XIV. Théorème de finitude pour un morphisme propre ; dimension cohomologique des schémas algébriques affines
M. Artin

version : 87d325d 2017-10-31 14:54:43 +0100

Table des matières

Cet exposé contient deux théorèmes importants qui se démontrent en utilisant le théorème de changement de base pour un morphisme propre. **145**

1. Théorème de finitude pour un morphisme propre

Théorème 1.1. — *Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et de présentation finie. Soit A un anneau noethérien à gauche qui est une $\mathbf{Z}/n$-algèbre pour $n \in \mathbf{N}$ convenable. Soit F un faisceau d'ensembles (resp. de groupes, resp. de A-modules)* constructible *sur X. Alors le faisceau f_*F (resp. $R^1 f_*F$, resp. $R^q f_*F$ pour chaque $q \geq 0$) est également constructible.*

En particulier, on a :

Corollaire 1.2. — *Soit X un schéma propre sur le spectre d'un corps séparablement clos k, et soit F un faisceau abélien de torsion constructible sur X. Alors les groupes $H^q(X, F)$ sont finis pour chaque $q \geq 0$.*

Remarque 1.3. — Le théorème est faux pour les faisceaux abéliens si l'on omet la condition que f soit propre, comme on voit en prenant $F = \mathbf{Z}/p$, $p = \operatorname{car} k$, $X = \mathbf{E}^1_k$, l'espace affine, et f l'inclusion de X dans $\mathbf{P}^1_k$, ou le morphisme structural $X \to \operatorname{Spec} k$. Cependant, on conjecture[1] qu'il est vrai si F est premier aux caractéristiques résiduelles de S et S est **146** « excellent » EGA IV 7.8. On peut le démontrer, lorsqu'on dispose du théorème de résolution des singularités (par exemple en caractéristique nulle) pour un schéma excellent S d'égales caractéristiques (XIX 5.1).

1. N.D.E. : Ofer Gabber a présenté la généralisation suivante de ?? lors des conférences en l'honneur de Luc Illusie et de Pierre Deligne en 2005. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de type fini de schémas noethériens quasi-excellents (EGA IV 7.8), et soit F un faisceau constructible de $\mathbf{Z}/n$-modules sur $X_{\text{ét}}$ avec n inversible sur Y. Alors, les faisceaux $R^i f_*F$ sur $Y_{\text{ét}}$ sont constructibles et nuls sauf pour un nombre fini de i. Il y a des assertions analogues pour faisceaux constructibles d'ensembles resp. de groupes d'ordre inversible sur Y.
Avant le résultat de Gabber, le théorème ?? était connu dans le cas suivant. Soit S un schéma régulier de dimension ≤ 1 et soit $f : X \to Y$ un morphisme de S-schémas de type fini et F un faisceau de A-modules à gauche sur $X_{\text{ét}}$. Alors, les faisceaux $R^i f_*F$ sont constructibles (SGA 4 1/2 Finitude 1.1).

Démonstration de 1.1. L'assertion est locale sur S et on peut donc prendre S affine. Alors S est limite des spectres d'anneaux de type fini sur $\mathbf{Z}$, et les données du théorème sont telles qu'on peut les obtenir, par changement de base $S \to S_0$, d'un morphisme propre $f_0 : X_0 \to S_0$ avec S_0 de type fini sur $\mathbf{Z}$ et un faisceau constructible F_0 sur X_0, cf. EGA IV 8 et IX 2.7.4. Or, puisque l'image inverse d'un faisceau constructible est encore constructible (IX 2.4 (iii)), on est ramené, en appliquant XII 5.1 au morphisme de changement de base $S_0 \leftarrow S$, à démontrer la constructibilité de $f_{0,*}F_0$ (resp. de $R^q f_{0,*}F_0$), d'où le

Lemme 1.4. — *Il suffit de vérifier 1.1 avec S de type fini sur* Spec $\mathbf{Z}$.

Lemme 1.5. — *L'assertion ensembliste de 1.1 est vraie, c'est-à-dire f_*F est un faisceau constructible d'ensembles si F l'est.*

Démonstration. On peut supposer S noethérien (1.4). Soit $F \to G = \prod_i \pi_{i,*}(C_i)$ une injection avec $\pi_i : X_i \to X$ fini et C_i constant et constructible sur X_i (IX 2.14). On a $f_*F \subset f_*G$ et par suite (IX 2.9 (ii)) il suffit de traiter le cas $F = G$. Or $f_*G = \prod_i (f\pi_i)_* G_i$, et un produit fini de faisceaux constructibles sur S est constructible (IX 2.6 (ibis)). En remplaçant X par X_i, on est ramené au cas où $F = D_X$ est un faisceau constant constructible, à valeur D. Or
147 en vertu de XII 5.1 (i), la fibre $f_*(F)_{\overline{s}}$ est isomorphe à $D^{C(s)}$, où $C(s) = \pi_0(X_{\overline{s}})$, donc elle est finie. D'après IX 2.13 (iii) il suffit de démontrer que la fonction « nombre d'éléments de la fibre de f_*F » est constructible sur S. Or cette fonction est card(D^C), où C est la fonction « nombre de composantes connexes dans la fibre géométrique », et C est constructible (EGA IV 9.7.9), d'où le résultat.

Lemme 1.6. — *Soit S un schéma noethérien, $f : X \to S$ propre, F un faisceau de groupes (resp. de A-modules) constructible sur X, q un entier égal à* 0 *ou* 1 *(resp. un entier* ≥ 0*). Soient S_i ($1 \leq i \leq n$) des sous-schémas de S tels que $S = \cup_i S_i$ et soient F_i, $f_i : X_i \to S_i$ les « restrictions » des données aux S_i. Alors si pour tout i, $R^q f_{i,*}F_i$ est constructible, il en est de même de $R^q f_* F$.*

Démonstration. La restriction de $R^q f_* F$ à S_i est isomorphe à $R^q f_{i,*}F_i$ d'après XII 5.1, et le lemme suit de IX 2.8.

