IX. Faisceaux constructibles cohomologie d'une courbe algébrique
M. Artin

version : 9f5025b 2017-03-15 15:35:39 +0100

Table des matières

0. Introduction 1

On notera qu'à partir du présent exposé, contrairement aux exposés précédents et à la théorie cohomologique classique des espaces topologiques, nous sommes obligés, pour la validité des énoncés essentiels, de nous limiter aux faisceaux *de torsion* (et souvent même, plus précisément, aux faisceaux de torsion premiers aux caractéristiques résiduelles).

Signalons qu'en fait une théorie « raisonnable » de la cohomologie à coefficients entiers (ou même réels), pour les variétés sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$, analogue à la théorie classique pour le cas $k = \mathbf{C}$, n'existe pas (comme l'a remarqué Serre). Plus précisément, il n'existe pas de foncteur contravariant H^1, défini disons sur la catégorie des schémas projectifs lisses sur le corps K alg. clos de car. $p > 0$, à valeurs dans la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{R}$ (ou un sous-corps de $\mathbf{R}$), « commutant aux produits », i.e. tel que $H^1(X \times Y) \xleftarrow{\sim} H^1(X) \times H^1(Y)$, et tel que $\dim H^1(X) = 2$ si X est une courbe connexe de genre 1. En effet, il s'ensuivrait que si X est une variété abélienne sur k, alors l'application $u \mapsto u^1$ de $\mathrm{End}(X)$ dans $\mathrm{End}(H^1(X))$ est *additive*, donc une *représentation* de l'anneau opposé de $\mathrm{End}(X)$. Mais en caractéristique p, il existe des courbes
elliptiques X ayant comme anneau d'endomorphismes un ordre maximal A d'une algèbre 2
de quaternions définie sur $\mathbf{Z}$ ([3], p.198), et une telle algèbre n'a évidemment pas de représentation dans un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbf{R}$, puisque $A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ est un corps (le corps des quaternions).

1. Le sorite des faisceaux de torsion

Soient T un topos et F un faisceau abélien sur T. On peut multiplier par n dans F ($n \in \mathbf{Z}$ un nombre entier), cette multiplication étant induite par l'opération analogue dans (Ab). Notons ${}_nF$ le noyau de cette multiplication ; donc ${}_nF(X)$, pour $X \in \mathrm{Ob}\, T$, est le groupe des sections de $F(X)$ dont l'ordre divise n.

On désigne par $\mathbf{P}$ l'ensemble de tous les nombres premiers.

Définition 1.1. — *Soit p un ensemble de nombres premiers. On dit que F est un faisceau de p-torsion, ou un p-faisceau, si le morphisme canonique*

$$\varinjlim_{n} {}_nF \longrightarrow F \text{ est bijectif,}$$

n parcourant l'ensemble des entiers tels que $\operatorname{ass} n \subset p$, *c'est-à-dire, tels que les nombres premiers divisant n soient dans p. Si $p = \mathbf{P}$ est l'ensemble de tous les nombres premiers, on dit simplement que F est de torsion.*

Proposition 1.2. — (i) *F est de p-torsion si et seulement si F est le faisceau associé à un préfaisceau à valeurs dans des groupes abéliens de p-torsion ; on peut prendre*

$$P = \frac{\lim(\text{préf})}{\operatorname{ass} n \subset p} {}_nF.$$

3 (ii) *Si F est de p-torsion et si $X \in \operatorname{Ob} T$ est un objet quasi-compact*[(i)], *alors $F(X)$ est un groupe de p-torsion.*

(iii) *Si T est localement de type fini* (VI 1.1), *alors F est de p-torsion si et seulement si $F(X)$ est un groupe de p-torsion pour chaque $X \in \operatorname{Ob} T$ quasi-compact. Dans ce cas, on a*

$$\varinjlim_{\operatorname{ass} n \subset p} H^q(T/X; {}_nF) \xrightarrow{\sim} H^q(T/X; F)$$

pour chaque X quasi-compact et tout q.

(iv) *Si $u : T \to T'$ est un morphisme de topos et si F' est de p-torsion sur T', alors l'image inverse u^*F est un faisceau de p-torsion sur T.*

(v) *Si $u : T \to T'$ est un morphisme de topos, avec T et T' localement de type fini et u quasi-compact*, et si F est un faisceau de p-torsion sur T, alors les $R^q u_* F'$ sont des faisceaux de p-torsion sur T pour tout q.*

Démonstration :

(i) Évidemment, si un faisceau F est de p-torsion, F est le faisceau associé au préfaisceau P dont le groupe des sections $P(X)$ est le sous-groupe des éléments de p-torsion de $F(X)$. Inversement, soit $F = \underline{a}P$ (II) le faisceau associé à P, où P est à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens de p-torsion. De la suite exacte

$$0 \to {}_nP \to P \xrightarrow{n} P$$

on déduit une suite exacte

$$0 \to \underline{a}({}_nP) \to F \xrightarrow{n} F,$$

4 d'où $\underline{a}({}_nP) = {}_nF$. Comme le foncteur $\underline{a}$ commute aux limites inductives, on déduit de

$$\frac{\lim(\text{préf})}{\operatorname{ass} n \subset p} {}_nP \xrightarrow{\sim} P$$

qu'on a aussi

$$\varinjlim_{\operatorname{ass} n \subset p} {}_nF \xrightarrow{\sim} F.$$

[(i)] Un objet X d'un topos est dit quasi-compact si chaque famille couvrante $\{X_i \to X\}$ peut être majorée par une famille couvrante finie. Un morphisme u de topos est quasi-compact si l'image inverse de chaque objet quasi-compact est encore quasi-compacte.

(ii) Posons $P = \varinjlim(\text{préf})_n F$. Alors on a $P \subset F$, donc P est un préfaisceau séparé, et par suite
$$\underline{a}P(X) = \varinjlim(\ker(\prod_i P(X_i) \rightrightarrows)),$$
où comme d'habitude la limite est prise suivant les familles couvrantes $\{X_i \to X\}$. Mais comme X est quasi-compact, il suffit de prendre les familles couvrantes finies. Pour ces familles $\prod_i P(X_i)$ est de p-torsion ; donc le ker l'est aussi. Par suite $\underline{a}P(X) = F(X)$ est de p-torsion.

(iii) Pour vérifier que $\varinjlim_n F \to F$ est bijectif, il suffit de le faire pour les valeurs sur $X \in \operatorname{Ob} T$ pour chaque X d'une famille de générateurs. On est donc ramené à (ii) pour la première assertion. La deuxième assertion est une conséquence de

(iv) Conséquence de (i) puisque $u^*(\underline{a}P') = \underline{a}(u \cdot P)$

(v) Conséquence facile de (iii).

On aura aussi besoin d'une variante non-abélienne. Mais il y a des problèmes techniques dans la définition (j'ignore s'ils sont sérieux), et on se contentera donc de donner une définition pour la topologie étale d'un schéma.

Définition 1.3. — *Soit p un ensemble de nombres premiers. On dit qu'un groupe G est un* 5
ind-p-groupe *si chaque sous-ensemble fini de G engendre un sous-groupe fini d'ordre n, avec* $\operatorname{ass} n \subset p$. *Il revient au même de dire que les sous-groupes finie G_α d'ordre n_α, avec* $\operatorname{ass} n_\alpha \subset p$, *forment un ensemble filtrant, et que $G = \varinjlim G_\alpha$. Si $p = \mathbf{P}$, on dit* groupe ind-fini *au lieu de ind-p-groupe.*

On vérifie immédiatement la

Proposition 1.4. — (i) *Un sous-groupe ainsi qu'un quotient d'un ind p-groupe est encore un ind p-groupe.*

(ii) *Une limite inductive filtrante de ind-p-groupes est un ind-p-groupe.*

(iii) *Une limite projective finie de ind-p-groupes est un ind-p-groupe.*

Définition 1.5. — *Soit X un schéma. On dit qu'un faisceau F de groupes sur X est un* faisceau de ind p-groupes *(resp. de* groupes ind-finis*) si pour chaque $U \to X$ étale, avec U quasi-compact, $F(U)$ est un ind p-groupe (resp. un groupe ind-fini).*

Proposition 1.6. — *Soit F un faisceau de groupes sur le schéma X.*

(i) *F est un faisceau de ind-p-groupes si et seulement si pour chaque point géométrique ξ de X, la fibre F_ξ est un ind-p-groupe.*

(ii) *Si $f : X \to X'$ est un morphisme et si F' est un faisceau de ind-p-groupes sur X', f^*F' est un faisceau de ind-p-groupes.*

(iii) *Si $f : X \to X'$ est un morphisme quasi-compact et F est un faisceau de ind-p-groupes sur X, alors f_*F est un faisceau de ind-p-groupes.*

Démonstration. (i) Supposons que F soit un faisceau de ind-p-groupes, et soit ξ un point géométrique de X. Alors $F = \varinjlim F(X')$, où X' parcourt un système pseudo-filtrant de sché- 6
mas étales sur X (VIII 3.9). Il est évident que les X' affines (donc quasi-compacts) forment un ensemble cofinal, et que par suite F est limite inductive de ind p-groupes, donc est un ind-p-groupe d'après 1.4 (ii). Inversement, supposons que pour chaque ξ la fibre F_ξ soit un

ind-p-groupe et soit $U \to X$ étale, U quasi-compact. Soit $S \subset F(U)$ un sous-ensemble fini. Pour chaque point géométrique ξ de U, l'image de S dans F_ξ engendre un groupe fini. Comme un groupe fini est de présentation finie, on conclut aisément qu'il existe un U_ξ étale sur U, ξ-ponctué, tel que S engendre un groupe fini dans $F(U_\xi)$ (cf. VIII 4). Un nombre fini de tels U_ξ forment un recouvrement de U, soit $\{U_1, \dots, U_n\}$. Alors l'image de S dans $\prod F(U_i)$ engendre un sous-groupe fini, et comme $F(U) \subset \prod F(U_i)$, on a gagné.

L'assertion (ii) est triviale à partir de (i), et (iii) est immédiate.

2. Faisceaux constructibles

2.0. — Soit T un topos. Rappelons qu'à chaque élément $S \in \mathrm{Ob(Ens)}$ on associe le faisceau S_T associé au préfaisceau P tel que $P(X) = S$ pour chaque $X \in \mathrm{Ob}(T)$. L'objet de T qui représente S_T est

$$\coprod_{s \in S} e = \text{``} S \times e\text{''},$$

e l'objet final de T. S_T est appelé *faisceau constant*, de valeur S (IV). On définit d'une manière évidente la notion de faisceau *de groupes constant, de A-modules constant* (A un anneau), et de faisceau *abélien constant*, de valeur M. Un morphisme $f_T : S_T \to S'_T$ de faisceaux constants est dit constant s'il provient d'un morphisme d'ensembles $f : S \to S'$.

Un faisceau F est dit *localement constant* s'il existe un recouvrement $\{e_i \to e\}$ de l'objet
7 final tel que F devienne constant sur chaque e_i. On définit d'une façon analogue la notion de faisceau *de groupes* ou de *A-modules localement constant*, et de *morphisme localement constant* $f : F \to G$, si F et G sont des faisceaux localement constants. Enfin, un faisceau de groupes ou de A-modules localement constant est dit *de type fini* (resp. *de présentation finie*) si les valeurs locales sont des groupes ou des A-modules de type fini (resp. de présentation finie).

