

**Table des matières**

1. Le cas projectif et plat ..... 1  
 2. Le cas de dimension relative  $\leq 1$  ..... 4  
 3. Un résultat auxiliaire sur le groupe de Picard (\*) ..... 6  
 Références ..... 7

**1. Le cas projectif et plat**

132

Rappelons l'énoncé de XII 5.9. bis dans le cas envisagé ici :

**Proposition 1.1.** — Soit  $S$  le spectre d'un anneau hensélien noethérien, et  $f : X \rightarrow S$  un morphisme projectif et plat. Soit  $X_s$  la fibre fermée de  $X/S$ . Le foncteur de restriction

$$\text{Et}(X) \longrightarrow \text{Et}(X_s)$$

est une équivalence de catégories.

Comme nous l'avons déjà remarqué, il résulte de XII 6.5 (i) que la flèche est pleinement fidèle. Il reste à démontrer que chaque revêtement étale  $Y_s$  de  $X_s$  est induit par un revêtement étale  $Y$  de  $X$ .

**Lemme 1.2.** — Soit  $S$  localement noethérien,  $f : X \rightarrow S$  projectif et plat, et  $Y \subset X$  un sous-schéma. Le sous-foncteur  $\epsilon = \prod_{X/S} Y/X : (\text{Sch})/S(\text{Ens})$  du foncteur final « qui exprime la condition  $Y = X$  », i.e. tel que pour  $S' \rightarrow S$ , on ait

$$\epsilon(S') = \begin{cases} \phi & \text{si } Y' \neq X' \\ \{\phi\} & \text{si } Y' = X' \end{cases}$$

(où l'on désigne par un prime l'effet du changement de base  $S' \rightarrow S$ ) est représentable par un sous-préschéma  $Z$  de  $S$ . Si  $Y$  est ouvert (resp. fermé), il en est de même de  $Z$ . 133

*Démonstration.* Soit  $Y$  fermé dans l'ouvert  $U$  de  $X$ , et soit  $C$  le fermé complémentaire de  $U$ . Puisque  $f$  est propre, l'image de  $C$  dans  $S$  est un fermé  $D$ , et il est évident que la condition  $U = X$  est représentée par l'ouvert  $S - D$  de  $S$ . On peut donc supposer qu'on a déjà  $U = X$ , i.e. que  $Y$  est un sous-schéma fermé. Considérons le morphisme surjectif  $\mathcal{O}_X \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_Y$  de  $\mathcal{O}_X$ -modules; dire que  $Y = X$  revient au même que de dire qu'il existe un morphisme  $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_X$  tel que le composé  $\beta\alpha$  soit l'identité, c'est-à-dire, qu'il existe une section de  $\mathbf{Hom}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$  qui relève la section identique de  $\mathbf{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ . Or il résulte de EGA III 7.7.8 que le foncteur qui à  $S'/S$  associe l'ensemble des sections de  $\mathbf{Hom}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$  (resp.  $\mathbf{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ ) est représenté par un fibré vectoriel  $V_1$  (resp.  $V_2$ ) sur  $S$ . Soient  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  le morphisme  $u \mapsto u\alpha$  induit par  $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$ , et  $s : S \rightarrow V_2$  la section correspondant

à l'identité  $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ . L'image inverse de la section  $s$  par  $\varphi$  s'identifie à un sous-schéma fermé  $Z$  de  $S$ , et il est clair que  $Z$  représente le foncteur  $\epsilon$ , d'où le lemme.

**Lemme 1.3.** — Soient  $S$  un schéma localement noethérien,  $f : X \rightarrow S$  un morphisme projectif et plat, et  $E$  un faisceau localement libre sur  $X$ . Soit

$$QE : (\text{Sch})/S \longrightarrow (\text{Ens})$$

le foncteur qui à  $S'/S$  associe l'ensemble  $QE(S')$  des faisceaux quotients  $A'$  de  $E' = E \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$  munis d'une structure d'Algèbre étale sur  $\mathcal{O}_{X'}$ . Ce foncteur est représentable par un schéma localement de type fini sur  $S$ .

