XI. Comparaison avec la cohomologie classique : cas d'un schema lisse
M. Artin

version : 87d325d 2017-10-31 14:54:43 +0100

Table des matières

1. Introduction

64

Dans le n° 4 nous démontrerons que la cohomologie étale à valeurs dans un faisceau localement constant de torsion coïncide avec la cohomologie classique pour un schéma X lisse sur Spec $\mathbf{C}$. La démonstration, qui est essentiellement celle donnée dans [1], est élémentaire à partir du théorème de Grauert rappelé plus bas (4.3 (iii)), qui dit que chaque revêtement fini de $X(\mathbf{C})$ provient d'un revêtement étale de X ; c'est pourquoi on la donne ici, bien qu'on prouvera un résultat plus complet plus tard, en utilisant le théorème de résolution des singularités de Hironaka [3] [i]. De plus, les bons voisinages construits dans la section 3 pourraient être utiles dans d'autres situations. 65

Notons qu'il n'est pas vrai que la cohomologie étale et la cohomologie classique coïncident pour les faisceaux qui ne sont pas de torsion. Par exemple, on a $H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbf{Z}) = 0$ pour tout schéma normal X (IX 3.6 (ii)), mais la cohomologie classique n'est pas nécessairement nulle.

2. Existence de sections hyperplanes assez générales

Le résultat suivant est classique mais on manque de référence (en attendant EGA V) :

Théorème 2.1. — *Soit k un corps et $V \subset \mathbf{P}^n_k$ un schéma algébrique projectif purement de dimension r. Soit V' le sous-schéma ouvert des points de V lisses sur* Spec k *et soit P un point rationnel de $\mathbf{P}^n$. Alors :*

(i) *Un sous-espace linéaire « assez général » L de dimension donnée d de $\mathbf{P}^n$ coupe V transversalement en chaque point de $L \cap V'$.*

(ii) *Soit $\{H_1, \dots, H_s\}$ $(s \leq r)$ un système d'hyperplans de degré $d \geq 2$ passant par P et soit $Y = H_1 \cap \cdots \cap H_s$. Si $\{H_1, \dots, H_s\}$ est assez général, alors Y coupe V transversalement en chaque point de $Y \cap V'$.*

i. Notons d'ailleurs que la résolution des singularités de Hironaka permet également de donner une démonstration très simple du résultat de Grauert, et à ce titre peut être considérée comme étant de toutes façons à la base des théorèmes de comparaison. Voir à ce sujet l'exposé de Mme M. Raynaud dans SGA 1 XII (North Holland Pub. Cie).

La locution « pour un sous-espace linéaire assez général » veut dire qu'il existe un sous-ensemble ouvert dense U de la grassmannienne qui paramétrise les sous-espaces linéaires de dimension d, tel que l'assertion envisagée sur L soit vraie chaque fois que le paramètre de L est dans U. Cela n'implique donc pas qu'il existe un tel L (défini sur k), si k n'est pas
66 défini. De même, les hyperplans de degré d passant par P sont paramétrisés par un espace projectif $\mathbf{P}^N$, et la locution « pour $\{H_1, \dots, H_s\}$ assez général » veut dire qu'il existe un sous-ensemble ouvert dense U de $(\mathbf{P}^N)^s$ tel que l'assertion envisagée soit vraie chaque fois que le paramètre de $(H_1, \dots, H_s)$ est dans U.

Démonstration (i) : Par récurrence on est ramené immédiatement au cas où L est un hyperplan. Soit (V'_ν) un recouvrement fini ouvert de V'. Si l'assertion (i) est vraie quand on remplace le symbole V' par V'_ν quel que soit ν, c'est aussi vrai pour V', parce que l'intersection d'un nombre fini de sous-ensemble ouverts denses est également ouvert et dense. On peut donc remplacer la situation par un schéma algébrique affine, disons $V \subset \mathbf{E}^n_k = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]$. L'hyperplan L sera l'ensemble des zéros d'une équation linéaire

$$\ell(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Rappelons qu'un schéma lisse est localement intersection complète. On peut donc remplacer V' par un sous-ensemble ouvert de points de V tel qu'il existe des polynômes $f_1(x), \dots, f_{n-r}(x)$ qui s'annulent sur V et des indices $1 \leq j_\nu \leq n$ $(\nu = 1, \dots, n-r)$ tels que le déterminant