On procède maintenant par des raisonnements analogues à ceux de XII 8 :

Lemme 1.7. — *Soient S noethérien,*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & \overline{X} \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de morphismes propres, et $j : U \to X$ un ouvert tel que l'ouvert $\overline{U} = U \times_X \overline{X}$ s'envoie isomorphiquement sur U. Soit $Y = X - U$ le schéma fermé réduit et soient $f_0 : Y \to S$ et $i : Y \to X$ les morphismes canoniques. Supposons le théorème 1.1 vrai[2] *pour $\overline{f}$, f_0 et π. Alors il est également vrai pour f.*

2. N.D.E. : L'hypothèse sur $R^q\pi_*$ ne figure que pour $q = 0$ dans la démonstration. Dans ce cas, on sait déjà la constructibilité par (1.5).

Démonstration. Traitons d'abord le cas d'un faisceau de A-modules F sur X. On a la suite exacte 148

$$0 \longrightarrow j_! j^* F \longrightarrow F \longrightarrow i_* i^* F \longrightarrow 0,$$

et compte tenu de la suite exacte de cohomologie correspondante pour les $R^q f_*$, et de IX 2.6, on voit qu'il suffit de vérifier la constructibilité des $R^q f_*$ pour les membres extrêmes (notons que $i_* i^* F$ est constructible d'après IX 2.4 (iii) et IX 2.14 (i), donc $j_! j^* F$ l'est aussi (IX 2.6). Puisque i est une immersion fermée,

$$(R^q f_*) i_* (i^* F) \simeq (R^q f_{0,*})(i^* F),$$

(VIII 5.6), d'où la constructibilité dans ce cas d'après l'hypothèse sur f_0. De plus, désignant par $\overline{j} : \overline{U} \to \overline{X}$ le morphisme d'inclusion et $\overline{F} = \pi^* F$, on a

$$(*) \qquad j_! j^* F \simeq \pi_* \overline{j}_! \overline{j}^* \overline{F},$$

comme on vérifie en définissant d'abord une flèche $\to$, et prouvant qu'elle est inversible fibre par fibre en utilisant XII 5.1. En chaque point géométrique $\overline{y}$ de Y, la restriction de $\overline{j}_! \overline{j}^* \overline{F}$ à la fibre $\overline{X}_{\overline{y}}$ de $\overline{X}$ sur X est nulle, et par suite XII 5.1 la fibre de $(R^q \pi_*)\ (\overline{j}_! \overline{j}^* \overline{F})$ en $\overline{y}$ est nulle pour chaque $q \geq 0$. Puisque d'autre part π induit un isomorphisme au-dessus de $X - Y$, on a $(R^q \pi_*)\ (\overline{j}_! \overline{j}^* \overline{F}) = 0$ si $q > 0$. De la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = (R^p f_*)(R^q \pi_*)(\overline{j}_! \overline{j}^* \overline{F}) \Longrightarrow R^n \overline{f}_* (\overline{j}_! \overline{j}^* \overline{F})$$

et $(*)$ on déduit des isomorphismes

$$(R^q \overline{f}_*)(\overline{j}_! \overline{j}^* \overline{F}) \simeq (R^q f_*)(j_! j^* F)$$

pour $q \geq 0$. Puisque $\overline{j}_! \overline{j}^* \overline{F}$ est constructible (même raisonnement que pour $j_! j^* F$) le membre de gauche l'est aussi, d'où la constructibilité de $(R^q f_*)(j_! j^* F)$ et donc de $R^q f_* F$. 149

Supposons maintenant que F soit un faisceau de groupes constructible sur X. Remplaçons $\pi : \overline{X} \to X$ par $\pi \amalg i : (\overline{X} \amalg Y) \to X$. Il suffit ainsi de démontrer que si $\pi : \overline{X} \to X$ est *surjectif* et si 1.1 est vrai pour π et pour $\overline{f}$, il l'est également pour f. Soit d'abord $\overline{F}$ un faisceau de groupes constructible sur $\overline{X}$. Alors $\pi_* \overline{F}$ est constructible sur X (1.5) et on a une injection $(R^1 f_*) \pi_* \overline{F} \hookrightarrow (R^1 \overline{f}_*) \overline{F}$. Le membre de droite est constructible par hypothèse, et par suite le membre de gauche l'est aussi (IX 2.9 (ii)). Or, puisque π est surjectif, on a une injection $F \to \pi_* \pi^* F = G$. Le faisceau $\overline{F} = \pi^* F$ est constructible, donc G et $R^1 f_* G$ sont aussi constructibles, comme on a vu ci-dessus. On est ainsi ramené au lemme suivant :

Lemme 1.8. — *Soient S noethérien, $f : X \to S$ un morphisme propre, et $F \overset{u}{\hookrightarrow} G$ une injection de faisceaux de groupes constructibles sur X. Si $R^1 f_* G$ est constructible, $R^1 f_* F$ l'est aussi.*

Démonstration. Soit $C = G/F$ qui est un faisceau constructible d'espaces homogènes sous G (appliquer IX 2.6). Considérons la suite exacte

$$(*) \qquad f_* C \xrightarrow{\delta} R^1 f_* F \xrightarrow{u^1} R^1 f_* G.$$

Pour démontrer que $R^1 f_* F$ est constructible, il suffit par récurrence noethérienne et 1.6 de démontrer que si $S \neq \varnothing$, il existe un ouvert non-vide de S sur lequel $R^1 f_*(F)$ soit constructible. On peut donc supposer $R^1 f_* G$ localement constant, donc puisque la constructibilité est une notion locale pour la topologie étale, on peut supposer que S est irréductible et $R^1 f_* G$ est constant (et constructible), à valeur $E = \{e_1, \dots, e_n\}$. Soit D_i $(i = 1, \dots, n)$ le

150 sous-faisceau de $R^1 f_* F$ image inverse de la section e_i par u^1. On a, puisque dans un topos « les sommes sont universelles », $R^1 f_* F = \amalg_i D_i$, et il suffit donc de démontrer que chaque D_i est constructible sur un S' convenable étale sur S et non-vide.