134

*Démonstration.* Le foncteur  $\text{Quot}(E)$ ,  $\text{Quot}(E)(S') =$  ensemble des quotients de  $E'$  plat au-dessus de  $S'$ , est représentable par un schéma localement de type fini (TDTE IV, exp. 221), disons par  $Z/S$ . Soit  $M_u$  le quotient « universel » de  $E \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Z$  au-dessus de  $X_Z$ . Le sous-foncteur de  $\text{Quot}(E)$  des quotients qui sont plats au-dessus de  $X'$  est représenté par un ouvert  $U$  de  $Z$ . En effet, soit  $M'$  un quotient de  $E'$ , donné par un  $S$ -morphisme  $S' \rightarrow Z$ . Puisque  $M'$  est plat au-dessus de  $S'$ , dire qu'il est plat au-dessus de  $X'$  revient au même que de dire que pour chaque point  $s' \in S'$ , le module  $M'_{s'}$  est plat au-dessus de la fibre  $X'_{s'}$  (EGA IV 5.9), ce qui équivaut à  $(M_u)_z$  plat au-dessus de la fibre  $Z_z$  au point  $z$  image de  $s'$ . Or l'ensemble  $U$  des  $z \in Z$  tels que  $(M_u)_z$  soit plat sur  $Z_z$ , i.e. que  $M_u$  soit plat sur  $Z$  en les points de  $Z_s$ , est ouvert dans  $Z$  en vertu de EGA IV 11.1.5, d'où l'assertion.

Il suffit maintenant de représenter le foncteur relatif  $QE/U[f]$ . On est donc réduit au lemme suivant, en remplaçant  $S$  par  $U$  et  $X$  par  $X \times_S U$  :

**Lemme 1.4.** — Soient  $S$  un schéma localement noethérien,  $f : X \rightarrow S$  un morphisme projectif et plat, et  $M$  un faisceau localement libre sur  $\mathcal{O}_X$ . Le foncteur  $\text{Alget} : (\text{Sch})/S \rightarrow (\text{Ens})$ , qui à  $S'/S$  associe l'ensemble  $\text{Alget}(S')$  des structures d'algèbre sur  $M'$  étales au-dessus de  $\mathcal{O}_{X'}$ , est représentable par un schéma de type fini sur  $S$ .

*Démonstration.* Nous dirons, pour abrégé, « représentable » en sous-entendant « par un schéma relatif de type fini ». Les fibrés vectoriels rencontrés seront tous définis par des faisceaux cohérents, donc seront de type fini. Une loi de composition bilinéaire dans  $M'$  est donnée par une section du faisceau localement libre  $\mathbf{Hom}(M' \otimes M', M')$ . Puisque  $\mathbf{Hom}(M' \otimes M', M')$  est  $S$ -plat, il résulte de EGA III 7.7.6 que le foncteur « loi de composition bilinéaire » est représentée par un fibré vectoriel  $Z$  sur  $S$ . Il faut vérifier que les conditions supplémentaires sur la loi d'être associative, commutative, et d'avoir une section unité, sont représentées par un sous-schéma de  $Z$ , et on peut (en considérant le foncteur relatif) remplacer  $S$  par  $Z$ , donc peut supposer qu'on a une loi de composition donnée sur  $M$ , et montrer qu'on peut représenter le sous-foncteur de  $S$  exprimant les conditions précédentes par un sous-schéma de  $S$ .

135

Or pour l'associativité, la condition est que deux sections de  $\mathbf{Hom}(M \otimes M \otimes M, M)$  deviennent égales par changement de base  $S' \rightarrow S$ . Soit  $Y$  le produit fibré de ces sections au-dessus du fibré vectoriel correspondant à  $\mathbf{Hom}(M \times M \otimes M, M)$ . Le schéma  $Y$  s'identifie à un sous-schéma fermé de  $X$ , et l'associativité après  $S' \rightarrow S$  est exprimé par la condition  $Y' = X'$ . Elle définit donc un sous-foncteur de  $S$  représentable par un sous-schéma fermé de  $S$  d'après 1.2. Pour la commutativité la condition est que deux sections de  $\mathbf{Hom}(M \otimes M, M)$