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_{j_\nu}} \right| \qquad (i, \nu = 1, \dots, n-r)$$

soit inversible. Disons $j_\nu = \nu$ $(\nu = 1, \dots, n-r)$. Alors on peut résoudre les équations

$$y_j = \sum_{i=1}^{n-r} \quad c_i \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

67 pour c_i comme fonction rationnelle des variables x_i, y_j $(i = 1, \dots, n-r\,;\, j = 1, \dots, n)$, et ces fonctions $c_i(x, y)$ sont définies en chaque point de V'.

Or dire que L coupe V transversalement en un point Q de V' revient à dire que la valeur de la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-r}}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_{n-r}}{\partial x_n} \\ a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

en Q est de rang $n - r + 1$. Donc pour que L coupe V transversalement en chaque point de V' il faut et suffit que le système des $r + 1$ équations

$$a_j = \sum_{i=1}^{n-r} c_i(x, a) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \qquad (j = n - r + 1, \dots, n)$$
$$a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

n'ait aucune solution sur V'. Une telle condition est évidemment constructible en (a) : Soit $X = V' \times A$, où A est l'espace affine de coordonnées $a_0, \dots, a_n$, et soit $Y \subset X$ le sous-ensemble fermé des solutions de ces équations. La condition est que la fibre de Y/A soit vide, ce qui est bien une condition constructible (EGA IV 9.5.1). Il suffit donc de vérifier 68
que la fibre au-dessus du point générique de A est vide, ce qui se voit immédiatement sur la forme des équations. Ceci achève la démonstration de (i). (ii) : Considérons l'application rationnelle $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^N$ donnée par le système linéaire des hyperplans de degré d $(d \geq 2)$ passant par P. Il est bien connu (et on le vérifie aisément) que c'est un « éclatement » de P, donc donne une immersion localement fermée

$$f : \mathbf{P}^n - \{P\} \longrightarrow \mathbf{P}^N.$$

Soit $V'' = V' - (\{P\} \cap V')$, $\overline{V}'' = F(V'')$ et soit L_i l'hyperplan de $\mathbf{P}^N$ correspondant aux hyperplans H_i $(i = 1, \dots, s)$. Alors V'' est isomorphe à $\overline{V}''$, et d'après la définition de f, dire que Y coupe V'' transversalement revient à dire que $L_1 \cap \dots \cap L_s$ coupe $\overline{V}''$ transversalement. En posant $\overline{V} =$ adhérence de $\overline{V}''$, on est ramené à l'assertion (i) pour $\overline{V}$, qui implique (ii) avec V'' au lieu de V'. Il reste donc à considérer le point P, si c'est un point lisse de V. Mais il est évident que si $\{H_1, \dots, H_s\}$ est assez général et P est lisse sur V, alors Y coupe V transversalement en P, d'où le résultat.

3. Construction des bons voisinages

Définition 3.1. — *On appelle fibration élémentaire un morphisme de schémas $f : X \to S$ qui peut être plongé dans un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{f}"] & Y \arrow[l, "i"'] \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

satisfaisant aux conditions suivantes : 69

(i) *j est une immersion ouverte dense dans chaque fibre, et $X = \overline{X} - Y$.*
(ii) *$\overline{f}$ est lisse et projectif, à fibres géométriques irréductibles et de dimension* 1.
(iii) *g est un revêtement étale, et chaque fibre de g est non-vide.*

On vérifie facilement qu'un tel plongement de X est unique s'il existe, à isomorphisme canonique près.

Définition 3.2. — *On appelle bon voisinage relatif à S un S-schéma X tel qu'il existe des S-schémas*

$$X = X_n, \dots, X_0 = S$$

et des fibrations élémentaires $f_i : X_i \to X_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$.