Rappelons que $R^1 f_* F$ est le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{R}^1 F$, où $\mathcal{R}^1 F(S') = H^1(X \times_S S', F)$. Par suite on peut supposer (en remplaçant S par un S' non-vide étale sur S) que D_i est le faisceau « vide » (donc constructible), *ou* qu'il existe un élément $\alpha \in H^1(X, F)$ qui induit une section $\overline{\alpha}$ de D_i. Dans ce dernier cas, soit

$$f_* C^\alpha \xrightarrow{\delta} R^1 f_* F^\alpha \longrightarrow R^1 f_* G^\alpha$$

la suite exacte déduite de $(*)$ « en tordant à l'aide de α ». On a

$$R^1 f_* F^\alpha \simeq R^1 f_* F \quad , \quad R^1 f_* G^\alpha \simeq R^1 f_* G,$$

et la section de $R^1 f_* F^\alpha$ correspondant à $\overline{\alpha}$ est la section unité. Donc le sous-faisceau D_i^α de $R^1 f_* F^\alpha$ correspondant à D_i est l'image inverse de la section unité de $R^1 f_* G^\alpha$, i.e. , D_i^α est l'image de $f_* G^\alpha$ par δ. Puisque $f_* G$ est constructible (1.5) il en est de même de D_i^α, donc de D_i (appliquer IX 2.6), d'où le lemme.

Lemme 1.9. — *Soit S noethérien et*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & \overline{X} \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

151 *un diagramme commutatif de morphismes propres. Si le théorème 1.1 est vrai pour f et π, il l'est également pour $\overline{f}$.*

Démonstration. Dans le cas d'un faisceau $\overline{F}$ de A-modules constructible, on utilise la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = (R^p f_*)(R^q \pi_*)\overline{F} \Longrightarrow (R^n \overline{f}_*)\overline{F}.$$

Par hypothèse, on trouve que $E_2^{p,q}$ est constructible pour chaque p, q, et par suite l'aboutissement l'est aussi, comme il résulte alors de IX 2.6.

Soit $\overline{F}$ un faisceau de groupes constructible. On la suite exacte (XII 3.2)

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow (R^1 f_*)\pi_* \overline{F} \longrightarrow (R^1 \overline{f}_*)\overline{F} \longrightarrow f_*(R^1 \pi_*)\overline{F},$$

où les membres extrêmes sont constructibles d'après l'hypothèse et 1.5. On procède comme dans la démonstration de 1.8 : Il suffit par récurrence noethérienne et 1.6 de supposer $S \neq \varnothing$, et de démontrer la constructibilité sur un ouvert non-vide convenable. On peut donc supposer $f_*(R^1 \pi_*)\overline{F}$ localement constant, et (par localisation étale) même constant et constructible (IX 2.4 (i)) à valeur $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Soit D_i le sous-faisceau de $(R^1 \overline{f}_*)\overline{F}$ image inverse de e_i, de sorte que $(R^1 \overline{f}_*)\ \overline{F} = \coprod_i D_i$. Il suffit de démontrer que chacun des faisceaux D_i induit un faisceau constructible sur un S'/S étale connexe et non-vide convenable. Si D_i n'est pas le « faisceau vide », on se ramène au cas où il existe un élément $\alpha \in H^1(\overline{X}, \overline{F})$ qui induit une section $\overline{\alpha}$ de D_i. Soit

$$0 \longrightarrow (R^1 f_*)\pi_* \overline{F}^\alpha \longrightarrow (R^1 \overline{f}_*)\overline{F}^\alpha \longrightarrow f_*(R^1 \pi_*)\overline{F}^\alpha$$

la suite exacte déduite de $(*)$ en tordant $\overline{F}$ à l'aide de α. La section de $(R^1\overline{f}_*)\,\overline{F}^\alpha$ correspondant à $\overline{\alpha}$ est la section unité, et par suite le sous-faisceau D_i^α de $(R^1\overline{f}_*)\overline{F}^\alpha$ correspondant à D_i est l'image inverse de la section unité de $f_*(R^1\pi_*)\,\overline{F}^\alpha$, d'où $D_i^\alpha \simeq (R^1 f_*)\pi_*\overline{F}^\alpha$, qui est 152
bien un faisceau constructible, C.Q.F.D.

Lemme 1.10. — *Il suffit de vérifier 1.1 dans le cas où S est de type fini sur* $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$*, et f est projectif et de dimension relative* ≤ 1.

Démonstration. Supposons d'abord que f soit projectif et procédons par récurrence sur la dimension relative de f, qu'on peut supposer finie, quitte à remplacer S par un ouvert affine. Si f est de dimension relative $\leq n$, avec $n \geq 2$, on peut trouver, localement sur S, un morphisme fini $\pi : X \to \mathbf{P}^n_S$, et on se ramène par 1.9 et IX 2.14 (i) au cas où f est le morphisme structural de $\mathbf{P}^n_S$. Considérons le diagramme commutatif de morphismes

$$\begin{tikzcd} & \overline{X} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dd, "\overline{f}"] \arrow[dr, "a"] & \\ \mathbf{P}^n_S \arrow[dr, "f"'] & & \mathbf{P}^1_S \arrow[dl, "b"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

déjà envisagé dans la démonstration de XII 8.3, où $\overline{X}$ est déduit de $\mathbf{P}^n_S$ en faisant éclater le sous-schéma fermé $Y \simeq \mathbf{P}^{n-2}_S$. La dimension relative de b est ≤ 1, celle de a est $\leq n-1$, et par suite le théorème est vrai pour a et b par l'hypothèse de récurrence, donc pour $\overline{f}$ par (1.9). De plus, la dimension de π est ≤ 1, celle de $f_0 : Y \to S$ est $\leq n-1$. Il résulte donc de 1.7 que 1.1 est vrai pour f, donc pour tout morphisme projectif. Soit maintenant f propre arbitraire, et procédons par récurrence noethérienne sur X : on peut supposer le théorème vrai pour chaque sous-schéma fermé distinct de X et que $X \neq \varnothing$. Soit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & \overline{X} \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

un diagramme du type donné par le lemme de Chow XII 7.1. En appliquant 1.7 à ce dia- 153
gramme, on déduit 1.1 pour f, d'où le lemme.