deviennent égales, ce qui définit encore un sous-foncteur de  $\mathcal{S}$  représentable par un sous-schéma fermé d'après 1.2. Supposons enfin, ce qui est maintenant loisible, que la loi est déjà associative et commutative, et examinons la condition pour qu'il existe une section unité, qui sera alors unique. Le foncteur qui en  $S'/S$  a comme valeur l'ensemble des sections de  $M'$  est représentable par un fibré vectoriel, d'après EGA III 7.7.6, et tout revient à représenter le sous-foncteur de ce dernier correspondant aux *sections unités* (compte tenu de l'unicité qu'on vient de rappeler). Relativisant comme d'habitude, on peut supposer qu'une section  $\epsilon$  de  $M$  est déjà donnée, et montrer que le sous-foncteur de  $\mathcal{S}$  exprimant qu'elle devient une section unité est représentable. Or, la condition que  $\epsilon$  soit une unité est que le composé des morphismes évidents  $M' \rightarrow M' \otimes M' \rightarrow M'$  soit l'identité, c'est-à-dire que deux sections déterminées de  $\text{Hom}(M, M)$  deviennent égales. On conclut encore grâce à 1.2. 136

Supposons enfin qu'une structure d'algèbre commutative unitaire soit donnée sur le module localement libre  $M$ . La condition d'être étale est ouverte dans  $X$  (SGA I 4.5), donc représentable sur  $S$  par un sous-schéma (ouvert). Ceci achève la démonstration de 1.4, donc de 1.3.

1.5. — Soit maintenant  $Z/S$  l'objet qui représente le foncteur envisagé dans 1.3, et examinons la condition sur  $Z$  d'être lisse sur  $S$  en un point  $z$ . En traduisant SGA 1 III 3.1 en termes du foncteur  $QE$ , on trouve la condition suivante :

Soient  $B$  un anneau artinien local,  $\mathcal{M} = rB$ ,  $J$  un idéal de  $B$  tel que  $J\mathcal{M} = 0$ ,  $S' = \text{Spec } B$ ,  $S'' = \text{Spec } B/J$  et  $S' \rightarrow S$  un morphisme. On utilise des notations évidentes pour les effets des changements de bases  $S' \rightarrow S$  et  $S'' \rightarrow S$ .

(\*) Pour chaque quotient  $A''$  de  $E''$  muni d'une structure d'algèbre étale sur  $\mathcal{O}_{X''}$ , correspondant à un  $S$ -morphisme  $S'' \rightarrow Z$  d'image  $z$ , il existe un quotient  $A'$  de  $E'$ , muni d'une structure d'algèbre étale sur  $\mathcal{O}_{X'}$ , qui l'induit.

Or puisque  $X'$  et  $X''$  ont même espace sous-jacent, une algèbre  $A'$  qui induit  $A''$  est déjà déterminée à isomorphisme unique près (SGA I 8.3). On peut donc exprimer la condition (\*\*\*) ainsi : 137

(\*\*) Soit  $A'$  une algèbre étale sur  $\mathcal{O}_{X'}$ , et  $A''$  l'algèbre induite de  $A'$  sur  $X''$ . Chaque homomorphisme surjectif

$$E'' \xrightarrow{\varphi''} A''$$

correspondant à un morphisme  $S'' \rightarrow Z$  d'image  $z$ , se relève en un homomorphisme (nécessairement surjectif en vertu du lemme de Nakayama)

$$E' \xrightarrow{\varphi'} A'.$$

De la suite exacte

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow B \longrightarrow B/J \longrightarrow 0$$

on déduit une suite exacte de faisceaux sur  $X'$  :

$$0 \longrightarrow J \otimes \mathbf{Hom}(E', A') \longrightarrow \mathbf{Hom}(E', A') \longrightarrow \mathbf{Hom}(E'', A'') \longrightarrow 0.$$

L'obstruction au relèvement de  $\varphi''$  se trouve dans  $H^1(X', J \otimes \mathbf{Hom}(E', A'))$ . Soit  $S_* = \text{Spec } B/\mathcal{M}$ . Puisque  $J\mathcal{M} = 0$ , on a

$$J \otimes \mathbf{Hom}(E', A') \simeq J \otimes \mathbf{Hom}(E_*, A_*),$$

et il est clair que

$$H^1(X', J \otimes \mathbf{Hom}(E_o, A_o)) \simeq J \otimes H^1(X_o, \mathbf{Hom}(E_o, A_o)).$$