Proposition 3.3. — [i] *Soit k un corps algébriquement clos, $X/\operatorname{Spec} k$ un schéma lisse, et $x \in X$ un point rationnel. Il existe un ouvert de X contenant x qui est un bon voisinage (relatif à* $\operatorname{Spec} k$*).*

Démonstration. Prenons X irréductible. Par récurrence sur $\dim X = n$, il suffit de trouver un voisinage U de x dans X et une fibration élémentaire $f : U \to V$, avec V lisse et de dimension $n-1$. En effet, il existera un voisinage V' de $v = f(x)$ qui est un bon voisinage, et on pourra prendre $U' = U \cap V'$ comme bon voisinage de x.

On peut supposer $X \subset \mathbf{E}^r$ affine. Soit X_0 l'adhérence de X dans $\mathbf{P}^r$. Soit $\overline{X}$ le normalisé
70 de X_0 et $Y = \overline{X} - X$, avec la structure induite réduite. Soit de plus $S \subset \overline{X}$ le sous-ensemble fermé des points singuliers. On a $S \subset Y$ et

$$\begin{aligned} \dim \overline{X} &= \dim X = n, \\ \dim Y &= n-1, \\ \dim S &\leq n-2. \end{aligned}$$

Plongeons $\overline{X}$ dans un espace projectif $\mathbf{P}^N$, au moyen d'un faisceau inversible L qui soit de la forme $M^{\otimes r}$ avec M très ample et $r \geq 2$. Il existe alors des hyperplans $H_1, \dots, H_{n-1}$ de $\mathbf{P}^N$, où H_i est l'ensemble des zéros de

$$\sum_{\nu=0}^{N} a_{i\nu} x_\nu = 0,$$

qui contiennent x et tels que l'intersection $L = H_1 \cap \dots \cap H_{n-1}$ soit de dimension $N-n+1$ et coupe $\overline{X}$ et Y transversalement (2.1). L'intersection $\overline{X} \cap L$ est une courbe lisse et connexe (cela résulte du théorème de Bertini), et $Y \cap L$ est de dimension 0. Choisissons de plus un autre hyperplan

$$H_0 : \sum_{\nu=0}^{N} a_{0\nu} x_\nu = 0$$

tel que H_0 coupe $X \cap L$ transversalement et $H_0 \cap Y \cap L = \varnothing$.

Considérons la projection $\mathbf{P}^N \to \mathbf{P}^{n-1}$ obtenue en « introduisant les coordonnées projectives »

$$y_i = \sum_{\nu=0}^{N} a_{i_\nu} x_\nu.$$

C'est une application rationnelle définie en dehors du centre de projection $C = H_0 \cap \dots \cap H_{n-1}$. Soit $\epsilon : P' \to \mathbf{P}^N$ l'éclatement de C, tel qu'on ait un diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P}^N \arrow[dr] & & P' \arrow[ll, "\epsilon"'] \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathbf{P}^{n-1} & \end{tikzcd}$$

71 où π est un morphisme. Soit $\overline{X}' \subset P'$ l'image inverse « propre » de $\overline{X}$, c'est-à-dire, l'adhé-

i. Ce résultat s'étend sans difficulté à une assertion semi-locale.

rence de $\epsilon^{-1}(\overline{X}-(\overline{X}\cap C))$. Puisque par hypothèse C coupe $\overline{X}$ transversalement, le morphisme $\overline{X}' \to \overline{X}$ est un éclatement de l'ensemble fini $\overline{X} \cap C$. Soient $X' = X - \overline{X} \cap C$, qui s'identifie aussi à un sous-schéma ouvert de $\overline{X}'$, et $Y' = \overline{X}' - X'$ le sous-schéma fermé avec la structure induite réduite. On a un diagramme $\mathbf{D}$ de morphismes

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f'"'] & \overline{X}' \arrow[d, "\overline{f}'"] & Y' \arrow[l, "i"'] \arrow[dl, "g'"] \\
& \mathbf{P}^{n-1} &
\end{tikzcd},$$

et je dis qu'il existe un voisinage V de $v = f'(x)$ tel que la restriction de $\mathbf{D}$ à V satisfasse aux conditions (i), (ii), (iii) de (3.1), donc que $f'_{|V}$ soit une fibration élémentaire. Cela achèvera la démonstration.

