の完備化定理**[14])．X_{et} 上のねじれ層 $\mathscr{F}$ に対し，X の外では 0 で $\mathscr{F}$ を拡張したものとして V_{et} 上の層 $j_!\mathscr{F}$ を定義する．$H_c^q(X_{\mathrm{et}},\mathscr{F})=H^q(V_{\mathrm{et}},j_!\mathscr{F})$ は完備化 V の取り方には依存せず同型で，X 上の**コンパクト台コホモロジー**と呼ばれる．概型の有限型分離射 $f\colon X\to S$ に対しても同様に固有射への埋め込みを用いて，**コンパクト台の高次順像** $R^qf_!\mathscr{F}$ が定義される．f がネーター概型の有限型分離射，$\mathscr{F}$ が構成可能層なら $R^qf_!\mathscr{F}$ も構成可能層(**有限性定理**)，また $f\colon X\to S$ が有限型 $\boldsymbol{C}$ 概型間の射のとき，$(R^qf_!\mathscr{F})^{an}\cong R^qf_!^{an}\mathscr{F}^{an}$ (**比較定理**)．特に X が $\boldsymbol{C}$ 上完備なら，エタールと特異両コホモロジーの同型 $H^q(X_{\mathrm{et}},\boldsymbol{Z}/(n))\cong H^q(X^{an},\boldsymbol{Z}/(n))$ が得られる．

k を体，$\bar{k}$ をその分離閉包†，X を有限型 k 概型，$\bar{X}=\mathrm{Spec}\,\bar{k}\times_{\mathrm{Spec}\,k}X$ とする．k の標数 p と異なる素数 l を固定すると，$Z_l(1)=\varprojlim_n\mu_{l^n}$ は階数 1 の $\boldsymbol{Z}_l$ 加群で，$\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ が円分指標として作用する．$Z_l(i)=(\boldsymbol{Z}_l(1))^{\otimes i}$ とおく．$H^q_{\mathrm{et}}(\bar{X},\boldsymbol{Q}_l(i))=\boldsymbol{Q}_l\otimes_{\boldsymbol{Z}_l}\varprojlim_n(H^q(\bar{X}_{\mathrm{et}},\boldsymbol{Z}_l(i)/l^n\boldsymbol{Z}_l(i)))$ を **l 進エタール・コホモロジー**(l-adic étale cohomology)という．$\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ は $\bar{X}_{\mathrm{et}}$ への作用を通じて $H^q_{\mathrm{et}}(\bar{X},\boldsymbol{Q}_l(i))$ にも作用する．

X が k 上固有スムーズのとき，l 進エタール・コホモロジーは次のような良い性質を持っている．1) 自然に定まるカップ積によって $H^{\cdot}_{\mathrm{et}}(\bar{X},\boldsymbol{Q}_l(\cdot))$ は $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 作用つきの環構造を持つ．2) $A^i(\bar{X})$ を余次元 i の代数的輪体が生成する Chow 環†とすると，**輪体写像**と呼ばれる自然な準同型 $\mathrm{cl}^i(\bar{X})\colon A^i(\bar{X})\to H^{2i}_{\mathrm{et}}(\bar{X},\boldsymbol{Q}_l(i))$ が定義される．輪体写像は Chow 環とコホモロジー環の間の環準同型であり，$\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ 作用に関して同変である．3) d を X の次元とすると**跡写像**(trace map)と呼ばれる同型 $H^{2d}_{\mathrm{et}}(\bar{X},\boldsymbol{Q}_l(d))\cong\boldsymbol{Q}_l$ が標準的に定義され，カップ積が誘導する $\boldsymbol{Q}_l$ 双線形形式 $H^i_{\mathrm{et}}(\bar{X},\boldsymbol{Q}_l(j))\otimes H^{2d-i}_{\mathrm{et}}(\bar{X},\boldsymbol{Q}_l(d-j))\to H^{2d}_{\mathrm{et}}(\bar{X},\boldsymbol{Q}_l(d))\cong\boldsymbol{Q}_l$ は非退化である(**Poincaré 双対**)．4) d を X の次元とし，h を豊富な因子とすると，$0\leqq m\leqq d$ に対して $(\cup\mathrm{cl}^1(h))^m\colon H^{d-m}_{\mathrm{et}}(\bar{X},\boldsymbol{Q}_l(j))\to H^{d+m}_{\mathrm{et}}(\bar{X},\boldsymbol{Q}_l(m+j))$ は同型(**強 Lefschetz 定理**)．4) Künneth の公式†，Lefschetz 跡公式が成立する(→ 205 数論幾何学)．

コホモロジー以外に，エタール位相における重要な不変量として代数的基本群がある(→ 266 代数多様体 A の[参][2] I)．(FEt/X) を X 上有限エタールな概型の圏，x を X の幾何学的点とする．(FEt/X) から有限集合のなす圏への関手 F_x を，$F_x(Y)=\mathrm{Hom}_X(x,Y)$ (x の Y における逆像)で定義する．$\pi_1^{\mathrm{alg}}(X,x)=\{(g_Y\colon F_x(Y)\xrightarrow{\sim}F_x(Y))_{Y\in(\mathrm{FEt}/X)}\mid g_Y$ は Y に関して関手的$\}$ は被覆変換群のなす射影系として自然に射影有限群†であり，F_x は (FEt/X)