Lemme 2.1. — (i) *Soit $f : F \to G$ un morphisme de faisceaux d'ensembles localement constant sur T, et supposons que les valeurs locales de F soient des ensembles finis. Alors f est localement constant.*

(ii) *Soit $f : F \to G$ un morphisme de faisceaux de A-modules localement constants, avec F de type fini. Alors f est localement constant, et le noyau et conoyau de f sont localement constants.*

(iii) *Soit* $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ *une suite exacte de faisceaux de A-modules (resp. de groupes), avec F' et F'' localement constants, F'' étant de présentation finie. Alors F est localement constant.*

Démonstration de (i) et (ii). On se ramène sans peine au cas où F et G sont constants. Traitons (ii) : soit $F = M_T$, $G = N_T$ (M, N des A-modules), et soit $S \subset M$ un sous-ensemble fini de générateurs de M. Alors f est déterminé par sa restriction à S_T et f sera localement constant si $f|S_T$ l'est. On est donc réduit à (i) pour la première assertion de (ii), et la deuxième assertion est conséquence triviale de la première.

Il reste donc à démontrer (i). Supposons que $F = S_T$, $G = S'_T$ soient constants, et notons aussi par f le morphisme d'objets $f : S \times e \to S' \times e$ (notation comme ci-dessus). Soient $f_s : e \to S' \times e$ ($s' \in S$) les composants de f : puisque S est fini, il suffit évidemment de traiter le cas $f = f_s$, c'est-à-dire, où S est un ensemble d'un élément. Soit $X_{s'} \to e$ ($s' \in S'$) la famille des morphismes qui rendent cartésiens les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
X_{s'} \arrow[r] \arrow[d] & e \arrow[d, "i_{S'}"] \\
e \arrow[r, "f"] & S' \times e
\end{tikzcd}$$

où $i_{s'} : e \to S' \times e$ est « l'inclusion » dans la s'−ième composante. La famille $\{i_{s'}\}$ est 8
trivialement couvrante, donc $\{X_{s'} \to e\}$ l'est aussi. On vérifie immédiatement (puisque les sommes directes dans un topos sont disjointes) que f devient constant sur $X_{s'}$, et que par suite f est localement constant.

Démonstration de (iii). Traitons le cas des faisceaux de A-modules. On peut supposer F' et F'' constants, F'' de valeur M'' un A-module de présentation finie. Si M'' est libre, donc admet une base finie $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, alors les e_i définissent des sections de F'', donc se relèvent localement en des sections de F, ce qui montre que localement l'extension F de F'' par F' se scinde, ce qui prouve que F est localement isomorphe à $F' \times F''$, donc est localement constant. Dans le cas général, choisissant un homomorphisme surjectif $\varphi : L'' \to M''$, avec L'' libre de type fini ; le noyau R de φ est de type fini, et posant $L = L''_T \times_{M''_T} F = L''_T \times_{F''} F$; on voit d'une part que L est une extension de L''_T par G, donc localement constant d'après ce qui précède, d'autre part qu'on a une suite exacte $0 \to R_T \to L \to F \to 0$, ce qui grâce à (ii) implique que F est localement constant.

A partir de maintenant, on se borne aux topos étales des schémas.

Lemme 2.2. — *Soit X un schéma et F un faisceau sur X qui est localement constant. Alors F est représenté par un Y/X étale. Si de plus les fibres de F sont finies (resp. et non-vides), alors Y est un revêtement étale (resp. et surjectif).*

Démonstration. Descente (SGA 1 IX 4.1 si F à fibres finies, SGA 3 X 5.4 dans le cas général).

Définition 2.3. — *Un faisceau d'ensembles (resp. de groupes, resp. de A-modules) est dit constructible si pour chaque ouvert affine $U \subset X$ il existe une décomposition de U en réunion d'un nombre fini de sous-schémas constructibles* (EGA 0_{III} 9.1.2) *localement fermés réduits*
U_i telle que le faisceau induit par F sur chaque U_i soit localement constant, de valeur finie 9
(resp. finie, resp. de présentation finie[(i)]*.*

[(i)]Lorsque A n'est pas supposé noethérien, il est préférable, pour les besoins de l'Algèbre Homologique, d'exiger ici, au lieu de la seule présentation finie pour le A-module M, qu'il ait une résolution gauche par des A-modules libres de type fini. La notion introduite dans (2.3) devrait alors prendre le nom : F est 1-constructible, (plus généralement, on définirait de façon évidente la n-constructibilité, pour tout entier $n \geq 0$). Nous allons provisoirement pour le présent exposé garder la terminologie sous la forme (2.3), qui est surtout raisonnable dans le cas où A est noethérien, où elle coïncide avec celle qu'on vient de signaler. Comparer SGA 6 I pour des notions de finitude dans des cas non noethériens.

2.3.1. — L'hypothèse de finitude sur les valeurs locales revient à dire que pour chaque point géométrique ξ, la fibre F_ξ est finie (resp. finie, resp. de présentation finie). Il s'ensuit immédiatement de 2.1 (i) qu'un faisceau de groupes F est constructible si et seulement si le faisceau d'ensembles sous-jacent à F est constructible.

On fera attention que si F est un faisceau abélien, il est constructible en tant que faisceau de groupes (ou encore, en tant que faisceau d'ensembles) si et seulement si il est constructible comme faisceau de $\mathbf{Z}$-modules, et si *de plus* ses fibres sont finies. Ainsi, $\mathbf{Z}_X$ est constructible comme $\mathbf{Z}$-module, mais non comme faisceau de groupes.

Proposition 2.4. — (i) *Soit X quasi-compact et quasi-séparé. Alors un faisceau (resp. faisceau de groupes, resp. faisceau de A-modules) est constructible si et seulement s'il existe une décomposition de X en réunion de parties localement fermées constructibles, telle que F devienne localement constant, et fini (resp. fini, resp. de présentation finie), sur chaque X_i.*

(ii) *Pour vérifier que F est constructible, il suffit de vérifier que $F|U_i$ est constructible pour les U_i d'un recouvrement ouvert donné de X.*

(iii) *Soit $F : Y \to X$ un morphisme. Alors f^*F est constructible si F l'est.*

10 (iv) *L'ensemble des points où la fibre d'un faisceau constructible est non vide (resp. non-nulle) est un sous-ensemble localement constructible* (EGA 0_{III} 9.1.2).

(v) *Soit X localement noethérien. Alors un faisceau d'ensembles (resp. ...) F sur X est constructible si et seulement si pour chaque $x \in X$, il existe un ouvert non-vide de l'adhérence $\overline{x}$ de x tel que F induise un faisceau localement constant de valeur finie (resp. ...) sur U.*

Démonstration. Évidemment, si $f : Y \to X$ est un morphisme et s'il existe une décomposition de X en réunion de parties X_i localement fermées et constructibles, telles que F devienne localement constant sur chaque X_i, il en est de même de Y et f^*F (cf. EGA IV 1.8.2). Cela prouve l'implication $\Leftarrow$ de (i). Supposons maintenant que X soit quasi-compact et quasi-séparé et soit $\{U_i, \ldots, U_n\}$ un recouvrement ouvert affine de X tel que $F|U_i$ soit constructible pour chaque i. Pour trouver une décomposition de X comme dans (i), il suffit de le faire pour U_n et pour $Y = X - U_n$ (avec la structure induite réduite), U_n et Y étant constructibles dans X grâce à l'hypothèse « X quasi-séparé ». Or une décomposition existe pour U_n d'après la définition de la constructibilité, et Y est réunion de $n-1$ ouverts affines $V_i = Y \cap U_i$ ($i = 1, \ldots, n-1$) avec $F|V_i$ constructible, d'où le résultat (i) par récurrence sur n. Le même raisonnement démontre (ii) ; en effet, l'hypothèse implique que $F|U$ est constructible pour chaque ouvert affine U « assez petit », et on peut recouvrir un ouvert affine V arbitraire par un nombre fini de tels ouverts. L'assertion (ii) montre que la notion de constructibilité est locale sur X, et (iii), (iv) s'ensuivent immédiatement. L'implication $\Rightarrow$ de (v) est immédiate, et ne dépend pas de l'hypothèse noethérienne. Si X est noethérien on démontre l'implication $\Leftarrow$ par la « récurrence noethérienne » habituelle.

Proposition 2.5. — *Soit X quasi-compact et quasi-séparé, et F un faisceau de groupes ou de A-modules constructible sur X. Alors il existe une filtration finie de F dont les quotients successifs sont de la forme $i_!G$, où $i : U \to X$ est l'inclusion d'une partie localement fermée et constructible, et où G est localement constant et constructible sur U. Si X est noethérien, il existe une telle filtration, avec des U irréductibles.*

Démonstration. D'après 2.4 (i), il existe une décomposition de X en réunion finie de parties localement fermées constructibles X_i telles que chaque $F|X_i$ soit localement constant et fini (resp. de présentation finie). Écrivons $X_i = U_i \cap \complement V_i$, où U_i et V_i sont des ouverts constructibles, et soit N le nombre d'ouverts de X dans la sous-topologie T engendrée par $\{U_i, V_i\}$. Raisonnons par récurrence sur N : si W est un élément non-vide minimal de T, il est évident que $F|W$ est localement constant et de présentation finie. Soit $i : W \to X$ le morphisme d'inclusion et $Y = X - W$. On a la suite exacte 11

$$0 \longrightarrow i_! i^* F \longrightarrow F \longrightarrow F|Y \longrightarrow 0,$$

et on se réduit ainsi à le même assertion pour Y et pour le faisceau $F|Y$, où on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

Proposition 2.6. — *Supposons que A soit un anneau noethérien.*

(i) *Une limite projective (resp. inductive) finie de faisceaux de A-modules ou d'ensembles constructibles est constructible. En particulier, le noyau, le conoyau et l'image d'un morphisme de faisceaux de A-modules constructibles sont constructibles.*

(i bis) *Une limite projective finie de faisceaux d'ensembles (resp. de groupes) constructibles est constructible, et si $f : F \to G$ est un morphisme de faisceaux de groupes constructibles, le noyau, l'image, et le conoyau (si $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-groupe normal) sont constructibles. Une limite inductive finie de faisceaux d'ensembles constructibles est constructible.*

(ii) *Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de faisceaux de A-modules (resp. de groupes) avec M', M'' constructibles. Alors M est constructible.*

(iii) *Soit $M_1 \to M_2 \to M_3 \to M_4 \to M_5$ une suite exacte de faisceaux de A-modules. Alors si M_i est constructible pour $i = 1, 2, 4, 5$, il en est de même pour $i = 3$.*

Démonstration. (i) Nous laissons les assertions ensemblistes et pour les groupes au lecteur. 12
Pour le cas des faisceaux de A-modules, il suffit de démontrer que le noyau et le conoyau d'un morphisme $f : F \to G$ de faisceaux de A-modules constructibles sont constructibles. L'assertion est locale sur X, et on peut donc supposer X affine, donc quasi-compact et quasi-séparé. Alors on se réduit au cas où F et G sont localement constants par 2.4. (i), et on termine en utilisant 2.1 (ii) et l'hypothèse noethérienne sur A. On prouve de façon analogue l'assertion (ii) en utilisant 2.1 (iii). L'assertion (iii) est immédiate à partir de (i) et (ii).