La condition (i) sera triviale. Pour (ii), notons que $\overline{X}\cap L$ est une courbe lisse par hypothèse, et on voit immédiatement qu'on a un morphisme biunivoque $\overline{f}'^{-1}(v) \to \overline{X} \cap L$ induit par ϵ. Donc $\left(\overline{f}'^{-1}(v)\right)_{\mathrm{red}} \to \overline{X} \cap L$ est bijectif. Pour vérifier que $\overline{f}'$ est lisse au-dessus d'un voisinage de v, il suffit par le lemme de Hironaka (SGA 1 II 2.6 [ii]) de vérifier qu'il est lisse au point générique de $\overline{f}'^{-1}(v)$. En ce point, $\overline{X}'$ est isomorphe à $\overline{X}$, et le morphisme est lisse parce que L coupe $\overline{X}$ transversalement.

Il reste à démontrer que g' est étale dans un voisinage de v (puisque Y est de dimension $n-1$, il est évident que chaque fibre de g' est non-vide). On a $Y' = \epsilon^{-1}(Y) \amalg D_1 \amalg \cdots \amalg D_r$, où $\overline{X} \cap C = \{P_1, \ldots, P_r\}$ et D_i est l'éclatement de P_i dans $\overline{X}$. Chaque D_i s'identifie à $\epsilon^{-1}(P_i)$, et 72
s'envoie isomorphiquement sur $\mathbf{P}^{n-1}$ est définie en chaque point de Y, et le morphisme induit sur Y n'est autre que $g'_{|\epsilon^{-1}(Y)}$. Il est étale au-dessus de v, car L coupe Y transversalement, donc g' est étale au-dessus de v.

4. Le théorème de comparaison

4.0. — Soit X un schéma localement de type fini sur $\operatorname{Spec} \mathbf{C}$ et considérons la topologie usuelle sur l'espace $X(\mathbf{C})$ des points rationnels de X. On va noter par X_{cl} le site des *isomorphismes locaux* $f : U \to X(\mathbf{C})$, c'est-à-dire, des morphismes f d'espaces topologiques ayant la propriété suivante :

Pour chaque $x \in U$ il existe un voisinage ouvert U_x tel que $f_{|U_x}$ est un homéomorphisme de U_x sur un voisinage ouvert de $f(x)$.

Une famille $\{U_\nu \to U\}$ de morphismes de X_{cl} est dite *couvrante* si U est la réunion des images des U_ν.

ii. et EGA IV 5.12.10.

Puisqu'une immersion ouverte est un isomorphisme local, on a un morphisme (inclusion) de sites (IV) [(iii)]

$$\delta : X_{\mathrm{cl}} \longrightarrow X(\mathbf{C}) \qquad (*). \tag{4.1}$$

Or pour chaque isomorphisme local $U \to X(\mathbf{C})$ il existe d'après la définition un « recouvrement » de U par des ouverts de $X(\mathbf{C})$, et on déduit de ( ) que les topos associés aux deux sites sont équivalents (par δ_*). En particulier on peut remplacer $X(\mathbf{C})$ par X_{cl} pour le calcul de la cohomologie usuelle.

Soit maintenant $f : X' \to X$ un morphisme étale de schémas. Alors $f(\mathbf{C}) : X'(\mathbf{C}) \to$
73 $X(\mathbf{C})$ est un isomorphisme local. Cela résulte immédiatement du critère jacobien (SGA 1 II 4.10) et du théorème des fonctions implicites. Le foncteur $X' \mapsto X'(\mathbf{C})$ donne donc un morphisme de sites

$$\epsilon : X_{\mathrm{cl}} \longrightarrow X_{\mathrm{et}}, \tag{4.2}$$

où X_{et} est le site étale.

