VI. Conditions de finitude. Topos et sites fibrés. Applications aux questions de passage à la limite.

A. Grothendieck et J.-L. Verdier

version : 71766d9 2024-07-30 10:46:55 +0800

Table des matières

0. Introduction

Dans le présent exposé, nous étudions deux genres de questions intimement liées. 165

Tout d'abord, nous faisons une étude systématique des conditions de finitude pour les topos, en étudiant successivement la notion de *quasi-compacité*, de *quasi-séparation* et de *cohérence* (= quasi-compacité + quasi-séparation), inspirée des notions analogues bien connues en théorie des schémas, dans le cas d'un objet X d'un topos et celui d'une flèche $u : X \to Y$ d'un topos (§ 1), puis pour le topos E lui-même (§ 2), enfin pour un morphisme de topos $f : E \to E'$ (§ 3). Le § 4 étudie ces notions dans le cas particulier d'un topos obtenu par le procédé de recollement de deux topos (IV 9). Pour les paragraphes suivants, ce qu'il suffit essentiellement de retenir de ces développements un peu techniques, c'est la définition d'un *topos cohérent* comme un topos équivalent à un topos de la forme $C^\sim$, où C est un petit site dans lequel les limites projectives finies sont représentables et où toute famille couvrante admet une sous-famille couvrante finie ; et celle d'un *morphisme cohérent* $f : E \to E'$ de topos cohérents comme étant un morphisme qui peut se décrire (à équivalence près) comme un morphisme associé à un morphisme de sites $f : C \to C'$, où C et C' sont comme ci-dessus, et où le foncteur correspondant $f^* : C' \to C$ est exact à gauche.

Il est sans doute utile de noter qu'avec les notions de finitude utilisés ici, et notamment celle de topos cohérent, nous nous éloignons résolument (et pour la première fois) des espaces topologiques familiers aux analystes et aux « topologues » [i]. Ainsi le topos associé (IV 2.1) à un espace topologique séparé X n'est cohérent que si X est un ensemble fini ! C'est dire que le présent exposé est entièrement orienté vers les types de topos provenant de la

i. Les guillemets indiquent qu'il s'agit d'un « … » qui ignore la notion de topos (cf. IV 0.4 pour le sens du mot « topologie »).

géométrie algébrique et l'algèbre. En fait, tous les topos utilisés jusqu'à présent dans ces disciplines (sauf bien sûr pour la géométrie algébrique par voie transcendante sur le corps des complexes !) se trouvent être localement cohérents.

En deuxième lieu ; nous développons deux *théorèmes de passage à la limite inductive* pour
166 la cohomologie des topos. L'un (5.2) nous dit que les foncteurs $H^i(E,-)$ sur un topos cohérent commutent aux limites inductives de faisceaux abéliens. L'autre (8.7) dit essentiellement que si un topos X est représenté comme une limite projective filtrante de topos cohérents X_i, avec des morphismes de transition $f_{ij} : X_j \to X_i$ cohérents, alors la cohomologie de X (à coefficients dans un faisceau abélien quelconque) se calcule comme limite inductive des cohomologies des X_i. Pour donner un sens précis à cet énoncé, il convient surtout de préciser la notion de « limite projective de topos », ce qui est fait dans les § § 7.8. C'est là une notion géométrique fort utile, y compris sans doute dans d'autres contextes que celui des limites projectives de schémas (qui avait servi de modèle à M.Artin dans sa définition initiale de cette notion). Nous montrons par exemple (8.4) comment on peut unifier les diverses notions de « localisé en un point » (d'un espace noethérien, d'un schéma pour sa topologie habituelle, voire pour sa topologie étale), en le définissant comme la limite projectives des « voisinages » de ce point, -en parfait accord avec l'idée intuitive de la notion de localisation en un point.