Tenant compte du fait que la cohomologie commute à l'extension des corps de base, on trouve le

**Corollaire 1.6.** — Soient  $Z/S$  le schéma qui représente le foncteur de 1.3,  $X_Z = X \times_S Z$ , et  $A_Z$  l'Algèbre étale quotient (« générale ») de  $E_Z$ . Alors  $Z/S$  est lisse en tout point  $z_o$  tel que

$$H^1(X_o, \mathbf{Hom}(E_o, A_o)) = 0,$$

où l'indice zéro désigne la restriction à la fibre  $X_o$  de  $X_Z/Z$  au point  $z_o$ .

Nous pouvons maintenant achever la démonstration de théorème 1.1 : avec les notations du théorème, soit  $Y_o/X_o$  un revêtement étale, donné par un faisceau d'Algèbres  $A_o$ , étale sur  $\mathcal{O}_{X_o}$ . Pour  $n$  assez grand,  $A_o(n)$  est engendré par ses sections (EGA III 2.2.1). On a donc une surjection

$$\mathcal{O}_{X_o}^N \longrightarrow A_o(n) \longrightarrow 0,$$

d'où une surjection

$$\mathcal{O}_{X_o}^N(-n) = E_o \longrightarrow A_o \longrightarrow 0.$$

Choisissons  $n$  assez grand pour qu'on ait aussi

$$(+) \quad H^1(X_o, \mathbf{Hom}(E_o, A_o)) = 0,$$

ce qui est possible en vertu de (EGA III 2.2.1), puisque

$$\mathbf{Hom}(E_o, A_o) = [\mathbf{Hom}(\mathcal{O}_{X_o}^N, A_o)](n) = [A_o(n)]^N.$$

Posons  $E = \mathcal{O}_X^N(-n)$ , et soit  $Z/S$  le schéma qui représente le foncteur envisagé dans 1.3. Le quotient  $A_o$  de  $E_o$  correspond à un point  $z_o \in Z$  de la fibre fermée de  $Z/S$ , rationnel sur  $k(s)$ , et d'après 1.5 et (+),  $Z/S$  est lisse au point  $z_o$ . Or puisque  $S$  est le spectre d'un anneau hensélien et  $Z/S$  passant par  $z_o$  : c'est par exemple immédiat à partir de la définition originale (SGA II 1.1) de la lissité. Il s'ensuit que  $A_o$  est induit par une Algèbre  $A$  étale sur  $X$  (quotient de  $E$ ), ce qui achève la démonstration de 1.1.

## 2. Le cas de dimension relative $\leq 1$

L'assertion est la suivante :

**Proposition 2.1.** — Avec les notations de XII 5.9 bis, le foncteur  $\text{Et}(X) \rightarrow \text{Et}(X_o)$  est une équivalence de catégories si  $S$  est noethérien strictement local, et  $f$  est projectif et de dimension  $\leq 1$ .

D'après XII 8.5, cela achèvera la démonstration de XII 5.1 (ii), qui généralise à la fois 1.1 et 2.1.

**Lemme 2.2.** — Soit  $S$  le spectre d'un anneau local noethérien  $A$ , et soit  $X/S$  projectif, de dimension relative  $\leq n$ . Il existe un  $S$ -schéma projectif et plat  $Z/S$  de dimension relative  $\leq n$  et une immersion fermée  $X \hookrightarrow Z$  au-dessus de  $S$ .

*Démonstration.* Soit  $X \rightarrow \mathbf{P}_S^N$  un plongement projectif au-dessus de  $S$ , et soit  $J \subset A[x_0, \dots, x_N]$  l'idéal homogène qui définit  $X$ . Soient  $k = A/rA$ ,  $S_0 = \text{Spec } k$ ,  $X_0 = X \otimes_S k$ . Alors  $X_0$  est défini par l'idéal homogène  $J_0 = \text{Im}(J \rightarrow k[X_0, \dots, X_N])$ . Comme  $\dim X_0 \leq n$ , il est bien connu qu'il existe des éléments  $f_1^0, \dots, f_{N-n}^0$  de  $J_0$  qui définissent un sous-schéma  $Z_0$  de  $\mathbf{P}_k^N$  de dimension  $n$ . Soient  $f_i$  ( $0 \leq i \leq N-n$ ) des éléments de  $J$  qui relèvent les  $f_i^0$ , et soit  $Z$  le sous-schéma de  $\mathbf{P}_S^N$  défini par  $f_1, \dots, f_v$ . En vertu de EGA IV 11.3,  $Z$  est plat au-dessus de  $S$ , d'autre part en vertu de EGA IV 13.1.5 il est de dimension relative  $\dim Z_0 = n$ . Cela achève de prouver 2.2.