Rappelons les résultats suivants [(iv)] :

Théorème 4.3. — (i) *X est connexe et non-vide si et seulement si $X(\mathbf{C})$ est connexe et non-vide.*

(ii) *Le foncteur ϵ est pleinement fidèle.*

(iii) *(« Théorème de Grauert-Remmert »). Le foncteur ϵ induit une équivalence de la catégorie des revêtements finis de $X(\mathbf{C})$, muni de sa topologie habituelle d'espace localement compact, avec la catégorie des revêtements étales de X.*

Nous accepterons (i) comme connu. Il résulte par exemple de (GAGA) [4]. L'assertion (ii) résulte facilement de (i). En effet, pour vérifier l'assertion de surjectivité contenue dans (ii), soit $\varphi : X'(\mathbf{C}) \to X''(\mathbf{C})$ un $X(\mathbf{C})$-morphisme. On peut supposer tous les schémas connexes et affines, donc séparés. Alors le graphe Γ de φ est une composante connexe de $X' \times_X X''(\mathbf{C})$, d'où $\Gamma = Y(\mathbf{C})$ pour une certaine composante connexe Y de $X' \times_X X''$, par (i). Alors Y est le graphe d'un morphisme $f : X' \to X''$ qui induit φ, i.e. la projection $Y \to X'$ est un isomorphisme : en effet $Y(\mathbf{C}) \to X(\mathbf{C})$ est un isomorphisme, d'où on tire facilement qu'il en est de même de $Y \to X'$ (qui est étale, radiciel, surjectif !). Pour (iii) tout revient d'après (ii) à démontrer que chaque revêtement fini de $X(\mathbf{C})$ est de la forme $X'(\mathbf{C})$
74 où $X' \to X$ est étale.

Pour cela, on se réduit immédiatement par descente (SGA 1 IX 4.7) au cas X connexe et normal. Le problème est local sur X (pour la topologie de Zariski), et on peut donc supposer X affine. Soient $f : X \to \mathbf{E}^n$ un morphisme fini, et $T' \to X(\mathbf{C})$ un revêtement fini connexe. On constate immédiatement que le morphisme composé $\eta' : T' \to \mathbf{E}^n(\mathbf{C})$ est un « revêtement analytique » dans le sens de ([2] § 2, Def. 3). D'après ([2] § 2, Satz 8) s'étend à un « revêtement analytique » $\eta : T \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, et il suffit de démontrer que η est induite par un morphisme de schémas $f : Y \to \mathbf{P}^n$ convenable, avec Y normal. Or le théorème fondamental ([2] § 13 Satz 42) affirme qu'il y a une structure canonique analytique normale sur T telle que η induise un morphisme d'espaces analytiques. Puisque alors η est un morphisme fini,

iii. Plus précisément, l'inclusion de catégories $\mathrm{Ouv}(X(\mathbf{C})) \to X_{\mathrm{cl}}$ définit un morphisme de sites (4.1) en sens inverse.

iv. Qui figurent dans l'exposé cité en note de bas de page, p. 2.

l'image directe du faisceau structural sur T est un faisceau $\mathfrak{a}$ d'algèbres analytiques cohérentes sur $\mathbf{P}^n$. Il résulte de GAGA [4] que $\mathfrak{a}$ est le faisceau analytique associé à un faisceau algébrique A sur $\mathbf{P}^n$, et on prend $Y = \operatorname{Spec} A$.

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat suivant :

Théorème 4.4. — *Soit X un schéma lisse sur* $\operatorname{Spec} \mathbf{C}$.

(i) *Il y a une équivalence entre la catégorie des faisceaux de torsion localement constants constructibles sur X_{et} et la catégorie des faisceaux de torsion localement constants, à fibres finies, sur X_{cl}, l'équivalence étant donnée par les foncteurs quasi-inverses $_*$ et *.*

(ii) *Soit F un faisceau de torsion localement constant, à fibres finies, sur X_{cl}, et notons aussi par F le faisceau $\epsilon_* F$ induit sur X_{et}. Alors*
$$R^q \epsilon_* F = 0 \quad \text{si } q > 0.$$

(iii) *Avec les notations de* (i), *le morphisme canonique* 75
$$H^q(X_{\mathrm{et}}, F) \longrightarrow H^q(X_{\mathrm{cl}}, F)$$
est bijectif pour chaque q. En particulier,
$$H^q(X_{\mathrm{et}}, \mathbf{Z}/n) \xrightarrow{\sim} H^q(X_{\mathrm{cl}}, \mathbf{Z}/n)$$
pour chaque q.