Les deux théorèmes de passage à la limite seront réexplicités dans l'exposé suivant dans le cadre particulier de la cohomologie étale des schémas (VII 3.3 et 5.7) ; dans ce cas, ils seront d'ailleurs constamment utilisés dans toute la suite de ce Séminaire, et pratiquement partout où on a travaillé jusqu'à présent avec la cohomologie étale. Le lecteur disposé à admettre ces deux théorèmes, dans le cas particulier où ils sont énoncés dans l'exposé VII, et intéressé exclusivement par les applications de la cohomologie étale, peut donc omettre la lecture du présent exposé. Il est vrai que la notion *d'objet constructible* d'un topos (i.e. dont le morphisme structural $X \to e$ dans l'objet final e est cohérent) jouera également un rôle important dans toute la suite du séminaire (alors qu'elle ne joue qu'un rôle très secondaire dans le présent exposé, ne serait-ce que parce que dans le cas d'un topos cohérent, elle coïncide avec la notion d'objet cohérent, qui a ici la vedette). Mais cette notion est développée dans l'exposé IX, dans le cas particulier des faisceaux étales sur les schémas, d'une façon indépendante de l'étude générale faite dans le présent exposé, et elle présente d'ailleurs dans ce des phénomènes spéciaux fort utiles, qui ont servi de base à l'exposé qui en est fait dans IX (à commencer par la définition IX 2.3). La rédaction de IX étant antérieure de cinq
167 années à la présente rédaction de l'exposé VI, et néanmoins fort utilisable pour l'usager, nous nous sommes bornés à la fin de l'exposé IX de prouver l'équivalence de la notion de constructibilité utilisée dans IX avec celle introduite ici.

1. Conditions de finitude pour les objets et flèches d'un topos

Définition 1.1. — *Soit* **C** *un site. Un objet X de* **C** *est dit quasi-compact si pour toute famille couvrante $(X_i \to X)_{i\in I}$, il existe une partie finie J de l'ensemble d'indices I telle que la sous-famille $(X_i \to X)_{i\in J}$ soit encore couvrante.*

Comme un $\mathscr{U}$-topos E est toujours considéré comme un site (IV 1.1.1), la définition précédente s'applique en particulier à un objet de E. On se ramène d'ailleurs à ce cas, grâce à la

Proposition 1.2. — *Soient* C *un* $\mathscr{U}$*-site,* $\epsilon : C \to C^{\sim}$ *le foncteur canonique,* X *un objet de* C*. Alors* X *est un objet quasi-compact du site* C *si et seulement si* $\epsilon(X)$ *est un objet quasi-compact du topos* $C^{\sim}$*.*

Supposons que X soit quasi-compact, prouvons que $\epsilon(X)$ l'est. Soit $(F_i \to \epsilon(X))_{i\in I}$ une famille épimorphique. Prenons pour tout $i \in I$ une famille épimorphique $\epsilon(X_{ij}) \to F_i$, $j \in J_i$. Le composé $\epsilon(X_{ij}) \to \epsilon(X)$ s'identifie à un élément α_{ij} de $\epsilon(X)(X_{ij})$; on ne peut affirmer en général qu'il provient d'un morphisme $X_{ij} \to X$, mais par construction du faisceau associé $\epsilon(X)$, on sait que l'on peut trouver (pour i, j fixés) une famille couvrante $Y_k \to X_{ij}$ telle que les éléments images de α_{ij} dans les $\epsilon(X)(Y_k)$ proviennent d'éléments de $X(Y_k)$, i.e. de morphismes $Y_k \to X$. Donc quitte à raffiner la famille épimorphique $\epsilon(X_{ij}) \to F_i$, on peut supposer que les composés $\epsilon(X_{ij}) \to \epsilon(X)$ proviennent de morphismes $X_{ij} \to X$. 168
Pour i, j variables, la famille des $\epsilon(X_{ij}) \to \epsilon(X)$ est épimorphique, donc (II 4.4) la famille des $X_{ij} \to X$ est couvrante. Par hypothèse sur X, elle admet une sous-famille couvrante finie, et il résulte de nouveau une famille épimorphismes correspondants $\epsilon(X_{ij}) \to \epsilon(X)$ forment une famille épimorphique. Comme ceux-ci se factorisent par un nombre fini des morphismes $F_i \to \epsilon(X)$, cette famille finie est déjà épimorphique. Cela prouve que $\epsilon(X)$ est quasi-compact.