1.11. — Nous pouvons maintenant achever la démonstration de 1.1. Si F est un faisceau de groupes constructibles, on peut trouver une injection $F \hookrightarrow G = \prod_i \pi_{i,*}C_i$ avec π_i fini et C_i constant et constructible (IX 2.14), et il résulte de 1.8 qu'on peut supposer F constant. De même, si F est un faisceau de A-modules constructible, on peut, en appliquant IX 2.14, trouver une résolution $F \to G^\bullet$, $G^\bullet = \{0 \to G^0 \to G^1 \to G^2 \to \dots\}$, de F, telle que chaque

G^ν soit de la forme $G^\nu = \prod_i \pi_{i,*} C_i$, et on se réduit par la suite spectrale de la résolution $G^\bullet$,

$$E_2^{p,q} = H^p((R^q f_*) G^\bullet) \Longrightarrow (R^n f_*) F,$$

au cas où F est constant et constructible, à valeur M.

Rappelons que A est une $\mathbf{Z}/n$-algèbre. Soit ℓ un nombre premier qui divise n. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ell M \longrightarrow M \longrightarrow M/\ell M \longrightarrow 0,$$

et il suffit encore de prouver 1.1 pour ℓM et $M/\ell M$.

On se réduit alors, par une récurrence facile, au cas A est une $\mathbf{Z}/\ell$-algèbre, $\ell \in \mathbf{P}$, et où M est un A-module de type fini. Alors M est un espace vectoriel sur $\mathbf{Z}/\ell$, et par suite le morphisme canonique

$$H^q(Y, \mathbf{Z}/\ell) \otimes_{\mathbf{Z}/\ell} M \longrightarrow H^q(Y, M)$$

est bijectif, quel que soit Y quasi-compact et quasi-séparé (en effet, c'est trivial si M est de
154 rang fini, et les deux membres commutent aux limites inductives (VI 5.1 et VII 3.3)), donc

$$[R^q f_*(\mathbf{Z}/\ell)] \otimes_{\mathbf{Z}/\ell} M \xrightarrow{\sim} R^q f_*(M).$$

Il suffit donc évidemment de démontrer que $R^q f_*(\mathbf{Z}/\ell)$ est constructible en tant que $\mathbf{Z}/\ell$-Module, c'est-à-dire, on est réduit au cas $A = \mathbf{Z}/\ell$, ce que nous supposons désormais.

Notons que le cas où F est de dimension relative ≤ 0 (i.e. où f est fini) et F est arbitraire résulte maintenant de VIII 5.6 et de 1.5.

Procédons par récurrence noethérienne sur S. D'après 1.6, on peut supposer $S \neq \varnothing$, et se permettre de remplacer S par un ouvert non-vide quelconque. De plus, on peut supposer S intègre, de point générique s. La fibre X_s est un schéma algébrique de dimension ≤ 1, et par suite il existe une extension radicielle K' de $k(s) = K$, telle que le normalisé Y de $(X_s \otimes_K K')_{\text{réd}}$ soit lisse au-dessus de Spec K' [i]. En remplaçant S par un ouvert non-vide, on peut supposer qu'il existe un morphisme fini radiciel surjectif $S' \to S$ tel que S'_s soit K-isomorphe à Spec K', et un morphisme fini surjectif, un morphisme lisse et projectif $\overline{X}' \to S'$ et un S'-morphisme fini surjectif $\pi : \overline{X}' \to X' = X \times_S S'$ qui induise $Y \to X_s \otimes_K K'$ sur les fibres en le point générique s de S (EGA IV 9.6.1). Or, d'après VIII 1.1, il est inoffensif de faire une extension radicielle. On peut donc remplacer S par S' et X par X', c'est-à-dire, on peut supposer que f s'insère dans un diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & \overline{X} \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & S & \end{tikzcd},$$

155 où π est surjectif et fini, et $\overline{f}$ est lisse. De plus, d'après la construction, on peut supposer qu'il existe un sous-schéma fermé Y de X tel que la fibre générique de Y soit finie, et tel que π induise un isomorphisme au-dessus de $X - Y$. En remplaçant encore S par un ouvert non-vide, on se ramène au cas où de plus $f_0 : Y \to S$ est un morphisme fini.

i. Cf. EGA IV 17.15.14.

Comme F est constant, $\pi^* F$ est également constant, et $F \to \pi_* \pi^* F$ est injectif parce que π est surjectif. Si F est un faisceau de groupes, il suffit de démontrer que $(R^1 f_*)(\pi_* \pi^* F) \simeq (R^1 \overline{f}_*)(\pi^* F)$ est constructible (1.8). Si F est un faisceau de $\mathbf{Z}/\ell$-modules, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow \pi_* \pi^* F \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

où C est concentré sur Y, parce que π induit un isomorphisme au-dessus de $X - Y$. Il s'ensuit que $R^q f_* C = R^q f_{0,*} C$ est constructible (nul si $q > 0$), et ainsi il suffit encore de démontrer que $(R^q f_*)\,(\pi_* \pi^* F) = (R^q \overline{f}_*)\,(\pi^* F)$ est constructible. En remplaçant f par $\overline{f}$ et F par $\pi^* F$, on est réduit au cas F constant et constructible et f est lisse.

Traitons le cas d'un faisceau de groupes constant, $F = G_X$. Toutes les fibres de $(R^1 f_*)$ G_X sont finies ; en effet, en appliquant XII 5.2 (ii) on est réduit, pour le prouver, au cas où S est le spectre d'un corps séparablement clos et où X est lisse et de dimension ≤ 1 au-dessus de S. Le résultat est connu dans ce cas (SGA 1 X 2.6). Il suffit donc de démontrer que les morphismes de spécialisation sont injectifs (IX 2.13 (ii)). Pour cela, on est réduit au cas S strictement local, et par le théorème de changement de base XII 5.1 (ii) on peut même remplacer S par le spectre d'un anneau de valuation discrète et strictement local. De plus, on peut supposer X connexe. Puisque $H^1(X, G)$ classifie les revêtements principaux galoisiens 156
de X de groupe G, il suffit de vérifier que si $X' \to X$ est un revêtement étale connexe alors le fibre géométrique est également connexe. Cela résulte facilement du fait que f est lisse et propre, à fibres géométriques connexes.