Proposition 2.7. — *Soient X un schéma quasi-compact et quasi-séparé, F un faisceau d'ensembles (resp. de A-modules). Pour que F soit constructible, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe au conoyau d'un couple de morphismes $H \rightrightarrows G$, où H et G sont des faisceaux d'ensembles représentables par des schémas étales de présentation finie sur X (resp. que F soit isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $\mathscr{A}_{V,X} \to \mathscr{A}_{U,X}$, où U et V sont deux schémas étales de présentation finie sur X).*

La suffisance résulte facilement de 2.6 (i bis).

Supposons que F soit un faisceau d'ensembles constructibles. Utilisant l'existence des sommes infinies dans le site étale sur X, on voit que l'on peut trouver un épimorphisme $G \to F$, avec G représentable par un schéma étale sur X, que l'on peut de plus supposer somme de schémas affines G_i ($i \in I$), donc séparé sur S. Pour toute partie finie J de l'ensemble d'indices I, soit G_J la somme des G_i pour $i \in J$, et F_J son image dans F. Comme G_J et F

sont constructibles, il en est de même de F_J (2.6 (i bis)), donc l'ensemble X_J des $x \in X$ tels que les fibres de F et F_J en un point géométrique de X sur x soient égales, est localement constructible 2.4 (iv)). Comme la famille des X_J est croissante et de réunion X, et que X est quasi-compact, l'un des X_J est égal à X (EGA IV 1.9.9). Cela montre, quitte à remplacer G par G_J, que l'on peut supposer G affine, donc séparé sur X, et quasi-compact sur X puisque X est quasi-séparé (EGA IV 1.2.4). Soit alors $H = G \times_F G$. C'est un sous-faisceau de $G \times_S G$ qui est représentable, donc est lui-même représentable (VIII 6.1). Comme G est de plus
13 constructible (2.6 (i bis)), il résulte encore de l'argument précédent qu'il est quasi-compact, donc (étant séparé sur X) de présentation finie sur X. Cela prouve la première assertion de 2.7, et la deuxième se prouve par la même méthode (NB il n'est pas nécessaire que A soit noethérien). Signalons en passant que la démonstration prouve aussi le corollaire suivant :

Corollaire 2.7.1. — *Soient X un schéma, F un schéma étale sur X. Pour que le faisceau étale correspondant sur X soit constructible, il faut et il suffit que F soit de présentation finie sur X.*

La proposition 2.7 nous sera surtout utile ici pour déduire certaines propriétés de passage à la limite pour les faisceaux constructibles :

Corollaire 2.7.2. — *Soit X un schéma quasi-compact et quasi-séparé. Alors tout faisceau d'ensembles (resp. de ind-p-groupes, resp. de A-modules) sur X est limite inductive d'un système inductif filtrant de faisceaux d'ensembles (resp. ...) constructibles.*

Si F est un faisceau d'ensembles, reprenons les notations de la démonstration de 2.7, et soit L l'ensemble des couples (J, H'), où J est une partie finie de I et H' une partie ouverte quasi-compacte de $H_J = G_J \times_F G_J$. On ordonne L de la façon évidente, et on constate que, puisque F est limite des F_J, et que chaque F_J est limite des $\mathrm{Coker}(H' \to G_J)$ pour les ouverts quasi-compacts H' de H_J, que F est limite inductive du système inductif des $F_\ell = \mathrm{Coker}(H' \to F_J)$ pour $\ell = (H', J) \in L$, d'où le cas ensembliste. Le cas des faisceaux de A-modules se traite essentiellement de la même façon, en commençant par représenter F comme conoyau d'un homomorphisme $\mathscr{A}_{V,X} \to \mathscr{A}_{U,X}$, avec U, V schémas étales et séparés sur X. Le cas des ind-p-groupes demande un peu plus d'attention. Reprenant les notations précédentes, nous désignons par $L(G_J)$ le faisceau en groupes libre engendré par le faisceau d'ensembles G_J, par N_J le noyau de l'homomorphisme $L(G_J) \to F$ déduit de $G_J \to F$, par L l'ensemble des couples (J, N'), où N' est un sous-faisceau d'*ensembles* de N_J qui est « quasi-compact » i.e. tel qu'il existe un épimorphisme $P \to N'$, avec P représentable par un X-schéma quasi-compact. On ordonne L en déclarant que (J, N') est plus petit que
14 (J_1, N_1') si $J \subset J_1$ et si l'homomorphisme canonique $L(G_J) \to L(G_{J_1})$ applique N_1 dans N_1'. Il est immédiat que L est filtrant, et que l'on obtient un système inductif de faisceaux en groupes F_ℓ, indexé par L, en prenant, pour $\ell = (J, N')$, $F_\ell =$ faisceau en groupes quotient de $L(G_J)$ par le sous-faisceau en groupes invariant engendré par N'. Il est immédiat de plus que F est isomorphe à la limite inductive des F_ℓ, et il reste à prouver qu'il existe une partie L' de L, cofinale dans L, telle que pour $\ell \in L'$, F_ℓ soit un faisceau en p-groupes *constructible.* Pour ceci, il suffit de prouver que pour tout J, on peut trouver un sous-faisceau d'ensembles N' de N_J qui soit quasi-compact, contienne un sous-faisceau d'ensembles quasi-compact donné N_0', et soit tel que le F_ℓ correspondant soit un faisceau en p-groupes constructible. Notons d'abord qu'il suffit, pour ceci, que les fibres de F_ℓ soient des p-groupes finis : alors F_ℓ

sera automatiquement constructible, comme le lecteur vérifiera sans peine. D'autre part, le lecteur pourra vérifier également que l'ensemble $X_{N'}$ des points x de X tels que la fibre de F_ℓ en un point géométrique au-dessus de x soit un p-groupe fini est localement constructible. De plus, les parties $X_{N'}$ de X sont fonction croissante de N', enfin leur réunion est X tout entier : ce dernier point résulte du fait que la limite inductive des F_ℓ, pour $\ell = (N', J)$ avec J fixé, est le sous-faisceau en groupes F_J de F engendré par le sous-faisceau d'ensembles F_J, qui est quasi-compact, donc $\overline{F_J}$ est à fibres des p-groupes finis. D'autre part, dans un groupe libre à un nombre fini de générateurs, donc s'il est représenté comme réunion filtrante de ses parties finies, l'une de celles-ci engendre tout le sous-groupe. De là résulte aisément que la réunion des $X_{N'}$ est bien X. Utilisant à nouveau (EGA IV 1.9.9) on trouve que un des $X_{N'}$ est égal à X, ce qui achève la démonstration de 2.7.2.

2.7.2.1. — Notons que la démonstration un peu pénible du cas des schémas en groupes met en évidence le manque d'un sorite commode pour les conditions de constructibilité pour des faisceaux en groupes à fibres pas nécessairement finies ; nous nous en excusons auprès du lecteur en l'invitant à combler au besoin cette lacune par ses propres moyens, et lui signalons en guise de consolation que dans 2.9 (iii) nous obtenons une démonstration plus simple lorsque X est noethérien.

Corollaire 2.7.3. — *Soient X un schéma quasi-compact et quasi-séparé, F un faisceau* 15
d'ensembles (resp. de ind-groupes finis, resp. de A-modules) constructible. Alors le foncteur $\mathrm{Hom}(F, G)$*, où G est un faisceau d'ensembles (resp. ...) variable, commute aux limites inductives en G. Dans le cas où F est un faisceau de A-modules, A étant noethérien, les foncteurs* $\mathrm{Ext}^i(X\,; F, G)$ *en le A-module G commutent également aux limites inductives.*

Ceci résulte de 2.7 et (VII 3.3) par les arguments habituels, qui sont laissés au lecteur. De même, la conjonction de 2.7 et des résultats de (VII 5) donne aisément :

Corollaire 2.7.4. — *Soit I une catégorie filtrante, $i \mapsto X_i : I^0 \to (\mathrm{Sch})$ un foncteur qui transforme les flèches en morphismes affines et les objets en des schémas quasi-compacts et quasi-séparés. Pour tout schéma Y, soit $F_c(Y)$ la catégorie des faisceaux d'ensembles (resp. de ind-p-groupes, resp. de A-modules) constructibles sur Y. Alors on a une équivalence de catégories*

$$F_c(X) \xleftarrow{\approx} \varinjlim_i F_c(X_i),$$

où $X = \varprojlim_i X_i$ (VII 5) *et où le deuxième membre désigne la catégorie $\varinjlim$ de catégories fibrées, définie dans   En particulier, tout faisceau d'ensembles (resp. ...) constructible sur X est isomorphe à l'image inverse d'un faisceau de même nature sur un des X_i.*

Proposition 2.8. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif et localement de présentation finie, et soit F un faisceau d'ensembles (resp. ...) sur Y. Alors F est constructible si et seulement si $f^*(F)$ l'est.*

Nous utiliserons le

Lemme 2.8.1. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif et localement de présentation finie, avec Y quasi-compact et quasi-séparé. Alors il existe une partition finie de Y en des sous-schémas Y_i de présentation finie sur Y (en particulier chaque Y_i est constructible dans X) et* 16 *pour tout i, des morphismes finis surjectifs $Y_i'' \xrightarrow{g_i} Y_i' \xrightarrow{h_i} Y_i$, avec h_i étale et g_i localement libre (i.e. plat et de présentation finie, en plus de la condition g_i fini), et radiciel, et enfin un Y-morphisme $Y_i'' \to X$*[(i)].

Utilisant le fait que Y est quasi-compact et quasi-séparé, on se ramène aisément au cas où Y est quasi-affine donc séparé (en utilisant un recouvrement ouvert affine fini $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ de Y et considérant les $Y_i = U_i - U_i \cap \bigcup_{j<i} U_j$), puis au cas Y affine (par le même argument). Le schéma X est réunion d'ouverts affines X_i, et l'image T_i de X_i dans Y est constructible (EGA IV 1.8.4), la réunion des T_i est X puisque f est surjectif, d'où s'ensuit que X est réunion d'un nombre fini des T_i (EGA IV 1.9.9), de sorte que, remplaçant X par le schéma somme des X_i correspondants, on peut supposer X affine. Alors le procédé de passage à la limite standard (EGA IV 8 8.1.2 c)) nous permet de supposer de plus Y noethérien. La récurrence noethérienne habituelle, et le procédé de passage à la limite (EGA IV 8.1.2 a)) nous ramène au cas où Y est réduit au spectre d'un corps k. Comme alors $X \neq \varnothing$, il existe un point fermé x dans X, qui correspond à une extension finie k' de k, elle-même extension radicielle d'une extension séparable k_s' de k. On prendra alors $Y' = \mathrm{Spec}(k_s')$, $Y'' = \mathrm{Spec}(k')$, ce qui achève la démonstration de 2.8.1.