Le fait que $\epsilon(X)$ quasi-compact implique X quasi-compact est d'autre part trivial, grâce à *loc. cit.*

Le résultat précédent montre donc que la notion de quasi-compacité dans les sites de ramène à la notion en question dans les topos.

Proposition 1.3. — *Soient* C *un site,* $(X_i \to X)_{i\in I}$ *une famille couvrante finie, avec les* X_i *quasi-compacts. Alors* X *est quasi-compact.*

Pour le voir, on peut supposer grâce à 1.2 que C est un topos. Soit $(X'_j \to X)$ une famille couvrante i.e. épimorphique dans C, alors pour tout $i \in I$ la famille déduite par le changement de base $X_i \to X$ est épimorphique, donc (puisque X_i est quasi-compact) admet une sous-famille épimorphique finie, correspondant à une partie finie $J_i \subset J$ de l'ensemble d'indices J. Posant $J' = \bigcup_{i\in I} J_i$, J' est une partie finie de J puisque I est fini, et la famille $(X'_j \to X)_{j\in J'}$ est déjà épimorphique puisqu'elle l'est localement, C.Q.F.D.

169 ***Corollaire 1.4***. — *Soit* $(X_i)_{i\in I}$ *une famille d'objets d'un topos* E*, et soit* X *la somme. Pour que* X *soit quasi-compact, il faut et il suffit que tous les* X_i *soient quasi-compacts, et que tous les* X_i *sauf un nombre fini soient isomorphes à « l'objet vide »* $\varnothing_E$ *de* E*.*

La suffisance résulte en effet aussitôt de 1.3 (car la somme ne change pas quand on laisse tomber les commandes vides). Pour la nécessité on note qu'une sous-famille finie $(X_i)_{i\in J}$ doit couvrir X, ce qui implique que pour $i \in I - J$ on a $X_i = X_i \times_X \amalg_{j=J} X_j = \amalg_{j=J} X_i \times_X X_j = \varnothing$ (II 4.5.1) ; d'autre part, pour montrer que tout X_i est quasi-compact, on note que $X \simeq X_i \amalg X'_i$, et que toute famille couvrante $Y_j \to X_i$ de X_i définit une famille couvrante $Y_j \amalg X'_i \to X_j \amalg X'_i = X$ de X, qui admet une sous-famille finie couvrante, ce qui implique évidemment que la famille finie correspondante des $Y_j \to X_i$ est aussi couvrante, ce qui montre que X_i est quasi-compact.

Remarque 1.5.1. — Le fait pour un objet X d'un topos E d'être quasi-compact ne dépend que du topos induit $E_{/X}$, et signifie que l'objet final de ce dernier est quasi-compact. De même, un objet X d'un site C est quasi-compact si et seulement si l'objet final du site induit $C_{/X}$(III 5.1) est quasi-compact.

1.5.2. — Soit X un objet d'un topos E. Pour que X soit quasi-compact, il faut et il suffit que toute famille filtrante croissante $(X_i)_{i\in I}$ de sous-objet de X couvrant X contienne un
170 X_i égal à X. Cette condition ne dépend donc que de l'ensemble ordonné des sous-objets de l'objet X (i.e. des ouverts du topos induit $E_{/X}$).