Démonstration. Pour (i), notons que les faisceaux en question sont ceux qui sont représentables par des revêtements étales de X (resp. par des revêtements finis de $X(\mathbf{C})$). Puisqu'il y a une équivalence entre les catégories de ces revêtements (4.3), l'assertion (i) en résulte immédiatement. L'isomorphisme de (iii) est conséquence de (ii) et de la suite spectrale de Leray V 5.2 pour ϵ. Il reste donc à démontrer (ii).

Or $R^q \epsilon_* F$ est le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{R}^q F$, où $(\mathcal{R}^q F)(X') = H^q(X'_{\mathrm{cl}}, F)$ pour $X' \to X$ étale. Pour démontrer que $R^q \epsilon_* F = 0$ si $q > 0$, on doit donc démontrer le suivant :

Lemme 4.5. — *Soit $\xi \in H^q(X_{\mathrm{cl}}, F)$ et $x \in X_{\mathrm{cl}} = X(\mathbf{C})$. Il existe un morphisme étale $X' \to X$ dont l'image contient x et tel que l'image de ξ dans $H^q(X'_{\mathrm{cl}}, F)$ soit nulle.*

Démonstration du lemme. Récurrence sur $n = \dim X$; le problème est local sur X pour la topologie étale, et on peut donc supposer F constant, et par dévissage on peut même supposer que $F = \mathbf{Z}/n$. De plus, en remplaçant X par un voisinage ouvert de Zariski de x, on peut (3.3) supposer que X admet une fibration élémentaire (3.1) $f : X \to S$. Reprenons les notations de (3.1) : par calcul direct, on voit que $R^q j_* F = 0$ si $q > 1$, que $R^1 j_{\mathrm{cl}*} F$ est 76
l'extension par 0 d'un faisceau constant sur Y_{cl}, et enfin que $j_{\mathrm{cl}*} F$ est le faisceau constant $\mathbf{Z}/n$ sur $\overline{X}$. De plus, on peut calculer $R^q \overline{f}_{\mathrm{cl}*}(j_{\mathrm{cl}*} F)$ fibre par fibre. De la suite spectrale de Leray
$$E_2^{pq} = R^p \overline{f}_{\mathrm{cl}*}(R^q j_{\mathrm{cl}*} F) \Longrightarrow R^{p+q} f_{\mathrm{cl}*} F$$
on déduit qu'on peut de même calculer $R^{p+q} f_{\mathrm{cl}*} F$ fibre par fibre, et donc que

$R^0 f_{\mathrm{cl}*} \mathbf{Z}/n = \mathbf{Z}/n$,

$R^1 f_{\mathrm{cl}*} \mathbf{Z}/n$ est un faisceau localement constant de torsion sur S_{cl},

$R^q f_{\mathrm{cl}*} \mathbf{Z}/n = 0$ si $q > 1$.

La suite spectrale de Leray

$E_2^{pq} = H^p(S_{\mathrm{cl}}, R^q f_{\mathrm{cl}*} F) \Longrightarrow H^{p+q}(X_{\mathrm{cl}}, F)$

se réduit ainsi à la suite exacte

$$(*) \qquad \cdots \longrightarrow H^q(S_{\mathrm{cl}}, f_{\mathrm{cl}*}F) \longrightarrow H^q(X_{\mathrm{cl}}, F) \longrightarrow H^{q-1}(S_{\mathrm{cl}}, R^1 f_{\mathrm{cl}*}F) \longrightarrow$$