La nécessité dans 2.8 étant triviale (2.4 (iii)), prouvons la suffisance. On est alors ramené, par le lemme précédent, au cas où f est de la forme gh, où g et h satisfont aux conditions énoncées pour g_i, h_i dans le lemme. On peut donc supposer successivement, soit que f est fini radiciel, cas trivial par (VIII 1.1), soit que f est fini étale. Notons d'ailleurs que, utilisant l'hypothèse que $f^*(F)$ est constructible et la définition de la constructibilité, nous pouvions supposer (quitte à remplacer X par un X-préschéma $X' = \coprod_i X_i$ de présentation finie et à morphisme structural surjectif) que $f^*(F)$ est déjà localement constant. Mais lorsque f est étale et surjectif, cela implique que F est localement constant. Comme de plus les hypothèses faites sur les fibres de $f^*(F)$ restent valables pour celles de F, f étant surjectif, il s'ensuit bien que F est constructible, ce qui achève la démonstration de 2.8.

17 ***Proposition 2.9.*** — *Soient X un schéma noethérien, A un anneau noethérien, et p un ensemble de nombres premiers.*

(i) *La catégorie des faisceaux d'ensembles (resp. de ind p-groupes, resp. de A-modules) sur X est localement noethérienne, c'est-à-dire, possède un ensemble de générateurs formé d'objets noethériens.*

(ii) *Un faisceau F d'ensembles (resp. de ind p-groupes, resp. de A-modules) sur X est constructible si et seulement si il est noethérien. Si F est un faisceau de A-modules, alors F est constructible si et seulement si il est quotient d'une somme finie de faisceaux de la forme $A_{U/X}$, où $U \to X$ est étale et de type fini (notation de* IV.2.4 *: $A_{U/X} = A_U$).*

(iii) *Les sous-faisceaux constructibles d'un faisceau F d'ensembles (resp. …) forment un système inductif, et F est limite inductive de ces sous-faisceaux.*

Démonstration. On laisse l'assertion ensembliste au lecteur. Traitons d'abord le cas d'un faisceau de A-modules. Pour (i) il faut trouver un ensemble de générateurs dont les éléments sont des objets noethériens. Or les faisceaux de la forme $A_{U/X}$, $U \to X$ étale et de type fini

[(i)]Cet énoncé est aussi donné dans EGA IV 17.16.4.

forment un ensemble de générateurs dont on voit facilement qu'ils sont constructibles, et il suffit donc de démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.10. — *Soit X noethérien. Alors tout A-Module constructible est noethérien.*

Démonstration du lemme.

Par récurrence noethérienne nous supposons le lemme vrai pour chaque sous-schéma X' de X distinct de X. Prenons un ouvert non-vide X_0 de X tel que F induise un faisceau localement constant F_0 sur X_0.

Soit maintenant $\{F_i\}$, $i \in \mathbf{N}$ une suite croissante de sous-faisceaux de F_0. Comme pour un point géométrique P, générique pour une composante irréductible de X_0, la fibre de F_0 en P est de type fini, la suite des fibres $(F_i)_P$ est stationnaire, et nous pouvons supposer 18
qu'elle est constante. Or soit Q un point géométrique de X_0 *spécialisation* de P (VIII 7.2). Puisque F_0 est localement constant sur X_0, on voit immédiatement que le morphisme de spécialisation $F_{0_Q} \to F_{0_P}$ (VIII.7) est bijectif, donc $(F_i)_Q \to (F_i)_P$ est *injectif* pour chaque i.

Soient V/X étale et P-ponctué, et $s_1, \ldots, s_n$ des sections $\in F_1(V)$ qui engendrent $(F_1)_P$. Alors les s_i engendrent $(F_i)_Q$ pour chaque i et chaque point géométrique Q spécialisation de P au-dessus de V. La suite de faisceaux F_i est donc constante dans un voisinage de l'image de P, disons dans $X' \neq \varnothing$. Soit $Y = X - X'$, il suffit donc de prouver que la suite des $F_i|Y$ est stationnaire, ce qui résulte de l'hypothèse de récurrence noethérienne.

Les assertions (ii) pour les A-modules sont maintenant immédiates : Comme les $A_{U/X}$ sont des générateurs noethériens, on a évidemment F noethérien $\Leftrightarrow$ F est quotient d'une somme finie de faisceaux $A_{U/X}$. Or $A_{U/X}$ est constructible, et par suite, compte tenu de 2.6, F noethérien $\Rightarrow$ F constructible ; l'implication inverse étant déjà établie (2.10), cela établit (ii). Enfin, l'assertion (iii) pour les A-modules est une propriété des catégories localement noethériennes (cf. [1], Ch. IV).

Traitons maintenant le cas des ind-p-groupes. Notons d'abord qu'un faisceau de groupes constructible F est certainement noethérien. En effet, puisque les fibres sont finies, on peut employer le même argument qu'avec les A-modules. On va maintenant démontrer l'assertion (iii) directement, ce qui impliquera (i) - en effet, cela démontrera que les faisceaux constructibles forment un ensemble de générateurs. De plus, un faisceau noethérien quelconque sera alors nécessairement constructible, d'où (ii).

Pour démontrer (iii), il suffit évidemment de démontrer qu'un sous-faisceau (en groupes) S d'un faisceau F de ind p-groupes engendré par un nombre fini de sections $s_i \in F(U_i)$, $U_i \to X$ étale de type fini, est constructible [(i)]. (Puisqu'un faisceau constructible est noethé- 19
rien, il est engendré par un nombre fini de sections.) Par récurrence noethérienne, on peut supposer que c'est vrai pour chaque sous-schéma fermé Y de X, distinct de X. Or la notion de sous-faisceau engendré par des sections commute avec l'image inverse de faisceaux ; en effet, soit $L_{U/X}$ le faisceau qui représente le foncteur $F \mapsto F(U)$ dans la catégorie des groupes. Alors si $f : Y \to X$, on a $f^*(L_{U/X}) = L_{L \times_X U/Y}$. Comme S est l'image de la somme des $L_{U_i/X}$, et comme f^* commute aux sommes, il est clair que f^*S est le sous-faisceau de f^*F engendré par les sections $f^*(S_i)$.

[(i)]Rappelons la définition de ce faisceau : soit $L_{U/X}$ le faisceau qui représente le foncteur $F \mapsto F(U)$ dans la catégorie des groupes. La section $s_i \in F(U_i)$ induit un morphisme $L_{U_i/X} \to F$, et S est l'image du morphisme somme $\amalg_i L_{U_i/X} \to F$. C'est le plus petit sous-faisceau qui « contient » les sections s_i.

On peut donc supposer que S induit un faisceau constructible sur chaque fermé Y distinct de X, et il suffit ainsi (2.4 (i)) de démontrer que S induit un faisceau constructible sur un ouvert non-vide convenable de X. En remplaçant X par un ouvert assez petit, on peut supposer que chaque U_i est un revêtement étale de X. Il suffit de démontrer qu'alors S est localement constant, à fibres finies sur un ouvert non vide convenable. C'est une assertion locale sur X pour la topologie étale, et on peut donc supposer que chaque U_i est complètement décomposé, disons $U_i = \amalg_{n_i} X$ (somme de n_i copies de X). Soient s_{ij} $(j = 1, \dots, n_i)$ les sections de $F(X)$ telles que s_i $(s_{il}, \dots, s_{in_i})$. Évidemment, S n'est autre que le sous-faisceau de F engendré par les $s_{ij} \in F(X)$. Comme $F(X)$ est un ind p-groupe (1.5) les s_{ij} engendrent un sous-groupe fini 1.3. Donc on peut supposer que l'ensemble des s_i est un sous-groupe fini de $F(X)$, mais alors S est identique au faisceau *d'ensembles* engendré par les s_i, qui est constructible en vertu de 2.6 (i) comme faisceau d'ensembles, donc comme faisceau de groupes, C.Q.F.D.

Dans les deux propositions suivantes, nous donnons des critères pour qu'un faisceau soit localement constant, ou constructible, en utilisant les homomorphismes de spécialisation (VIII 7.7).

Proposition 2.11. — *Soient X un schéma, F un faisceau d'ensembles (resp. de groupes ind-*
20 *finis, resp. de A-modules) constructible ; dans le cas ensembliste, on suppose de plus F à fibres finies. Soient $x \in X$, $\overline{x}$ un point géométrique sur x. Pour que F soit localement constant au voisinage de x, il faut et il suffit que pour tout point géométrique $\overline{x}'$ générisation de $\overline{x}$, et toute flèche de spécialisation $\overline{x'} \to \overline{x}$* (VIII 7.2)*, l'homomorphisme de spécialisation* (VIII 7.7) $F_{\overline{x}} \to F_{\overline{x'}}$ *soit un isomorphisme.*

Le cas d'un faisceau en groupes étant un cas particulier de celui d'un faisceau d'ensembles, nous nous contentons de traiter celui-ci ; le cas d'un faisceau de modules se traite de façon essentiellement identique. La nécessité de la condition étant triviale, nous nous bornons à établir la suffisance. Comme la fibre $I = F_{\overline{x}}$ est finie, quitte à remplacer X par un schéma X' étale sur X convenable, on peut supposer que l'on peut trouver un homomorphisme $u : I_X \to F$ du faisceau constant I_X dans F, induisant un isomorphisme pour les fibres en $\overline{x}$. Utilisant la constructibilité des deux faisceaux, et 2.6, on voit aisément que l'ensemble Z des points z de X tels que l'homomorphisme induit sur les fibres en un point géométrique $\overline{z}$ sur z soit bijective, est une partie localement constructible de X. L'hypothèse implique aussitôt qu'elle contient les générisations de x, donc (EGA IV 1.10.1) c'est un voisinage de x, ce qui prouve que F est localement constant (en l'occurrence, même constant) au voisinage de x, C.Q.F.D.

Définition 2.12. — [(i)] *: Un schéma X est dit connexe par arcs si pour tout couple P, Q de points géométriques de X, il existe des points géométriques $P = P_0, \dots, P_n ; Q_1, \dots, Q_n = Q$ et des spécialisations* (VIII 7.2) *$P_i \to Q_i$ et $P_{i-1} \to Q_i$ $(i = 1, \dots, n)$. On dit que X est localement connexe par arcs (pour la topologie étale) si pour chaque $U \to X$ étale il existe un recouvrement étale $\{U_i \to U\}$ de U tel que U_i est connexe par arcs pour chaque i.*

[(i)] La terminologie est due à S. Lubkin.

On vérifie immédiatement qu'on préschéma localement noethérien est localement connexe par arcs.

Proposition 2.13. — (i) *Soit X localement connexe par arcs et soit F un faisceau d'ensembles (resp. de groupes, resp. de A-modules) sur X. Supposons que les fibres de F sont finies (resp. finies, resp. de présentation finie). Alors F est localement constant si et seulement si pour toute spécialisation $P \to Q$ de points géométriques, le morphisme de spécialisation* (VIII 7.7) *$F_Q \to F_P$ est bijectif.* 21

(ii) *Supposons que X soit localement noethérien et que les fibres de F soient finies (resp. finies, resp. de présentation finie). Alors, si pour toute spécialisation $P \to Q$, le morphisme de spécialisation $F_Q \to F_P$ est injectif, F est constructible.*

(iii) *Supposons que X soit localement noethérien et que les fibres du faisceau d'ensembles F soient finies. Soit $c : X \to \mathbf{N}$ la fonction qui à $x \in X$ associe le nombre d'éléments de la fibre $F_{\overline{x}}$ de F en un point géométrique $\overline{x}$ au-dessus de x. Alors F est constructible si et seulement si c est une fonction constructible i.e. , si et seulement si $c^{-1}(n)$ est constructible pour chaque $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration.