1.5.3. — Considérons une famille génératrice $(X_i)_{i\in I}$ de E. Il résulte alors des définitions et de 1.3 que : pour qu'un objet X de E soit quasi-compact, il faut qu'il admette une famille couvrante par un nombre fini des X_i, i.e. que X soit isomorphe à un objet quotient d'une somme finie d'objets de E, et cette condition est suffisante si les X_i sont quasi-compacts. Notons d'autre part qu'avec l'hypothèse faite sur E, on peut évidemment, quitte à remplacer la famille génératrice envisagée par une sous-famille, supposer que $I \in \mathscr{U}$. Utilisant le fait que l'ensemble des quotients d'un objet de E est petit (I 7.5), on trouve alors que la sous-catégorie pleine E_{qc} de E formée des objets quasi-compacts de E est équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$, i.e. que le cardinale de l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de E_{qc} est $\in \mathscr{U}$.

Exemple 1.6.1. — Soit X un espace topologique. Un ouvert U de X est un objet quasi-compact du site $\mathrm{Ouv}(X)$ des ouverts de X si et seulement si U est un espace quasi-compact pour la topologie induite par X. Plus généralement, un faisceau F sur X est un objet quasi-compact du topos $\mathrm{Top}(X)$ si et seulement si l'espace étalé X' sur X associé à F est quasi-compact. (Cela résulte de l'assertion précédente, de 1.5 et du fait que $\mathrm{Top}(X)_{/F}$ est équivalent à $\mathrm{Top}(X')$ (IV 5.7)).

171 *1.6.2*. — Considérons sur la catégorie (Sch) des schémas (éléments de $\mathscr{U}$) une des topologies T_i de [6] 6.3 (par exemple la topologie de Zariski, ou la topologie étale, ou la topologie fppf, ou la topologie fpqc). Pour qu'un schéma soit quasi-compact au sens de cette topologie, il faut et il suffit que ce soit un schéma quasi-compact au sens habituel. (Avec les notations de *loc. cit.*, on utilise seulement le fait que toute famille $\in P'$ est finie.)

Définition 1.7. — *Soient E un topos, $f : X \to Y$ une flèche de E. On dit que f est un morphisme quasi-compact si pour toute flèche $Y' \to Y$, avec Y' quasi-compact, l'objet $X' = X \times_Y Y'$ est également quasi-compact. On dit que f est quasi-séparé si le morphisme diagonal $X \to X \times_Y X$ est quasi-compact. On dit que f est cohérent si f est quasi-compact et quasi-séparé.*

1.7.1. — Explicitant la définition d'un morphisme $f : X \to Y$ quasi-séparé on voit qu'elle signifie aussi que pour toute double flèche $g_1, g_2 : X' \rightrightarrows X$ « au-dessus de Y » i.e. telle que $fg_1 = fg_2$, X' quasi-compact implique $\mathrm{Ker}(g_1, g_2)$ quasi-compact.

Proposition 1.8. — *Soit E un topos.*

(i) *Tout isomorphisme dans* E *est un morphisme cohérent, i.e. est quasi-compact et quasi-séparé. Le composé de deux morphismes quasi-compacts (resp. quasi-séparés, resp. cohérents) est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent).*

(ii) *Soient* $f : X \to Y$ *et* $g : Y' \to Y$ *des morphismes dans* E, *et* $f' : X' = X \times_Y$ 172
$Y' \to$ *déduit de* f *par le changement de base* g. *Si* f *est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent), il en est de même de* f'.

(iii) *Soient* $f : X \to Y$ *et* $g : Y \to Z$ *et* $Y \to Z$ *des morphismes dans* E. *Si* gf *est quasi-séparé,* f *est quasi-séparé.*

(iv) *Soient* $f : X \to Y$ *et* $g : Y \to Z$ *des morphismes dans* E, *avec* g *quasi-séparé. Si* gf *est quasi-compact (resp. cohérent), alors* f *est quasi-compact (resp. cohérent).*