Traitons maintenant le cas $F = (\mathbf{Z}/\ell)_X$. Pour les valeurs 0 et 1 de q le résultat est déjà connu ((1.5) et ci-dessus). D'après XII 5.3 bis, il reste seulement le cas $q = 2$, et de plus, si S est de caractéristique ℓ, on a $R^2 f_*(\mathbf{Z}/\ell) = 0$. En remplaçant S par un ouvert non-vide convenable, on est donc réduit au cas où ℓ est inversible sur S. Alors, d'après XII 5.2 (iii) et X 5.2, la fibre de $R^2 f_*(\mathbf{Z}/\ell)$ en un point géométrique $\overline{s}$ au-dessus de $s \in S$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/\ell)^{c(s)}$, où $c(s)$ est le nombre des composantes irréductibles de dimension 1 de la fibre géométrique $X_{\overline{s}}$. Or c est une fonction constructible sur S (EGA IV 9.7.9), d'où le résultat (IX 2.13 (iii)).

Remarque 1.11. — La démonstration de 1.1 se simplifie beaucoup en utilisant le formalisme de la cohomologie à supports propres, qui sera développé dans **??** comme conséquence directe du théorème de changement de base pour un morphisme propre XII 5.1. D'autre part, l'énoncé 1.1 se généralise au cas où on se donne sur S un faisceau quelconque d'anneaux de torsion $\mathscr{A}$, et qu'on prend sur X un complexe $K^\bullet$ de $f^*(\mathscr{A})$-Modules satisfaisant une condition de « constructibilité » qui, dans le cas particulier 1.1, s'exprimerait simplement en disant que des faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^i(K^\bullet)$ de $K^\bullet$ sont des A-modules constructibles, nuls pour i assez grand.

2. Une variante de la dimension 157

2.1. — Soit X un schéma. On va noter

(2.1.1) $$d(x) = \dim \overline{\{x\}}$$

pour $x \in X$, où $\overline{\{x\}}$ est l'adhérence de $\{x\}$. Si F est un faisceau abélien sur X, on pose

(2.1.2) $$d(F) = \sup\{d(x) \mid x \in X \quad \text{et} \quad F_{\overline{x}} \neq 0\}.$$

On aura besoin d'une notion rectifiée dans le cas local :

Définition 2.2. — *Soient Y le spectre d'un anneau local noethérien universellement caténaire (*EGA *IV 5.6.2) et $f : X \to Y$ un morphisme de type fini. Soit $x \in X$ et $y = f(x)$. On pose*

$$\delta(x) = \dim \overline{\{y\}} + \text{deg.tr. } k(x)/k(y).$$

Si F est un faisceau abélien sur X, on pose

$$\delta(F) = \sup\{\delta(x) \mid x \in X \quad et \quad F_{\overline{x}} \neq 0\}.$$

Proposition 2.3. — (i) *Soit $i : X' \to X$ une immersion et $x' \in X'$. Alors $\delta(i(x')) = \delta(x')$.*

(ii) *Soit X_0 la fibre fermée de X/Y. On a*

$$\delta(x) = \begin{cases} d(x) & si\ \overline{\{x\}} \cap X_0 \neq \varnothing \\ d(x) + 1 & si\ \overline{\{x\}} \cap X_0 = \varnothing; \end{cases}$$

(iii) *$\delta(x) = d(x)$ si f est propre.*

158 *Démonstration.* L'assertion (i) est triviale à partir de la définition. Puisque $\overline{\{x\}} \cap X_0$ n'est pas vide dans le cas f propre, (iii) est conséquence de (ii). Pour (ii), nous pouvons remplacer X par $\overline{\{x\}}$ et Y par $\overline{\{y\}}$ (avec la structure induite réduite), ce qui est permis d'après (i). Soient $x' \in X'$ et $y' = f(x')$. On a la formule (EGA IV 5.6.1.1)

$$\dim \mathscr{O}_{X,x'} = \dim \mathscr{O}_{Y,y'} + \text{deg.tr. } k(x)/k(y) - \text{deg.tr. } k(x')/k(y').$$

Supposons que $X_0 \neq \varnothing$. Alors il est clair que $\sup\limits_{x'} \{\dim \mathscr{O}_{X,x'}\} = \dim X$ est obtenu en prenant pour x' un point fermé de X_0, d'où

$$\dim X = \dim \mathscr{O}_{X,x'} = \dim Y + \text{deg.tr. } k(x)/k(y) = \delta(x).$$

Si $X_0 = \varnothing$, le supremum est évidemment obtenu en prenant pour x' un point fermé dans sa fibre $f^{-1}(y')$, tel que $\dim \overline{\{y'\}} = 1$. Il existe de tels points, parce que les $y' \in Y$ avec $\dim \overline{\{y'\}} = 1$ forment un ensemble très dense (EGA IV 10.1.3, 10.3.1, 10.4.1, 10.5.9). On a donc :

$$\begin{aligned} \dim X = \dim \mathscr{O}_{X,x'} &= \dim \mathscr{O}_{Y,y'} + \text{deg.tr. } k(x)/k(y) \\ &= \dim Y - 1 + \text{deg.tr. } k(x)/k(y) = \delta(x) - 1, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Proposition 2.4. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas de type fini sur le spectre d'un corps k. Soit $x \in X$, $y = f(x)$, et y_0 une spécialisation de y. Soient $f' : X' \to Y'$ le localisé strict de f en un point géométrique $\overline{y}_0$ au-dessus de y_0, et $x' \in X'$ un point au-dessus de x. Alors on a*

$$\delta(x') = d(x) - d(y_0).$$

159 *Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} d(x) &= d(y) + \text{deg.tr. } k(x)/k(y) \\ \delta(x') &= d(y') + \text{deg.tr. } k(x')/k(y'), \end{aligned}$$

où $y' = f'(x')$. De plus

$$\text{deg.tr. } k(x)/k(y) = \text{deg.tr. } k(x')/k(y'),$$

parce que les extensions $k(x')/k(x)$ et $k(y')/k(y)$ sont algébriques. Il reste donc à démontrer que

$$d(y') = d(y) - d(y_0).$$

On peut supposer y maximal dans Y, donc y' maximal dans Y', et alors

$$\begin{aligned} d(y') &= \dim \mathcal{O}_{Y',\bar{y}_0} \\ &= \dim \mathcal{O}_{Y,y_0} \quad \text{(EGA IV 6.1.3)} \\ &= \dim_{y_0} Y - d(y_0) \quad \text{(EGA IV 5.2.3.1)} \\ &= d(y) - d(y_0), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. Dimension cohomologique des schémas algébriques affines