(i) Soit P un point géométrique de X. On va trouver un voisinage étale de P, c'est-à-dire, un $U \to X$ étale P-ponctué, tel que F devienne constant sur U. Soit V' un voisinage étale de P tel que $F(V) \to F_P$ soit surjectif. Un tel V' existe d'après l'hypothèse de finitude. Soit $U \to V'$ un voisinage étale de P dans V', tel que U soit connexe par arcs. Alors $F(U) \to F_P$ est encore surjectif. Choisissons un sous-ensemble $S \subset F(U)$ qui s'envoie bijectivement sur F_P. Si F est un faisceau de groupes (resp. de A-modules), on voit facilement qu'on peut, en changeant au besoin U, trouver un tel ensemble qui soit de plus un sous-groupe (resp. sous-module) de $F(U)$. On déduit un morphisme $S_U \to F|U$, où S_U est le faisceau constant à valeur S. On a

$$(S_U)_P \xrightarrow{\sim} F_P.$$

Puisque chaque morphisme de spécialisation sur les fibres de F (resp. S_U) est bijectif, et puisque U est connexe par arc, il s'ensuit que $S_U \xrightarrow{\sim} F|U$, d'où le résultat. 22

(ii) L'assertion est locale, et on peut donc supposer X noethérien. Soit P un point géométrique au-dessus d'un point maximal de X. Il existe un voisinage étale irréductible, donc connexe par arcs, $U \to X$ de P tel que $F(U)$ s'envoie surjectivement sur F_P. Il s'envoie alors surjectivement sur F_Q pour chaque point géométrique Q de V, ou ce qui revient au même, pour chaque point géométrique de l'image U de V dans X, car un tel point est spécialisation de P et $F_Q \to F_P$ est injectif. Donc chaque morphisme de spécialisation dans U est bijectif, donc $F|U$ est localement constant. Par récurrence noethérienne on peut supposer que $F|X - U$ est constructible, d'où le résultat.

(iii) Il suffit évidemment de traiter le cas où la fonction c est constante. Soit $V \to X$ un voisinage étale d'un point géométrique P au-dessus d'un point maximal de X, tel que $F(V)$ s'envoie surjectivement sur F_P. Soit S un sous-ensemble de $F(V)$ tel que $S \xrightarrow{\sim} F_P$. Alors on a, pour le faisceau constant S_V et pour chaque spécialisation

$P \to Q$ de points géométriques, un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(S_V)_P \arrow[r, "\sim"] & F_P \\
(S_V)_Q \arrow[u, "\wr"] \arrow[r] & F_Q \arrow[u]
\end{tikzcd}.$$

Comme $c(F_Q) = c(F_P)$, la flèche $F_Q \to F_P$ est bijective, donc F est localement constant dans un voisinage de P d'après (i). Par récurrence noethérienne, on a gagné.

Le résultat (ii) suivant aura une utilité technique dans la suite ; il permettra de réduire certaines vérifications au cas d'un faisceau constant.

23 ***Proposition 2.14.*** — *Soit X un schéma.*

(i) *Pour tout morphisme fini et de présentation finie $f : X' \to X$, et tout faisceau d'ensembles (resp. de groupes ind-finis, resp. de A-modules) constructible sur X', $f_*(F)$ est constructible.*

(ii) *Supposons X quasi-compact et quasi-séparé, et soit F un faisceau d'ensembles (resp. ...) constructible sur X. Alors on peut trouver une famille finie $(p_i : X'_i \to X_i)$ de morphismes finis, pour tout i, un faisceau d'ensembles (resp. ...) constructible constant C_i sur X'_i, et un monomorphisme*

$$F \hookrightarrow \prod_i p_{i*}(C_i).$$

Prouvons d'abord (i). Par définition, on peut supposer X affine, et utilisant alors 2.7.4, le procédé de passage à la limite standard nous ramène au cas où X est noethérien. Un nouveau passage à la limite, utilisant encore 2.7.4 et de plus 2.4. (v), nous ramène au cas où X est le spectre d'un corps. Alors la conclusion se réduit à l'assertion correspondante sur la fibre de $f_*(F)$ en un point géométrique sur X, laquelle résulte immédiatement de (VIII 5.5, 5.8).

Prouvons (ii). En vertu de 2.4 (i), il existe une partition de X en sous-schémas Y_i, avec des morphismes d'inclusion $u_i : Y_i \to X$ de présentation finie, tels que la restriction F_i de F à chaque Y_i soit un faisceau localement constant. Il est alors immédiat que les homomorphismes canoniques $F \to u_{i*}(F_i)$ définissent un homomorphisme $F \to \prod_i u_{i*}(F_i)$ qui est un monomorphisme.

On pouvait même s'arranger dans la construction précédente pour que chaque F_i soit, non seulement localement constant, mais de plus *isotrivial,* i.e. qu'il existe un morphisme étale *fini* surjectif $q_i : Y'_i \to Y_i$ tel que $q_i^*(F_i)$ soit un faisceau constant sur Y'_i, soit $C_{iY'_i}$.
24 Cela résulte par exemple aisément de la définition de 2.8.1 et de (VIII 1.1). D'autre part, il résulte du « Main Theorem » sous la forme (EGA IV 8.12.6) qu'il existe un morphisme fini $p_i : Z_i \to X$ et une immersion ouverte $v_i : Y'_i \to Z_i$ de X-schémas.

Comme F_i se plonge dans $q_{i*}(q_i^*(F_i)) = q_{i*}(C_{iY'_i})$, F se plonge dans le produit des $u_{i*}(q_{i*}(C_{iY'_i})) = p_{i*}(v_{i*}(C_{iY'_i}))$. Si tout Z_i est normal, alors le lemme (2.14.1) ci-dessous implique que $v_{i*}(C_{iY'_i}) \simeq C_{iZ_i}$, donc F se plonge dans le produit des $p_{i*}(C_{iZ_i})$, et on a terminé. Dans le cas général, introduisons le normalisé $\overline{Z}_i$ de Z_i, l'image inverse $\overline{Y}'_i$ de Y'_i dans

$\overline{Z}_i$, l'immersion $\overline{v}_i : \overline{Y}'_i \to \overline{Z}_i$. On voit aussitôt que $\overline{Y}'_i$ contient les points maximaux de $\overline{Z}_i$, donc est dense dans $\overline{Z}_i$. Si $r_i : \overline{Z}_i \to Z_i$ et $s_i : \overline{Y}'_i \to Y'_i$ sont les projections, comme cette dernière est surjective, il s'ensuit que $C_{iY'_i}$ se plonge dans $s_{i*}(C_{i\overline{Y}'_i})$, dons $v_{i*}(C_{iY'_i})$ se plonge dans $v_{i*}(s_{i*}(C_{i\overline{Y}'_i})) = r_{i*}(\overline{v}_{i*}(C_{i\overline{Y}'_i}))$, qui est isomorphe à $r_{i*}(C_{i\overline{Z}_i})$ en vertu de (2.14.1) ci-dessous, donc F se plonge dans le produit des $p_{i*}(r_{i*}(C_{\overline{Z}_i})) = t_{i*}(C_{i\overline{Z}_i})$, où $t_i = p_i r_i$ est la projection canonique $\overline{Z}_i \to X$. Lorsque ce morphisme est fini pour tout i, on a donc terminé. Dans le cas général, on peut dire seulement que $\overline{Z}_i$ est *entier* sur X, donc de la forme $\operatorname{Spec}(\mathscr{A}_i)$, où $\mathscr{A}_i$ est un faisceau quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$-Algèbres, qui est entier sur $\mathscr{O}_X$. Utilisant (EGA IV 1.7.7), on voit que $\mathscr{A}_i$ est limite inductive de ses sous-Algèbres $\mathscr{A}_{i,j}$ finies sur X, donc $\overline{Z}_i$ est limite projective (VII 5) des préschémas $Z_{ij} = \operatorname{Spec}(A_{ij})$, finis sur X. Appliquant (VII 5.11), on trouve que $t_{i*}(C_{i\overline{Z}_i})$ est limite inductive des $t_{ij*}(C_{iZ_{ij}})$ où $t_{ij} : Z_{ij} \to X$ est la projection canonique. En vertu de (2.7.3), l'homomorphisme $F \to t_{i*}(C_{i\overline{Z}_i})$ se factorise donc par un homomorphisme $F \to t_{ij*}(C_{iZ_{ij}})$, pour un $j = j(i)$ convenable. On pose maintenant $X'_i = Z_{i,j(i)}$, et on trouve un plongement comme annoncé dans 2.14. Il reste à prouver le

Lemme 2.14.1. — *Soient X un schéma géométriquement unibranche (par exemple normal), $i : U \to X$ une immersion ouverte quasi-compacte. Alors l'adhérence Z de U, munie de la* 25
structure réduite induite, est également géométriquement unibranche, plus précisément, pour tout $z \in Z$, on a $\mathscr{O}_{Z,z} \xleftarrow{\sim} \mathscr{O}_{X_{\mathrm{red}},z}$. Supposons d'autre part i dominant, et soit C un ensemble, C_U le faisceau constant sur U défini par C. Alors l'homomorphisme naturel $C_X \to i_*(C_U)$ est un isomorphisme. Mêmes conclusions si on remplace l'immersion ouverte i par une inclusion $i : x \to X$, où x est un point maximal de X.

Utilisant (EGA IV 2.3.11), on est ramené pour la première assertion au cas où X est local, de point fermé z, mais alors $X_{\text{réd}}$ est intègre et U non vide, donc $Z = X_{\text{réd}}$ et l'assertion est évidente (il suffisait donc, au lieu de X géométriquement unibranche, de supposer ici que les anneaux locaux de $X_{\text{réd}}$ sont intègres). Pour la deuxième assertion, regardant fibre par fibre, on se ramène grâce à (VIII 5.3) *loc. cit.* au cas où X est strictement local, et à prouver alors que $H^0(X, C_X) \to H^0(U, C_U)$ est bijectif. Or ici encore, X est irréductible, et U en est un ouvert non vide donc irréductible, et les deux membres de l'application précédente s'identifient à C, d'où la conclusion voulue. (On a utilisé ici la notion « géométriquement unibranche » sous la forme de (EGA IV 18.8.14), comme signifiant que les anneaux localisés stricts de $X_{\text{réd}}$ sont intègres). Le cas de l'inclusion d'un point maximal (énoncé ici pour la commodité de références futures) se traite exactement de la même façon.

Remarques 2.14.2. — Lorsque X est noethérien, la démonstration donnée (ou une déduction immédiate) montre que dans 2.14 (ii), on peut supposer les X'_i intègres ; si de plus on suppose X universellement japonais, i.e. les anneaux de ses ouverts affines universellement japonais (EGA 0_{IV} 23.1.1, IV 7.7.2), on peut de plus supposer les X'_i normaux.