Soit s l'image de x dans S. Par hypothèse de récurrence et grâce à (i), il existe pour chaque classe $\eta \in H^q(S_{\mathrm{cl}}, G)$ (G localement constant de torsion, à fibres finies) un « voisinage étale » $S' \to S$ de s tel que l'image de η dans $H^q(S'_{\mathrm{cl}}, G)$ soit nul. Or les foncteurs $R^q f_{\mathrm{cl}*}$ commutent évidemment aux changements de base étales, et si $S' \to S$ est un voisinage étale de s, alors $X' = X \times_S S' \to X$ est un voisinage étale de x. Lorsque $q \geq 1$ on termine
77 donc grâce à la suite exacte $(*)$ en prenant d'abord $G = R^1 f_{\mathrm{cl}*}F$ et ensuite $G = f_{\mathrm{cl}*}F$. Lorsque $q = 1$, on note que $H^1(X_{\mathrm{cl}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ (resp. $H^1(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$) classifie les revêtements étales principaux de X_{cl} (resp. X), de groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, donc en vertu de 4.3 (iii) l'application $H^1(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to H^1(X_{\mathrm{cl}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ est bijective, d'où aussitôt le résultat d'effacement 4.5 pour $q = 1$.

Variante 4.6. — On peut aussi démontrer (4.5) de la manière élégante suivante, due à Serre : on remarque qu'un bon voisinage (3.2) connexe X satisfait aux deux conditions suivantes :

(i) $\pi_n(X(\mathbf{C})) = 0$ si $n > 1$.
(ii) $\pi_1(X(\mathbf{C}))$ est une extension successive de groupes libres de type fini.

En effet, si $X \to S$ est une fibration élémentaire où S est un bon voisinage, on peut supposer (i) et (ii) vrais pour S par récurrence. Or $X(\mathbf{C}) \to S(\mathbf{C})$ est un espace fibré localement trivial, comme on voit aisément, à fibres isomorphes à $X_0(\mathbf{C})$, où X_0 est une fibre arbitraire de X/S. Or X_0 est une courbe non-singulière connexe *non complète* et il est bien connu que cela implique que $\pi_n(X_0(\mathbf{C})) = 0$ si $n > 1$, et que $\pi_1(X_0(\mathbf{C}))$ est un groupe libre. Alors (i) et (ii) sont des conséquences de la suite exacte d'homotopie

$$\longrightarrow \pi_0(X_0(\mathbf{C})) \longrightarrow \pi_n(X(\mathbf{C})) \longrightarrow \pi_n(S(\mathbf{C})) \longrightarrow \dots$$

Donc $X(\mathbf{C})$ est un espace $K(\pi, 1)$, et cela implique que chaque classe de cohomologie $\xi \in H^n(X(\mathbf{C}), F)$ devient nulle sur le revêtement universel de $X(\mathbf{C})$. Il suffit de démontrer que ξ devient nulle déjà sur un revêtement fini X' de X, ce qui revient au même que de démontrer
78 que $\pi_1 = \pi_1(X(\mathbf{C}))$ est un *bon groupe* (cf. CG 1 16), c'est-à-dire que le morphisme de π_1 dans son complété $\pi_1 = \varprojlim_N \pi_1/N$ (où N parcourt l'ensemble des sous-groupes invariants de π_1 d'indice fini) induit une bijection.

$$H^q(\hat{\pi}_1, M) \xrightarrow{\sim} H^q(\pi_1, M)$$

pour tout π_1-module fini M continu (où le symbole de gauche est la cohomologie de $\hat{\pi}_1$ en tant que groupe profini). Or une extension successive de groupes libres de type fini est un bon groupe (cf. CG I p. 15-16, exc. 1,2), d'où le résultat.

Références

[1] GIRAUD J., « Analysis Situs », Séminaire Bourbaki, Exposé nº 256.

[2] GRAUERT H et REMMERT R., « Komplexe Räume », Math, Ann. Bd. 136, p. 245 (1958).

[3] HIRONAKA H., « Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero » Annals of Math. Vol. 39, nº 1, 2 (1964).

[4] SERRE J.P., « Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique », Annales de l'Institut Fourier, t. VI, p. 1-12 (1956).