Théorème 3.1 (d). — [(3)] *Soit $f : X \to Y$ un morphisme affine de schémas de type fini sur un corps k. Soit F un faisceau de torsion sur X tel que $d(F) \leq d$* (cf. 2.1). *Alors $d(R^q f_* F) \leq d - q$.*

En particulier, prenant $Y = \operatorname{Spec}(k)$:

Corollaire 3.2. — *Soit X un schéma affine de type fini sur un corps k séparablement clos. Alors*[(4)] 160

$$\operatorname{cd} X \leq \dim X.$$

Corollaire 3.3. — *Soit $X \subset \mathbf{P}_k^N$ un schéma projectif de dimension n sur un corps séparablement clos k, et soit $Y = H \cap X$ une « section hyperplane » de X. Alors pour tout faisceau de torsion F sur X, l'homomorphisme canonique*

$$H_Y^q(X, F) \longrightarrow H^q(X, F)$$

est bijectif pour $q > n + 1$, et surjectif pour $q = n + 1$.

Le corollaire est trivial à partir de 3.2 et de la suite exacte pour un sous-ensemble fermé (V 6.5.4), compte tenu que $X - Y = U$ est affine de dimension $\leq n$. Remarquons que 3.3 est une généralisation d'un des théorèmes de Lefschetz sur les sections hyperplanes : en effet, si X est lisse sur k et F est localement constant et premier à la caractéristique, on peut calculer la cohomologie $H_Y^q(X, F)$ explicitement en utilisant le théorème de pureté cohomologique relatif (XVI 3) et la suite spectrale (V 6.4.3), et on trouve que

$$H_Y^q(X, \mathbf{Z}/n) \simeq H^{q-2}(Y, \mu_n^{-1}) \quad \text{pour tout } q;$$

3. N.D.E. : Le théorème **??** est aujourd'hui connu sous le nom de *théorème de Lefschetz affine.*

4. N.D.E. : Considérons l'assertion analogue en géométrie analytique complexe : Soit X une variété affine sur $\mathbf{C}$ et soit F un faisceau constructible sur X. Alors, on a $H^m(X^{\mathrm{an}}, F) = 0$ pour tout $m > \dim X$, où X^{an} est l'espace analytique associée à X. Bien que cette assertion découle de 3.2 par le théorème de comparaison XVI 4.1, on a aussi deux preuves entièrement de nature analytique données par Pierre Deligne et Hélène Esnault, voir Esnault, H., Variation on Artin's vanishing theorem, *Advances in Math.* **198** (2005), 435–438.

l'homomorphisme $H^{q-2}(Y, \mu_n^{-1}) \to H^q(X, \mathbf{Z}/n)$ déduit de 3.3 n'étant autre que l' « homomorphisme de Gysin », qui sera étudié ultérieurement [i].

Le théorème 3.1 (d) équivaut[5] au suivant :

Corollaire 3.4 (d). — *Soit Y' un schéma strictement local qui est un localisé strict d'un schéma algébrique sur un corps. Soit $f' : X' \to Y'$ un morphisme affine de type fini, et F' un*
161 *faisceau de torsion sur X' tel que $\delta(F') \leq d$* (cf. (2.2)). *Alors $H^q(X', F') = 0$ pour $q > d$.*

En effet, supposons que 3.4 (d) soit vrai. Soit $f : X \to Y$ un morphisme affine de schémas algébriques sur k et soit F un faisceau de torsion sur X tel que $d(F) \leq d$. Soit y un point de Y et ξ un point géométrique au-dessus de y. Pour démontrer 3.1 (d), il faut démontrer que la fibre $(R^q f_* F)_\xi$ est nulle si $d(y) > d - q$.

Soit $f' : X' \to Y'$ le localisé strict de f au point ξ, c'est-à-dire, soit Y' le localisé strict de Y en ξ et soit $X' = X \times_Y Y'$.

Soif F' le faisceau induit de F sur X, de sorte que $(R^q f_* F)_\xi = H^q(X', F')$ (VIII 5.2). On a d'après (2.4)

$$\delta(F') \leq d(F) - d(y) \leq d - d(y),$$

et en appliquant 3.4 (d), on trouve $H^q(X', F') = 0$ si $q > d - d(y)$, d'où le résultat.

Inversement, supposons que 3.1 (d) soit vrai, et soient F', $f' : X' \to Y'$ comme dans l'énoncé de 3.4 (d). Puisque la cohomologie commute aux limites inductives (VII 3.3) et F' est limite inductive de ses sous-faisceaux constructibles (IX 2.9), on peut supposer F' constructible. Or Y' est localisé strict d'un schéma algébrique Y en un point géométrique ξ au-dessus d'un point *fermé* y_0 (X 3.3). Écrivons $Y' = \varprojlim_\alpha Y_\alpha$, où (Y_α) est un système projectif filtrant de schémas affines étales sur Y (VIII 4.5). D'après IX 2.7.4, F' est induit d'un faisceau de torsion constructible F_α sur $X_\alpha = X \times_Y Y_\alpha$ pour α suffisamment grand, et on voit immédia-
162 tement, utilisant 2.4 et EGA IV 9.5.5, qu'on peut de plus supposer que $d(F_\alpha) = \delta(F') \leq d$. En remplaçant Y par Y_α, on est réduit au cas où F' est induit par un faisceau F sur X, avec $d(F) \leq d$. On a alors $R^q f_* F = 0$ si $q > d$, d'après 3.1 (d), donc en particulier

$$(R^q f_* F)_\xi = H^q(X', F') = 0 \quad \text{si} \quad q > d,$$

d'où 3.4 (d).