3. Théories de Kummer et d'Artin-Schreier 26

3.0. — On va noter $(\mathbf{G}_m)_X$ le faisceau représenté par le groupe multiplicatif $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_X[t, t^{-1}]$ sur X. Donc pour $U \to X$ étale, les sections de $(\mathbf{G}_m)_X$ sur U sont les éléments inversibles

$\Gamma(U, \mathcal{O}_U^*)$ de $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Soit $n \in \mathbf{N}$. Le noyau de la puissance n-ième dans $(\mathbf{G}_m)_X$ est le « faisceau des racines n-ièmes de l'unité », noté $(\boldsymbol{\mu}_n)_X$ est le « faisceau des racines n-ièmes de l'unité », noté $(\boldsymbol{\mu}_n)_X$. On a donc une suite exacte

$$0 \to (\boldsymbol{\mu}_n)_X \to (\mathbf{G}_m)_X \xrightarrow{n} (\mathbf{G}_m)_X. \tag{3.1}$$

Si n est inversible sur X (c'est-à-dire, si n est premier à chaque caractéristique résiduelle de X), la puissance n-ième est un morphisme surjectif *pour les faisceaux* :

Théorie de Kummer 3.2. — *On a la suite exacte*

$$0 \to (\boldsymbol{\mu}_n)_X \to (\mathbf{G}_m)_X \xrightarrow{n} (\mathbf{G}_m)_X \to 0$$

si $n \in \mathbf{N}$ est inversible sur X.

En effet, soit $u \in (\mathbf{G}_m)_X(U)$, $U \to X$ étale. Il faut trouver un recouvrement étale $\{U_i \to U\}$ de U tel que u induise une puissance n-ième sur chaque U_i. Puisque n est inversible sur U, l'équation

$$T^n - u = 0$$

est « séparable » sur U, i.e. ,

$$U' = \operatorname{Spec} O_U[T]/(T^n - u)$$

est étale au-dessus de U. Comme $U' \to U$ est surjectif, il est couvrant et u induit une puissance n-ième sur U', on a fini.

27 Signalons que lorsque n est inversible sur X, $(\boldsymbol{\mu}_n)_X$ est un faisceau localement constant, en fait localement isomorphe au faisceau $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_X$, et est constant dans des cas importants. La théorie de Kummer donne donc des renseignements sur la cohomologie de X à valeurs dans certains faisceaux constants. En fait, on a par définition

$$H^0(X, (\mathbf{G}_m)_X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*),$$

et pour la dimension 1 on a le

Théorème 3.3. — *(«* théorème 90 de Hilbert *») : On a un isomorphisme*

$$H^1(X, (\mathbf{G}_m)_X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic} X,$$

où Pic X *est le groupe des classes de faisceaux inversibles sur* X.

Démonstration. Cela veut dire que le morphisme canonique

$$H^1(X_{\mathrm{zar}}, (\mathbf{G}_m)_X) \longrightarrow H^1(X_{\mathrm{et}}, (\mathbf{G}_m)_X)$$

est bijectif, ce qui revient au même que de dire que

$$R^1\epsilon_*(\mathbf{G}_m)_X = O$$

où ϵ_* est l'image directe pour le morphisme de sites évident $\epsilon : X_{\mathrm{et}} \to X_{\mathrm{zar}}$ (VIII 4). On est donc réduit au cas où X est affine. Comme on peut calculer H^1 par Čech (V 2.5) et comme il suffit pour un X quasi-compact de prendre des recouvrements quasi-compacts, c'est une conséquence immédiate de la théorie de descente pour les faisceaux (cf. FGA 190, ou SGA VIII 1).

3.3.1. — Supposons X noethérien et sans composante immergée et soient x_j les points maximaux de X. Soit R_j l'anneau artinien local de X en x_j, et i_j : Spec $R_j \to X$ le morphisme d'inclusion. On a une injection canonique 28

$$(\mathbf{G}_m)_X \longrightarrow \prod_j i_{j*}(\mathbf{G}_m)_{\mathrm{Spec}\,R_j}$$

de faisceaux sur X_{et} (resp. X_{zar}). Le conoyau D est appelé le *faisceau dés diviseurs de Cartier* sur X_{et} (resp. X_{zar})[(i)].

Corollaire 3.4. — *Soit X noethérien et sans composante immergée, soit $\epsilon : X_{\text{ét}} \to X_{\mathrm{zar}}$ le morphisme de sites canonique, et soit D le faisceau des diviseurs de Cartier sur X_{et}. Alors $\epsilon_* D$ est le faisceau D_{zar} des diviseurs de Cartier sur X_{zar}, et on a en particulier :*

$$H^0(X_{\mathrm{et}}, D) \approx H^0(X_{\mathrm{zar}}, D_{\mathrm{zar}}).$$

Démonstration. Si l'on applique ϵ_* à la suite exacte

$$0 \to (\mathbf{G}_m)_X \longrightarrow \prod_j i_{j*}(\mathbf{G}_m)_{\mathrm{Spec}\,R_j} \longrightarrow D \longrightarrow 0,$$

on trouve une suite exacte puisque $R^1\epsilon_*(\mathbf{G}_m)_X = 0$ (3.3), d'où la première assertion.

Dans le cas où X admet une caractéristique $p \neq 0$, le résultat suivant remplacera parfois 3.2 pour l'étude des coefficients de p-torsion :

Théorie d'Artin-Schreier 3.5. — *On a la suite exacte*

$$0 \to (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_X \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_X \to 0,$$

si X est de caractéristique $p > 0$, où $\mathfrak{p}$ est le morphisme de groupes additifs défini par $\mathfrak{p}(f) = f^p - f$.

Le noyau de $\mathfrak{p}$ est le faisceau des sections de O_X qui sont localement dans le corps premier, donc est in faisceau constant. Le morphisme $\mathfrak{p}$ est surjectif pour la topologie étale parce 29
que l'équation $T^p - T - a$ ($a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$) est toujours « séparable » en caractéristique p, i.e. définit un revêtement étale de U. Pour appliquer cette suite exacte on utilisera bien entendu (VII 4.2).

Proposition 3.6. — (i) *Soit X un schéma et $i : x \to X$ l'inclusion d'un point. Alors*

$$H^1(X, i_*(\mathbf{Z})_x) = 0$$

où $(\mathbf{Z})_x$ est le « faisceau constant » (cf. 2.0) *de valeur $\mathbf{Z}$.*

(ii) *Si X est irréductible et si pour chaque point géométrique $\overline{x}$ de X le localisé strict $X_{\overline{x}}$ de X en $\overline{x}$ est irréductible (on devrait dire « X est géométriquement unibranche »* cf. EGA IV 18.8.14*) alors on a*

$$H^i(X, \mathbf{Z}_x) = 0.$$

Démonstration.

[(i)]Dans EGA IV 21, on dit simplement « diviseurs » au lieu de « diviseurs de Cartier ».

(i) De la suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = H^p(X, R^q i_*(\mathbf{Z})_x) \Longrightarrow H^{p+q}(x, (\mathbf{Z})_x)$$

on déduit une injection $H^1(X, i_*(\mathbf{Z})_x) \to H^1(x, (\mathbf{Z})_x)$. Or puisque $x = \operatorname{Spec} k(x)$ est le spectre d'un corps, il est bien connu que $H^1(x, (\mathbf{Z})_x) = 0$ (cela résulte du fait que $H^q(x, F)(q > 0)$ est de torsion en tout cas (cf. VII 2.2 et CG), et des suites exactes $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{n} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n \to 0$), d'où le résultat.

(ii) Soit $i : x \to X$ l'inclusion du point générique de X. On voit immédiatement que sous les conditions de (ii) le morphisme canonique $(\mathbf{Z})_X \to i_*(\mathbf{Z})_x$ est bijectif (la réciproque étant d'ailleurs vraie également !), et (ii) est ainsi réduit à (i).

30 ***Remarques 3.7***. — Dans 3.6 (i) et (ii) on peut remplacer $\mathbf{Z}$ par n'importe quel groupe abélien sans torsion. D'autre part, (ii) devient faux si on y abandonne l'hypothèse que X est géométriquement unibranche, comme on voit par exemple en prenant pour X une courbe algébrique sur un corps K, admettant un point double ordinaire (faire le calcul de $H^1(X, \mathbf{Z})$ dans ce cas !).

4. Cas d'une courbe algébrique

4.0. — Soit X un schéma noethérien de dimension 1. Soient $R(X)$ l'anneau des fonctions rationnelles sur X, et $i : \operatorname{Spec} R(X) \to X$ le morphisme d'inclusion. L'anneau $R(X)$ est artinien, produit des anneaux locaux de X aux points maximaux, et on peut utiliser les résultats de (VIII 2).

Soit F un faisceau abélien sur $\operatorname{Spec} R(X)$ et considérons les faisceaux $R^q i_* F$, $q > 0$, sur X. Il résulte aussitôt de VIII 5.2 que la fibre de $R^q i_* F$ en un point géométrique au-dessus d'un point maximal de X est nulle. Puisque X est de dimension 1, un tel faisceau est de nature très spéciale :

Lemme 4.1. — *Soient X noethérien et F un faisceau sur X. Les conditions suivantes sont équivalentes (on appellera un faisceau satisfaisant à ces conditions un « skyscraper sheaf ») :*

(i) *Le fibre de F, en tout point géométrique $\overline{x}$ de X qui est au-dessus d'un point non-fermé $x \in X$, est nulle.*

(ii) *Chaque section $s \in F(X')$ ($X' \to X$ étale de type fini) est nulle, sauf en un nombre fini de points fermés de X.*

(iii) *On a $F \approx \bigoplus_x i_{x*} i_*{}^* F$, où x parcourt l'ensemble des points fermés de X et où $i_x : x \to X$ est l'inclusion.*

31 Démonstration. Supposons que (i) soit vrai, et soit $z \in F(X')$ ($X' \to X$ étale de type fini). Alors le support de z (VIII 6.6) est une partie fermée de X' formée de points *fermés*, donc finie (X' étant noethérien), d'où (i) ⇒ (ii). L'implication (ii) ⇒ (i) résulte du calcul des fibres (VIII 3.9), et (iii) implique (i), car pour toute famille (G_x) de faisceaux sur les points fermés x de X, le faisceau $F = \oplus i_{x*}(G_x)$ sur X satisfait (i), comme il résulte de fait que les foncteurs fibres commutent aux sommes directes, et que le support de $i_{x*}(G_x)$ est évidemment contenu dans $\{x\}$.

Il reste à démontrer que (ii) implique (iii). Considérons le morphisme canonique

$$F \longrightarrow \prod_x i_{x*} i_x{}^* F,$$

x parcourant l'ensemble des points fermés de X. D'après (ii), il se factorise par

$$F \longrightarrow \bigoplus_x i_{x*} i_x{}^* F,$$

ce qui donne le morphisme cherché. Nous laissons au lecteur la vérification du fait qu'il est bijectif.