Les démonstrations sont bien connues (Cf. EGA IV 1 ou EGA I 2ème édition). Les énoncés (i) et (ii) dans le cas « quasi-compact » résultent trivialement des définitions ; dans le cas « quasi-séparé », la stabilité par changement de base (ii) résulte aussitôt de la définition et du cas précédent, de même que le fait que tout isomorphisme soit quasi-séparé. La stabilité par composition $X \to Y \to Z$ se voit à l'aide du diagramme

(∗)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\Delta_{X/Y}"'] \arrow[dd, bend right=60, "\Delta_{X/Z}"'] & \\
X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[d, "\Delta_{Y/Z}"] \\
X \times_Z X \arrow[r] & Y \times_Z Y
\end{tikzcd}$$

à carré cartésien. Par hypothèse $\Delta_{Y/Z}$ est quasi-compact, donc aussi u qui s'en déduit par 173
changement de base, et $\Delta_{Y/Z}$ est quasi-compact, donc aussi le composé $u\Delta_{X/Y} = \Delta_{X/Z}$. Cela établit (i) et (ii), le cas « cohérent » résultant de la conjonction des deux cas précédents. Pour prouver le premier cas envisagé dans (iv), on considère le diagramme suivant à carrés cartésiens

(∗∗)
$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "gf"] & Z \\
X \arrow[r, "\Gamma_f=(\mathrm{id}_X,f)"] \arrow[d] \arrow[rr, bend right, "f"'] & X \times_Z Y \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[u, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "f\times_Z \mathrm{id}_Y"] & Y \arrow[u, "g"'] \\
Y \arrow[r, "\Delta_{Y/Z}"] & Y \times_Z Y &
\end{tikzcd}$$
.

Par l'hypothèse g est quasi-séparé, $\Delta_{Y/Z}$ est quasi-compact, donc Γ_F est quasi-compact par changement de base ; de même par hypothèse gf est quasi-compact, donc pr_2 l'est aussi par changement de base ; par suite $f = \mathrm{pr}_2\, \Gamma_f$ est quasi-compact comme composé de deux morphismes quasi-compacts. Le cas respé de (iv) résulte aussitôt du cas précédent et de (iii), qu'il reste à prouver maintenant. Pour ceci on reprend le diagramme (∗), en notant que l'hypothèse gf quasi-séparé signifie que $\Delta_{X/Z} = u\Delta_{X/Y}$ est quasi-compact, et que la conclusion f quasi-séparé signifie que $\Delta_{X/Y}$ est quasi-compact, et que la conclusion f quasi-séparé signifie que $\Delta_{X/Y}$ est quasi-compact, ce qui résulte de (iv) une fois qu'on a prouvé que
174 u est quasi-séparé. Or u est manifestement un monomorphisme, et on a en effet le résultat trivial :

Corollaire 1.8.1. — *Tout monomorphisme est quasi-séparé.*

En effet, si $u : X \to Y$ est un monomorphisme, $\Delta_{X/Y}$ est un isomorphisme donc est quasi-compact, C.Q.F.D.

Corollaire 1.8.2. — *Soient $f : X \to Y$, $f' : X' \to Y'$ deux S-morphismes dans E. Si f, f' sont quasi-compacts (resp. quasi-séparés, resp. cohérents), il en est de même de $f \times_S f' : X \times_S X' \to Y \times_S Y'$.*

Cela résulte de façon bien connue de la conjonction de (i) et (ii).

Remarque 1.9.1. — *Soient E une catégorie quelconque, Q une partie de ob stable par isomorphisme (la donnée de Q revient donc à celle d'une sous-catégorie strictement pleine de E), jouant les rôle d'objets « quasi-compacts ». Supposons que dans E les produits fibrés soient représentables. Alors on peut paraphraser la définition 1.7 pour définir la notion de morphismes Q-quasi-compacts, Q-quasi-séparés, et Q-cohérents. Alors 1.8 et 1.8.1. sont valables, et 1.8.2 également lorsque dans E les produits de deux objets sont représentables.*