Comme cas particulier de 3.4 (d), on a

Corollaire 3.5. — *Soit Y' un schéma strictement local de dimension $\leq d$, localisé strict d'un schéma algébrique sur un corps k. Soit $U \subset Y'$ un ouvert affine. Alors $\operatorname{cd} U \leq d$.*

Remarque 3.6. — Il semble très plausible[6] que 3.4, donc 3.5, reste valable pour *tout* schéma local noethérien Y' (pas nécessairement un localisé strict d'un schéma algébrique), du

i. Cf. SGA 2 XIV pour une étude systématique des théorèmes du type de Lefschetz.

5. N.D.E. : Plus précisément, l'argument du texte donne le résultat suivant. L'assertion 3.4 (d') pour $d' \leq d$ implique 3.1 (d), et l'assertion 3.1 (d) implique 3.4 (d). Cela suffit pour conclure ci-après.

6. N.D.E. : Ofer Gabber a réussit à démontrer l'analogue suivant de ?? : Soit $f : X \to Y$ un morphisme affine de type fini avec Y quasi-excellent (EGA IV 7.8) possédant une fonction de dimension δ_Y. Soit δ_X la fonction de dimension rectifiée associée sur X. Pour n inversible sur Y et tout faisceau F de $\mathbf{Z}/n$ sur X on a $\delta_Y(R^q f_* F) \leq \delta_X(F) - q$ pour tout $q \geq 0$. Ici, on définit comme ci-dessus $\delta(G) = \sup\{\delta(x) \mid x \in X \quad \text{et} \quad G_{\bar{x}} \neq 0\}$ pour un faisceau G.

moins si Y' est *excellent* (EGA IV 7.8). C'est ce qui sera prouvé dans (XIX 6) lorsqu'on suppose de plus Y de caractéristique nulle.

4. Démonstration du théorème 3.1

La démonstration se fait par récurrence sur d.

Lemme 4.1. — *3.1 (0) et 3.1 (1) sont vrais.*

Démonstration. Triviale pour $d = 0$, auquel cas supp F est fini sur k, et on applique (VIII 5.5). Soient F, $f : X \to Y$ comme dans l'énoncé de 3.1 et supposons que $d(F) \leq 1$. En remplaçant F par un sous-faisceau constructible (IX 2.9 et VII 3.3), on se réduit au cas où F est constructible. Alors le support de F est contenu dans un sous-schéma fermé de X de 163
dimension ≤ 1 (IX 2.3), et on peut remplacer X par ce sous-schéma, c'est-à-dire, on peut supposer qu'on a $\dim X \leq 1$. D'après IX 5.7, la dimension cohomologique d'un schéma algébrique affine de dimension 1 sur un corps séparablement clos est ≤ 1. Il suffit d'ailleurs de traiter le cas où k est séparablement clos : en effet, soit $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{Y}$ le morphisme déduit de f par le changement de base Spec $\overline{k} \to$ Spec k ($\overline{k}$ la clôture séparable de k). Pour un point géométrique ξ de Y, le localisé strict $f' : X' \to Y'$ de f en ξ s'identifie à un localisé strict de $\overline{f}$, donc la fibre $(R^q f_* F)_\xi$ à une fibre de $R^q \overline{f}_* \overline{F}$. Puisque f est affine, on trouve donc que $R^q f_* F = 0$ si $q > 1$. De plus, il est évident que $d(f_* F) \leq 1$. Pour le cas $q = 1$, notons que l'hypothèse que X soit de dimension ≤ 1 implique qu'il existe une partie fermée finie Z de Y telle que f soit fini au-dessus de $Y - Z$. Il en résulte que $R^1 f_* F$ est nul dans $Y - Z$ (VIII 5.6), d'où $d(R^1 f_* F) \leq 1$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Soit $d \geq 2$ et supposons maintenant que 3.1 (d') (ou, ce qui revient au même, 3.4 (d')) est vrai pour $d' < d$.

Lemme 4.2. — *Pour démontrer 3.4 (d) dans tous les cas, il suffit de traiter le cas où $X' = \mathbf{E}^1_{Y'}$ est l'espace affine dimension 1 sur Y', et où f est le morphisme structural.*

Démonstration. Évidemment, on peut supposer $X' = \mathbf{E}^N_{Y'}$ pour n convenable, parce qu'on peut plonger X' dans un $\mathbf{E}^N_{Y'}$. Supposons $N > 1$ et le résultat connu pour tout Y' et pour $\mathbf{E}^r_{Y'}$ avec $r < N$. Soit F' un faisceau de torsion sur $\mathbf{E}^N_{Y'}$, avec $d(F') \leq d$. Considérons le 164
diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}^N_{Y'} \arrow[rr, "g'"] \arrow[dr, "f'"'] & & \mathbf{E}^{N-1}_{Y'} \arrow[dl, "h'"] \\ & Y' & \end{tikzcd},$$

g' et h' les projections canoniques, de sorte que $\mathbf{E}^N_{Y'}$ est isomorphe à l'espace affine de dimension 1 au-dessus de $\mathbf{E}^{N-1}_{Y'}$. Puisque évidemment chaque anneau localisé strict de $\mathbf{E}^{N-1}_{Y'}$ est aussi le localisé strict d'un schéma algébrique, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux fibres de $R^q g'_* F'$, et on trouve que

$$(*) \qquad \delta(R^q g'_* F') \leq d - q.$$

De plus, 3.4 (d') est vrai pour h', $d' \leq d$, par l'hypothèse de récurrence sur N.

Considérons la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbf{E}_{Y'}^{N-1}, R^q g'_*(F')) \Longrightarrow H^n(\mathbf{E}_{Y'}^N, F').$$

On a $E_2^{p,q} = 0$ si $p > d - q$, comme on trouve en appliquant $(*)$ et 3.4 (d') au morphisme h'. Il s'ensuit que l'aboutissement est nul si $n > d$, d'où le lemme.

Considérons l'énoncé supplémentaire suivant, qui est un cas spécial de 3.5 :

Énoncé 4.3 (d). — *Soit X' strictement local de dimension $\leq d$, localisé strict d'un schéma algébrique sur un corps. Soit $f \in \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$ et soit $U \subset X'$ l'ouvert $U = X' - V(f)$. Alors* $\operatorname{cd} U \leq d$.

Lemme 4.4. — 4.3 (d) *implique* 3.4 (d).