4.1.1. — Appliquons le lemme au faisceau $R^q i_* F$ introduit plus haut : On a

$$R^q i_* F \xrightarrow{\sim} \bigoplus_x i_{x*} i_x * (R^q i_* F)$$

(x parcourant l'ensemble des points fermés de X). Or d'après (VIII 5) la fibre de $R^q i_* F$ en un point géométrique $\overline{x}$ de X est

$$(R^q i_* F)_{\overline{x}} \simeq H^q(\operatorname{Spec} R(X_{\overline{x}}), F)$$

où $R(X_{\overline{x}}) \simeq R(X) \otimes_{O_X} O_{X_{\overline{x}}}$, $X_{\overline{x}}$ étant le localisé strict de X en $\overline{x}$ (VIII 4), et où on dénote 32
aussi par F le faisceau induit par F sur Spec $R(X_{\overline{x}})$. Supposons maintenant que le corps résiduel de tout point fermé x de X soit séparablement clos. On aura donc (cf. aussi (VI. 1))

$$\begin{aligned}
H^p(X, R^q i_* F) &\simeq H^p(X, \bigoplus_x i_{x*} i_x * (R^q i_* F)) \\
&\simeq \bigoplus_x H^p(X, i_{x*} i_x * (R^q i_* F)) \\
&\simeq \bigoplus_x H^p(x, i_x * (R^q i_* F)) \\
&\simeq \begin{cases} \bigoplus_x H^q(\operatorname{Spec} R(X_x), F) & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

On trouve le

Corollaire 4.2. — *Soient X un schéma noethérien de dimension 1, tel que pour tout point fermé x de X, le corps résiduel $k(x)$ soit séparablement clos. Soit F un faisceau abélien, sur* Spec $R(X)$ *(où $R(X)$ = anneau des fonctions rationnelles sur X). Considérons la suite spectrale de Leray ( ).*

$$E_2^{pq} = H^p(X, R^q i_* F) \Longrightarrow H^{p+q}(\operatorname{Spec} R(X), F).$$

On a

$$\begin{aligned}
&E^{pq} = 0 \textit{ si } p \textit{ et } q > 0, \\
&E_2^{0q} = \bigoplus_x H^q(\operatorname{Spec} R(X_x), F) \textit{ si } q > 0,
\end{aligned}$$

où x parcourt l'ensemble des points fermés de X, et où X_x est le localisé strict de X au point x.

La suite spectrale donne donc une suite exacte 33

$$
\begin{aligned}
0 \longrightarrow H^1(X, i_*F) \longrightarrow H^1(\operatorname{Spec} R(X), F) \longrightarrow \bigoplus_x H^1(\operatorname{Spec} R(X_x), F) \\
\longrightarrow H^2(X, i_*F) \longrightarrow H^2(\operatorname{Spec} R(X), F) \longrightarrow \bigoplus_x H^2(\operatorname{Spec} R(X_x), F) \\
\longrightarrow \dots
\end{aligned}
$$

4.3. — Supposons maintenant que de plus la ℓ-dimension cohomologique de Spec $R(X)$, pour un nombre premier ℓ donné, soit au plus égale à 1 (c'est-à-dire qu'on ait $H^q(\operatorname{Spec} R(X), F) = 0$, $q > 1$, pour chaque faisceau F de ℓ-torsion sur Spec $R(X)$). Soient $K^1, \dots, K^m$ les corps résiduels de l'anneau artinien $R(X)$, i.e. les corps résiduels des points maximaux de X. Tenant compte du dictionnaire (VIII 2) la ℓ-dimension cohomologique de Spec $R(X)$ est

$$
\operatorname{cd}_\ell(\operatorname{Spec} R(X)) = \sup_i \{\operatorname{cd}_\ell(G(\overline{K}^i/K^i))\},
$$

où $\operatorname{cd}_\ell(G)$ est la ℓ-dimension cohomologique du groupe profini G [cf. CG].

Chaque corps résiduel K_x de $R(\overline{X}(x))$, pour un localisé strict $\overline{X}(x)$ de X, s'identifie évidemment à une extension séparable (infinie) d'un des K^i, d'où

$$
\operatorname{cd}_\ell(G(\overline{K}_x/K_x)) \leq \operatorname{cd}_\ell(G(\overline{K}^i/K^i))
$$

d'après (CG II 4.1, Prop. 10). Donc la ℓ-dimension cohomologique $\operatorname{cd}_\ell(\operatorname{Spec} R(\overline{X}(x)))$ est aussi ≤ 1.

En appliquant la suite exacte de 4.2 à un F de ℓ-torsion, on trouve

$$
\begin{cases}
0 \to H^1(X, i_*F) \to H^1(\operatorname{Spec} R(X), F) \to \\
\qquad \bigoplus_x H^1(\operatorname{Spec} R(\overline{x}(x)), F) \to H^2(X, i_*F) \to 0, \\
H^q(X, i_*F) = 0 \text{ pour } q > 2.
\end{cases} \tag{4.3.1}
$$

34 Remarquons que l'hypothèse que $\operatorname{cd}_\ell(\operatorname{Spec} R(X))$ soit ≤ 1 est satisfait si X est une courbe algébrique sur un corps séparablement clos. (*Théorème de Tsen* [6, th. 4.3]). Des suites exactes analogues ont été étudiées dans ce cas par Ogg[2] et Šafarevic.

4.4. — Supposons que ℓ soit inversible sur X et prenons $F = (\mathbf{G}_m)R(X)$. Appliquant 3.3 et [CG, chap. I. prop. 12], on trouve, toujours sous l'hypothèse que $\operatorname{cd}_\ell(\operatorname{Spec} R(X)) \leq 1$.

$$
\begin{cases}
H^1(\operatorname{Spec} R(X), \mathbf{G}_m) = 0 \\
H^q(\operatorname{Spec} R(X), \mathbf{G}_m) \underset{\ell}{=} 0 \quad q \geq 2,
\end{cases} \tag{4.4.1}
$$

où le ℓ sous l'égalité veut dire que le groupe du premier membre, qui est de torsion en tout cas, n'a pas de ℓ-torsion.

On a le même résultat si on remplace $R(X)$ par $R(\overline{X}(x))$. Puisque le faisceau $\mathbf{G}_m$ sur Spec $R(X)$ induit évidemment de faisceau $\mathbf{G}_m$ sur Spec $R(\overline{X}(x))$, on déduit de 4.2

$$
\begin{cases}
H^1(X, i_*(\mathbf{G}_m)_{R(X)}) = 0 \\
H^q(X, i_*(\mathbf{G}_m)_{R(X)}) \underset{\ell}{=} 0, \text{ si } q > 1.
\end{cases} \tag{4.4.2}
$$

Or pour tout faisceau F sur X, on voit grâce à 4.1 que le noyau P et conoyau Q de l'homomorphisme canonique $F \to i_*i^*F$ sont des « faisceaux gratte-ciel », donc (comme les corps résiduels en les points fermés de X sont supposés séparablement clos) on a $H^i(X,P) = H^i(X,Q) = 0$ pour $i > 0$, ce qui implique aussitôt, par la suite exacte de cohomologie, que

$$H^i(X,F) \longrightarrow H^i(X, i_* i^* F)$$

est un isomorphisme pour $i \geq 2$. Compte tenu de (4.4.2) on en conclut la relation 35

$$H^i(X, \mathbf{G}_m) \underset{\ell}{=} 0 \text{ pour } i \geq 2, \tag{4.5}$$

valable lorsque X est un préschéma noethérien de dimension 1, satisfaisant à $\mathrm{cd}_\ell(R(X)) \leq 1$, et dont les corps résiduels en les points fermés sont séparablement clos. Compte tenu de la théorie de Kummer (3.2) et de (3.3) on en conclut le

Théorème 4.6. — *Soient X noethérien de dimension 1, n un entier qui est inversible sur X, supposons que $\mathrm{cd}_\ell(R(X)) \leq 1$ pour chaque nombre premier ℓ qui divise n, et que pour tout point fermé x de X, le corps résiduel $k(x)$ soit séparablement clos. Alors on a*

$$H^q(X, (\boldsymbol{\mu}_n)_X) = 0 \textit{ si } q > 2,$$

et la cohomologie pour $q \leq 2$ est donnée par la suite exacte

$$\begin{gathered} 0 \to H^0(X,(\boldsymbol{\mu}_n)_X) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{n} \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) \to \\ H^1(X,(\boldsymbol{\mu}_n)_X) \to \operatorname{Pic} X \xrightarrow{n} \operatorname{Pic} X \to H^2(X,(\boldsymbol{\mu}_n)_X) \to 0. \end{gathered}$$

Corollaire 4.7. — *Soit X une courbe complète connexe sur un corps séparablement clos k, de caractéristique première à n. Alors on a*

$$H^0(X,(\boldsymbol{\mu}_n)_X) \simeq \boldsymbol{\mu}_n(k),$$
$$H^1(X,(\boldsymbol{\mu}_n)_X) \simeq {}_n(\operatorname{Pic} X) = \textit{ensemble des éléments de } \operatorname{Pic} X \textit{ dont l'ordre divise } n,$$
$$H^2(X,(\boldsymbol{\mu}_n)_X) \simeq (\operatorname{Pic} X)/n \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^c,$$

où c est l'ensemble des composantes irréductibles de X. 36

Pour la dernière assertion, « rappelons » que le « schéma de Picard » [TDTE V] d'un tel $X/\operatorname{Spec} k$ admet une décomposition

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \operatorname{Pic}_{X/k} \longrightarrow \mathbf{Z}^c \longrightarrow 0 \tag{4.8}$$

où A est un groupe algébrique connexe sur $\operatorname{Spec} k$. Or l'application « multiplication par n » dans un tel A est étale, donc surjectif pour les points à valeurs dans k. Il s'ensuit qu'on a

$${}_n(\operatorname{Pic} X) \approx {}_n(A(k))$$

et

$$(\operatorname{Pic} X)/n \approx (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^c.$$

Si X est lisse sur $\operatorname{Spec} k$, de sorte que la jacobienne A est une variété abélienne, le groupe ${}_n(\operatorname{Pic} X)$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/n)^{2g}$, où g est le genre de X. Bien entendu, on a aussi $\boldsymbol{\mu}_n(k) \approx \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, donc les rangs des groupes de cohomologie en tant que $\mathbf{Z}/n$-modules sont 1, $2g$, 1, ce qui est le résultat auquel on devait s'attendre.

5. La méthode de la trace

5.1. — Soit X un schéma, $f : X' \to X$ un revêtement étale, et F un faisceau sur X. Alors les formules d'adjonction donnent un morphisme de *restriction*

$$F \xrightarrow{\text{res}} f_* f^* F.$$

Comme f est fini, on a $H^q(X, f_* f^* F) \simeq H^q(X', f^* F)$ d'où un morphisme, appelé également restriction :

$$H^q(X, F) \xrightarrow{\text{res}} H^q(X', f^* F), \tag{5.1.1}$$

37 qui est d'ailleurs le morphisme évident. Mais dans le cas f étale on a aussi un autre morphisme, appelé *morphisme trace*

$$f_* f^* F \xrightarrow{\text{tr}} F, \tag{5.1.2}$$

qui donne des morphismes sur la cohomologie

$$H^q(X', f^* F) \xrightarrow{\text{tr}} H^q(X, F). \tag{5.1.3}$$

Le morphisme trace est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

(i) Il est de caractère local pour la topologie étale.
(ii) Si X' est somme disjointe de d copies de X, de sorte que $f_* f^* F \simeq F^d$, la trace est l'application somme $F^d \to F$.