*Démonstration de 2.1.* Soit  $X/S$  projectif de dimension relative  $\leq 1$ , avec  $S$  noethérien strictement local. Nous pouvons supposer  $X$  (donc  $X_0$ ) connexe. Soit  $X \rightarrow Z$  une immersion fermée au-dessus de  $S$  avec  $Z$  projectif, plat et de dimension  $\leq 1$ , cf. 2.2. Soit  $s_0$  le point fermé de  $S$ . On a un diagramme correspondant de schémas

140

$$\begin{array}{ccc} \text{Et}(Z) & \longrightarrow & \text{Et}(X) \\ \downarrow a & & \downarrow b \\ \text{Et}(Z_0) & \xrightarrow{c} & \text{Et}(X_0). \end{array}$$

On veut démontrer que  $b$  est une équivalence. D'après XII 5.8,  $b$  est pleinement fidèle, et il reste à démontrer qu'il est essentiellement surjectif. Or il est essentiellement surjectif d'après 1.1, et il suffit donc de démontrer que  $c$  est essentiellement surjectif. On est ainsi réduit (laissant tomber le  $\cdot_0$ ) à la proposition suivante :

**Proposition 2.3.** — *Soient  $k$  un corps séparablement clos,  $Z$  un  $k$ -schéma, localement de type fini et de dimension  $\leq 1$ , et  $X \hookrightarrow Z$  un sous-schéma fermé connexe. Alors tout revêtement étale de  $X$  est induit par un revêtement étale de  $Z$ .*

*Démonstration.* On peut supposer  $Z$  et  $X$  de dimension 1, le cas où  $X$  est de dimension nulle étant triviale grâce à l'hypothèse faite sur  $k$ . Alors  $Z = X \cup Y$ , où  $Y$  est le sous-schéma fermé adhérence de  $Z - X$ . Soit  $V = X \cap Y$  le schéma intersection, qui est un schéma discret i.e. localement artinien. Le morphisme  $X \amalg Y \rightarrow Z$  est fini et surjectif, donc un morphisme de descente strict pour la catégorie des revêtements étales (SGA IX 4.7). On a évidemment

$$(*) \quad (X \amalg Y) \times_Z (X \amalg Y) = X \amalg Y \amalg V^{(1)} \amalg V^{(2)} \quad (V^{(i)} = V),$$

où  $\text{pr}_i$  envoie  $V^{(i)}$  dans le composant  $X$  de  $X \amalg Y$  et  $V^{(j)}$  dans le composant  $Y$  pour  $j \neq i$ .

Soit  $X'/X$  un revêtement étale de degré  $n$ , et soit  $Y''/Y$  un revêtement de degré  $n$  (par exemple le revêtement *trivial* de degré  $n$ ), de sorte que  $X' \amalg Y''$  est un revêtement de  $X \amalg Y$  de degré  $n$ . Il suffit de trouver des données de descente pour ce revêtement et pour le morphisme  $X \amalg Y \rightarrow Z$ . En regardant (\*), on voit qu'une donnée de descente pour ce morphisme équivaut simplement à un isomorphisme

141

$$X' \times_X V = V' \xrightarrow{\sim} V'' = Y'' \times_Y V.$$

Puisque  $k$  est séparablement clos, il en est de même de  $k(z_i)$ , et par suite chaque revêtement étale de  $V$  est complètement décomposé, d'où  $V' \simeq V''$ , ce qui donne le résultat.