165 *Démonstration.* Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}^1_{Y'} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f'"'] & & \mathbf{P}^1_{Y'} \arrow[dl, "g'"] \\ & Y' & \end{tikzcd}$$

où Y' est comme dans l'énoncé de 3.4 et où $\mathbf{P}^1_{Y'}$ est l'espace projectif, déduit de $\mathbf{E}^1$ « en ajoutant la section Y'_∞ à l'infini ». Soit F' un faisceau de torsion sur $\mathbf{E}^1$ avec $d(\operatorname{supp} F') \leq d$. On a la suite spectrale

$$H^p(\mathbf{P}^1, R^q i_* F') \Longrightarrow H^n(\mathbf{E}^1, F').$$

Or les $R^q i_* F$, pour $q > 0$, sont concentrés sur Y'_∞, qui est Y'-isomorphe à Y'. Puisque Y' est strictement local, il s'ensuit que $H^p(\mathbf{P}^1, R^q i_* F') = 0$ si $p, q > 0$. De plus, d'après le *théorème de changement de base pour un morphisme propre* (XII 5.1), la cohomologie d'un faisceau de torsion sur $\mathbf{P}^1$ peut-être calculée sur la fibre fermée, qui est un schéma de dimension cohomologique ≤ 2 (X 4.3). On a donc $H^p(\mathbf{P}^1, i_* F') = 0$, si $p > 2$. Comme on veut démontrer $H^n(\mathbf{E}^1, F') = 0$ pour $n > d$, et comme $d \geq 2$, on est réduit à démontrer que $H^0(\mathbf{P}^1, R^q i_* F') = 0$ pour $q > d$. Ce groupe, isomorphe aussi à $H^0(Y'_\infty, R^q i_*(F'))$, est en vertu de (VIII 4.6) isomorphe à la fibre de $R^q i_* F'$ au point Q, Q étant le point à l'infini de $\mathbf{P}^1$ dans la fibre fermée.

Il suffit (VII 3.3 et IX 2.9) de traiter le cas où F' est constructible. Alors, puisque $\delta(\operatorname{supp} F') \leq d$, il existe un sous-schéma fermé X' de $\mathbf{P}^1$ avec $\dim X' \leq d$, tel que X' contienne le support de F'. Soit $\widetilde{X}'$ le localisé de X' au point géométrique Q, soit
166 $\widetilde{U} = \widetilde{X}' - \widetilde{X} \times_{\mathbf{P}^1} Y'_\infty$, et soit F le faisceau induit par F' sur U par le morphisme $\widetilde{U} \to \mathbf{P}^1$.
Alors la fibre de $R^q i_* F$ au point Q n'est autre que $H^q(\widetilde{U}, \widetilde{F})$ (VIII 5.2), et on applique 4.3 (d) au schéma strictement local X' et à l'ouvert $\widetilde{U}$.

Le lemme ci-dessous, joint à 4.4, achèvera la démonstration.

Lemme 4.5. — 3.4 (d') *pour* $d' < d$ *implique* 4.3 (d') *pour* $d' \leq d$.

Démonstration. Supposons 3.4 (d') pour $d' < d$. Par récurrence, nous pouvons supposer que 4.3 (d') est vrai pour $d' < d$. Soient les données X', f, U comme dans l'énoncé 4.3 (d). Alors X est localisé strict d'un schéma algébrique X_0 sur un corps k en un point géométrique *fermé*. On peut prendre X_0 affine et de dimension $\leq d$, quitte à le remplacer par un voisinage de x_0. Alors X est limite projective de schémas affines et étales X_i au-dessus de X_0 (VIII 4.5).

Soit F un faisceau de torsion sur U. Il faut démontrer que $H^q(U, F) = 0$ si $q > d$, et il suffit encore de traiter le cas où F est constructible. Alors les données f, F, U proviennent de données analogues sur l'un des X_i (IX 2.7.4). On aura un faisceau F_i sur $U_i = X_i - V(f_i)$ qui « induit » F sur U. Puisque $U = \varprojlim U_i$, on a (VII 5.8)

$$H^q(U, F) = \varinjlim H^q(U_i, F_i).$$

Il suffit donc de démontrer le fait suivant : Quel que soit i, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr] \arrow[dr] & & U'' \arrow[dl] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

où $U \to U_i$ est la flèche donnée, tel que $\mathrm{cd}(U'') \leq d$. En effet, cela impliquera que chaque 167
élément de $H^q(U_i, F_i)$, pour $q > d$, a une image nulle dans $H^q(U, F)$.

Supposons $i = 0$, et considérons le morphisme $g : X_0 \to \mathbf{E}^1_k = Y_0$ donnée par $f_0 \in \Gamma(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$. Soit Y'' le localisé strict de $\mathbf{E}^1_k$ en un point géométrique au-dessus de l'origine, donc Y'' est le spectre d'un anneau de valuation discrète, et soit $X'' = X_0 \times_{Y_0} Y''$.

Le morphisme $X \to X_0$ se factorise par X'' puisque X est strictement local. De plus, l'ouvert $U'' = X'' \times_{X_0} U_0$ n'est autre que la fibre générique de X''/Y''. C'est donc un schéma algébrique affine au-dessus du point générique de Y', et on a évidemment $\dim U'' \leq d - 1$.

Vérifions que $\mathrm{cd}\, U'' \leq d$ (ce qui achèvera la démonstration). Soit K le corps résiduel de Y'' au point générique. C'est un corps de dimension cohomologique 1, c'est-à-dire, on a $\mathrm{cd}(G) = 1$, G le groupe de Galois de la clôture séparable $\overline{K}$ de K (X 2.2). Soit $\overline{U}'' = U'' \times_{\operatorname{Spec} K} (\operatorname{Spec} \overline{K})$. On a $\mathrm{cd}\, \overline{U}'' \leq d - 1$ par hypothèse de récurrence sur d (c'est 3.2 pour un schéma de dimension $< d$). Le fait que $\mathrm{cd}\, U'' \leq d$ suit alors de la suite spectrale de Hochschild-Serre (VIII 8.4)

$$H^q(G, H^q(\overline{U}'', \overline{F})) \Longrightarrow H^n(U, F),$$

d'où le lemme 4.5.