L'unicité est triviale à partir de (i), (ii) puisque tout revêtement étale est localement constant. Ayant l'unicité, l'existence s'ensuit par l'argument usuel de descente.

De (ii) on déduit la formule suivante :

$$\text{tr} \circ \text{res} : F \longrightarrow F \text{ est la multiplication par le degré local de } f. \tag{5.1.4}$$

Si le degré est une constante d, on en déduit que le morphisme $\text{tr} \circ \text{res} : H^q(X, F) \to H^q(X, F)$ est la multiplication par d.

Corollaire 5.2. — *Soit $f : X' \to X$ un revêtement étale de degré constant d. Si F est un faisceau de r-torsion sur X avec $(r, d) = 1$, alors $H^q(X', f^* F) = 0$ implique que $H^q(X, F) = 0$.*

38 En effet, la multiplication par d induit un isomorphisme de F, donc un isomorphisme sur la cohomologie. Si ce dernier isomorphisme se factorise par zéro, on a $H^q(X, F) = 0$.

5.2.1. — Soient maintenant $i : U \to X$ une immersion, $f : U' \to U$ un revêtement étale de degré d, et supposons f induit par un morphisme fini $g : X' \to X$ par changement de base, i.e. on a alors le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "g"] \\ U \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

Soit F un faisceau sur U. On a

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[rr, bend right, "d"'] & f_* f^* F \arrow[r, "\mathrm{tr}"] & F, \end{tikzcd}$$

donc, comme $i_* f_* = g_* i'_*$,

(5.3)
$$\begin{tikzcd} i_* F \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[rr, bend right, "d"'] & g_* i'_* f^* F \arrow[r, "\mathrm{tr}"] & i_* F, \end{tikzcd}$$

et comme $i_! f_* \simeq g_* i'_!$ (résulte p.ex. de (VIII 5.5)),

(5.4)
$$\begin{tikzcd} i_! F \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[rr, bend right, "d"'] & g_* i'_! f^* F \arrow[r, "\mathrm{tr}"] & i_! F, \end{tikzcd}$$

d'où

(5.3′)
$$\begin{tikzcd} H^q(X, i_* F) \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[rr, bend right, "d'"'] & H^q(X', i'_* f^* F) \arrow[r, "\mathrm{tr}"] & H^q(X, i_* F) \end{tikzcd}$$

et 39

(5.4′)
$$\begin{tikzcd} H^q(X, i_! F) \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[rr, bend right, "d"'] & H^q(X', i'_! f^* F) \arrow[r, "\mathrm{tr}"] & H^q(X, i_! F); \end{tikzcd}$$

On déduit de (5.4) les corollaires suivants :

Proposition 5.5. — *Soit X un schéma quasi-compact et quasi-séparé, $\ell \in \mathbf{P}$, et soit H un foncteur semi-exact à valeurs dans* (Ab)*, défini sur la catégorie des ℓ-faisceaux sur X, et compatible avec les limites inductives filtrantes. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $H = 0$.

(ii) $H(f_* i_!(\mathbf{Z}/\ell)) = 0$ *pour chaque $f : Y \to X$ fini, et chaque ouvert $i : U \to Y$ de Y, tel que U soit de présentation finie sur X. Si X est noethérien, on peut même se borner à prendre Y intègre.*

Démonstration. D'après 2.7.2 et 2.5 il suffit de vérifier $H(F) = 0$ pour F de la forme $F = i_! G$, où $i : U \to X$ est l'inclusion d'un sous-schéma de X de présentation finie sur X, et où G est un ℓ faisceau localement constant « isotrivial » sur U. Soit $U'' \to U$ un revêtement principal, de groupe g ; tel que g devienne constant sur U''. Soit A le ℓ-groupe des valeurs de G sur U''. Le groupe g opère sur A, et cette opération détermine la structure de G. Soit h un ℓ-sous-groupe de Sylow de g, et soit $U' = U''/h$ le revêtement de U correspondant à h. Le degré d de U' sur U est premier à ℓ. Prenons un prolongement de $f : U' \to U$ en un morphisme fini $g : X' \to X$, qui existe toujours (EGA IV 8.12.6), et soit $i' : U' \to X'$

l'inclusion. En appliquant (5.4) et le fait que d est premier à ℓ, on se réduit à démontrer que $H(g_* i'_! f^* G) = 0$.

40 Or il est bien connu que le seul groupe abélien de ℓ-torsion qui est simple pour une opération d'un ℓ groupe h est $\mathbf{Z}/\ell$ avec opération triviale, et il s'ensuit qu'il existe une filtration de A en tant que h-module, dont les quotients successifs sont isomorphes à $\mathbf{Z}/\ell$ avec opération triviale. Cette filtration donne une filtration correspondante de f^*G, et il suffit donc, pour démontrer que $H(g_* i'_! f^* G) = 0$ de démontrer que $H(g_* i'_! \mathbf{Z}/r) = 0$, d'où le résultat.

Proposition 5.6. — *Soient X un schéma noethérien, $\ell \in \mathbf{P}$, et φ une fonction à valeurs dans $\mathbf{N}$, définie sur l'ensemble des schémas intègres finis sur X. Supposons que $\varphi(Y_1) \leq \varphi(Y_2)$ chaque fois qu'il existe un X-morphisme $Y_1 \to Y_2$, et que l'inégalité est stricte si Y_1 est un sous-schéma fermé de Y_2, distinct de Y_2. Pour tout Y fini sur X, posons $(Y) = \mathrm{Sup}(Y_i)$, où les Y_i sont les composantes irréductibles de Y, munis de la structure induit réduite. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour chaque Y fini sur X et chaque ℓ-faisceau F sur Y on a $H^q(Y, F) = 0$ si $q > \varphi(\mathrm{Supp}\, F)$.*
(ii) *Pour chaque Y intègre fini sur X on a $H^q(Y, \mathbf{Z}/\ell) = 0$ si $q > \varphi(Y)$.*

Démonstration. Supposons que (ii) soit vrai. On peut appliquer la proposition précédente à chaque H^q, tenant compte que la cohomologie commute aux limites inductives et aux images directes par morphismes finis, et on se réduit ainsi pour la vérification de (i) au cas Y intègre fini sur X, et F de la forme $i_!(\mathbf{Z}/\ell)_U$, où $i : U \to X$ est un ouvert non-vide.

Or on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow i_!(\mathbf{Z}/\ell)_U \longrightarrow (\mathbf{Z}/\ell)_Y \longrightarrow (\mathbf{Z}/\ell)_Z \longrightarrow 0$$

41 où $Z = Y - U$ donc $Z \neq Y$. Faisant une récurrence sur la valeur de φ, nous pouvons supposer que $H^q(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/\ell) = 0$ pour $q > \varphi(Y) - 1$, d'où $H^q(Y, i_!(\mathbf{Z}/\ell)) = 0$ pour $q > \varphi(Y)$ grâce à la suite exacte de cohomologie.

Corollaire 5.7. — *Soit X une courbe algébrique sur un corps k séparablement clos et de caractéristique différente de ℓ, $\ell \in \mathbf{P}$. Alors la cohomologie de X dans un faisceau F de ℓ-torsion est nulle en dimension > 2. Si X est affine, la cohomologie est nulle en dimension > 1.*

Posons, pour Y fini intègre sur X, $\varphi(Y) = 2 \dim Y$ (resp. $\varphi(Y) = \dim Y$ si X, donc Y, est affine). D'après 7.6 il suffit de démontrer que $H^q(Y, \mathbf{Z}/\ell) = 0$ si $q > \varphi(Y)$, or c'est trivial si $\dim Y = 0$. Il reste donc à démontrer que $H^q(Y, \mathbf{Z}/\ell) = 0$ si $q > 2$ (resp. si $q > 1$ dans le cas affine) pour une courbe intègre Y. Puisque $(\mathbf{Z}/\ell)_Y \simeq (\boldsymbol{\mu}_\ell)_Y$, c'est conséquence de 4.6 pour $q > 2$.

Supposons X affine. Puisque les extensions radicielles n'affectent pas la cohomologie (VIII 1.1), on se réduit au cas où k est algébriquement clos. Soit $f : X' \to X$ la normalisation de X, qui est un morphisme fini et un isomorphisme en dehors d'un ensemble fini de points, disons S. On a une suite exacte de faisceaux sur X

$$0 \longrightarrow (\mathbf{Z}/n)_X \longrightarrow f_*(\mathbf{Z}/n)_{X'} \longrightarrow \epsilon \longrightarrow 0,$$

où ϵ est concentré sur S, donc où $H^q(X, \epsilon) = 0$ pour $q > 0$. On se ramène par (VIII 5.6) à démontrer que

$$H^q(X, f_*(\mathbf{Z}/n)_{X'}) \simeq H^q(X', \mathbf{Z}/n) = 0$$

si $q > 1$, c'est-à-dire, au cas X normale. On peut aussi évidemment supposer X connexe. Soit $i : X \to \overline{X}$ une immersion ouverte avec $\overline{X}$ complète et non-singulière. Puisque X est affine, il manque au moins un point de $\overline{X}$, et on voit immédiatement que par suite le morphisme

$$A(k) \longrightarrow \operatorname{Pic} X$$

est surjectif, où A est la Jacobienne de $\overline{X}$ (cf. (4.8)). Puisque $A(k)$ est divisible par $\ell \neq \operatorname{car} k$, 42
il en est de même de Pic X, d'où $H^2(X, \boldsymbol{\mu}_\ell) = 0$ par 4.6, C.Q.F.D.

Remarque 5.8. — Signalons, pour référence ultérieure, que le raisonnement de 5.5 établit en fait le résultat suivant : Soient X un schéma quasi-compact et quasi-séparé, ℓ un nombre premier, $\boldsymbol{C}$ une sous-catégorie strictement pleine de la catégorie des faisceaux abéliens de ℓ-torsion constructibles, stable par facteurs directs et par extensions. Supposons que pour chaque morphisme fini $f : Y \to X$ et chaque ouvert $i : U \to Y$ de Y qui est de présentation finie sur X, on ait $f_*(i_!(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})_U) \in \boldsymbol{C}$. Alors $\boldsymbol{C}$ contient tous les faisceaux constructibles de ℓ-torsion.

Références

[1] Gabriel, P. Des Catégories Abéliennes, Thèse, Paris (1962).

[2] Ogg, A. Cohomology of abelian varieties over functions fields, Annals of Math. Vol. 76, No. 2 (1962).

[3] Deuring, M. Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper, Hamb. Abh. Bol. 13 (1940) p. 197.

[4] Grothendieck, A. Fondements de la Géométrie Algébrique, Extraits du Séminaire Bourbaki 1957-1962), Secrétariat mathématique, 11, rue Pierre Curie, Paris 5ème. (*Cité* FGA).

[5] Serre, J.P. Cohomologie Galoisienne, Lecture Notes nº 5, (Springer) (*Cité* CG).

[6] Douady, A. Cohomologie des groupes compacts totalement discontinus, Séminaire Bourbaki, exp. 189.