**Remarque 2.4.** — On peut éviter le recours au délicat résultat de SGA IX et à la théorie de la descente, par un argument direct, montrant que la catégorie des revêtements étales de  $Z$  est équivalente à la catégorie des triples  $(X', Y', \theta)$ , où  $X'(Y')$  est un revêtement étale de  $X(Y)$  et  $\theta$  un  $V$ -isomorphisme  $X' \times_X V \simeq Y' \times_Y V$ . Ce résultat, valable pour tout schéma  $Z$  réunion de deux sous-schémas fermés  $X, Y$ , s'établit directement à l'aide du résultat analogue pour la détermination des Modules quasi-cohérents sur  $X$  (lorsque  $X = V(\mathfrak{F})$ ,  $Y = V(\overline{K})$ ,  $J \cap \overline{K} = 0$ ).

### 3. Un résultat auxiliaire sur le groupe de Picard (\*)

**Proposition 3.1.** — Soient  $X$  un schéma noethérien,  $X_\circ$  un sous-schéma fermé de  $X$  tel que a)  $\dim X_\circ \leq 1$ , et b) pour toute partie fermée connexe non-vide  $Y$  de  $X$ ,  $Y_\circ = Y \cap X_\circ$  est connexe non-vide.

- 142 (i) Soit  $Z_\circ$  la réunion des  $\{\overline{x}\} \cap X_\circ$  pour  $x \in \text{Ass } \mathcal{O}_X$  tel que  $\{\overline{x}\} \cap X_\circ$  soit réduit à un point. Alors pour tout diviseur de Cartier  $D_\circ$  sur  $X_\circ$  tel que  $\text{supp } (D_\circ)$  ne rencontre pas  $Z_\circ$ , il existe un diviseur de Cartier  $D$  sur  $X$ , induisant  $D_\circ$  (et si  $D_\circ \geq 0$ , on peut prendre  $D \geq 0$ ).
- (ii) Supposons qu'il existe un ouvert affine  $U_\circ$  de  $X_\circ$  contenant l'ensemble fini  $\text{Ass } \mathcal{O}_{X_\circ} \cup Z_\circ$  (condition automatiquement satisfaite  $X$  est noethérien et si  $X_\circ$  admet un faisceau inversible ample). Alors l'homomorphisme  $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X_\circ)$  est surjectif.

*Démonstration.*

- (i) Comme  $\dim X_\circ \leq 1$ , on voit tout de suite que tout diviseur de Cartier  $D_\circ$  sur  $X_\circ$  a un support discret, donc est la différence de deux diviseurs de Cartier positifs, de supports contenus dans celui de  $D_\circ$ . Cela nous ramène dans (i) au cas où  $D_\circ$  est positif, donc où pour tout  $x \in \text{Supp } D_\circ$ ,  $D_\circ$  est défini en  $x$  par un élément non diviseur de zéro  $f_x \in \text{rad}(\mathcal{O}_{X_\circ, x})$ . Alors  $f_x$  est induit par une section  $g_x$  de  $\mathcal{O}_X$  sur un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$ . Je dis qu'en prenant  $U_x$  assez petit,  $g_x$  est non diviseur de zéro dans  $\mathcal{O}_{U_x}$ , i.e.,  $V(g_x) \cap \text{Ass } \mathcal{O}_{U_x} = \emptyset$ . En effet, il résulte de a) et b) que pour tout  $x \in X$ , et en particulier pour  $z \in \text{Ass } \mathcal{O}_X$ ,  $\overline{z} \cap X_\circ$  est un fermé connexe de  $X_\circ$  donc est, soit réduit à un seul point fermé, soit à une réunion connexe de composantes irréductibles de dimension 1 sur  $X_\circ$ . Comme  $x \notin Z_\circ$  il s'ensuit que dans le premier cas on a  $x \notin \overline{z}$ . Mais pour  $s \in \text{Ass } \mathcal{O}_X$  du deuxième type, on ne peut pas avoir  $x \in \overline{z}$  et  $z \in V(g_x)$ , puisqu'alors  $g_x$  donc  $f_x$  s'annulerait sur une des composantes irréductibles de  $\overline{z} \cap \text{supp } X_\circ$ , qui est aussi une composante irréductible de  $X_\circ$ , ce qui est incompatible avec le fait que  $f_x$  est non diviseur de zéro dans  $\mathcal{O}_{X_\circ, x}$ . Donc quitte à restreindre  $U_x$  on peut supposer que  $V(g_x) \cap \text{Ass } \mathcal{O}_{U_x} = \emptyset$ , i.e.  $g_x$  est non diviseur de zéro. Soit  $Y_x$  l'adhérence de  $V(g_x)$  dans  $X$ , alors  $Y_x \cap X_\circ \cap U_x \subset V(g_x) \cap X_\circ$  admet  $x$  comme point isolé, donc il en est de même de  $Y_x \cap X_\circ$ , donc par la condition b) de la proposition,  $Y_x$  admet une composante connexe  $Y'_x$  telle que  $Y'_x \cap X_\circ = \{x\}$ . De plus, on a  $Y'_x \subset U_x$ , car  $T_x = Y'_x - Y'_x \cap U_x$  est un fermé de  $X$  tel que  $T_x \cap X_\circ = \emptyset$ , donc  $T_x = \emptyset$  en vertu de la condition b). Nous prenons maintenant le diviseur de Cartier  $D'_x$  sur  $X$  qui induit  $Y'_x$  sur  $U_x$ , et induit

i. Figure aussi dans EGA IV 21.9.11, 21.9.12 sous une forme légèrement plus générale ; notamment il suffit dans 3.2 que  $f$  soit *séparé* au lieu de propre.

zéro sur  $X - Y'_x$ , et poserons  $D = \sum_x d'_x$ , qui est un diviseur de Cartier positif sur  $X$ , induisant évidemment  $D_0$  sur  $X_0$ .

- (ii) La conclusion résulte de (i) et du fait que tout module inversible  $L_0$  sur  $X_0$  est isomorphe au module défini par un diviseur de Cartier  $D_0$  dont le support ne rencontre pas  $Z_0$ . Ce dernier fait signifie en effet que pour  $L_0$  admet une section définie sur un ouvert  $V_0$  contenant  $\text{Ass } \mathcal{O}_{X_0} \cup Z_0$ , cette section ne s'annulant en aucun point de ce dernier ensemble. Or il suffit de prouver cela en remplaçant  $X_0$  par l'ouvert affine  $U_0$ , et dans ce cas cela est bien connu et provient du fait qu'un module inversible sur un schéma semi-local est isomorphe au faisceau structural. Enfin, on sait bien que si  $X_0$  admet un faisceau ample, alors toute partie finie de  $X_0$  est contenue dans un ouvert affine. Cela prouve (ii).

On a le corollaire suivant, qui généralise XII 8.6 et qui achève la démonstration de XII 5.1 (iii) :

**Corollaire 3.2.** — *Soit  $S$  le spectre d'un anneau hensélien noethérien, et  $f : X \rightarrow S$  un morphisme propre et de dimension relative  $\leq 1$ . Alors pour tout sous-schéma fermé  $X'_0$  de  $X$  ayant même espace sous-jacent que la fibre fermée  $X_0$  de  $X/S$ , l'application canonique  $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X_0)$  est surjective.* 144

En effet, on applique la proposition à  $(X, X'_0)$ , en notant que la condition a) est satisfaite par hypothèse, et b) en vertu de XII 5.7. Il reste à vérifier l'hypothèse faite dans ii) d'existence d'un  $U_0$ , ce qui résulte du fait que  $X'_0$  est nécessairement projectif (comme toute courbe propre sur un corps).

**Remarque.** — Le lecteur qui ne voudra pas admettre ou reconstituer le fait que les courbes propres sur un corps sont projectives, se bornera à utiliser le corollaire en supposant déjà que  $f$  est projectif, ce qui suffit pour l'application que nous avons en vue ici. Signalons d'autre part que, admettant la projectivité des courbes algébriques propres sur un corps, on conclut que sous les conditions de 3.2  $X$  est nécessairement projectif sur  $S$ , comme on voit en choisissant un  $\xi_0 \in \text{Pic}(X_0)$  ample et le relevant en un  $\xi \in \text{Pic}(X)$ , et appliquant EGA III 4.7.1.

## Références

- [1] Grothendieck A., Technique de descente et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique, in Fondements de la Géométrie Algébrique (Extraits du Sémin. Bourbaki 1957-62) Secrétariat mathématique, 11, rue Pierre Curie.