1.9.2. — Soient S un objet de E, et $f : X \to Y$ un morphisme de $E_{/S}$. Il résulte aussitôt de la remarque 1.5 que pour que f soit quasi-compact (resp. quai-séparé, resp. cohérent) il
175 faut et il suffit que le morphisme correspondant dans E (déduit de f par le foncteur « oubli de S ») le soit. En particulier, si $f : X \to Y$ est un morphisme dans E, prenant ci-dessus $S = Y$, on voit que f est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) si et seulement si le morphisme structural de l'objet (X, f) du topos induit $E_{/Y}$, de but l'objet final dudit topos, est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent). On dit aussi que (moyennant le morphisme structural f) *X est quasi-compact* (resp. *quasi-séparé*, resp. *cohérent*) *au-dessus de Y*, locution qu'on peut interpréter indifféremment comme se rapportant au topos E, ou au topos induit $E_{/Y}$ (dont Y est considéré comme un objet final).

1.9.3. — Un objet X d'un topos ob E sera dit *constructible* s'il est cohérent au-dessus de l'objet final. Tout morphisme d'un objet constructible dans un autre est cohérent (1.8 (iv)). La sous-catégorie pleine E_{cons} de E formée des objets constructibles de E est stable par $\varprojlim$ finies, comme il résulte aussitôt de 1.8.2 et 1.8 (ii).

1.9.4. — Les notions 1.7 n'ont guère d'intérêt que dans les topos E qui admettent une famille génératrice formée d'objets quasi-compacts. Dans ce cas, ces notions sont « de nature locale en bas » (IV 8.5.4), comme on va voir maintenant.

Proposition 1.10. — *Supposons que le topos E admette une sous-catégorie génératrice C formée d'objets quasi-compacts, et soit $f : X \to Y$ un morphisme dans E.* 176

(i) *Pour que f soit quasi-compact, il faut et il suffit que pour tout morphisme $S \to Y$, avec $S \in \mathrm{Ob}\, C$, $X \times_Y S$ soit quasi-compact.*

(ii) *Soit $Y_i \to Y$, $i \in I$, une famille couvrante. Pour que f soit quasi-compact (*resp. *quasi-séparé,* resp. *cohérent) il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, $f_i : X_i = X \times_Y Y_i \to Y_i$ le soit.*

Prouvons (i). La nécessité est triviale par définition. Pour la suffisance, il faut prouver que pour tout objet quasi-compact Y' et tout morphisme $Y' \to Y$, $X' = X \times_Y Y'$ est quasi-compact. Or il existe une famille couvrante $S_i \to Y'$, les S_i dans $\mathrm{Ob}\, C$, et comme Y' est quasi-compact, on peut prendre la famille couvrante en question *finie.* Alors par hypothèse les $X'_i = X \times_Y S_i \simeq X' \times_{Y'} S_i$ sont quasi-compacts, et comme ils couvrent X' (les S_i couvrant Y'), X' est quasi-compact en vertu de 1.3.

Prouvons (ii). Il suffit de traiter le cas « quasi-compact », car le cas « quasi-séparé » s'en déduit par la définition 1.7, et le cas « cohérent » également, par conjonction des deux cas précédents. Le « il faut » a déjà été vu dans 1.8 (ii), il reste à voir que si les f_i sont quasi-compacts, alors f l'est, i.e. que pour tout Y' quasi-compact et tout morphisme $Y' \to Y$, l'objet $X' = X \times_Y Y'$ est quasi-compact. Or comme $(Y_i \to Y)$ est couvrante, il existe des S_α 177
au-dessus de Y couvrant Y', tels que les morphismes composés $S_\alpha \to Y' \to Y$ se factorisent chacun par un Y_i. Comme C est génératrice, on peut prendre les S_α dans $\mathrm{Ob}\, C$, et comme Y' est quasi-compact, on peut prendre la famille couvrante finie. Alors les $X' \times_{Y'} S_\alpha$ forment une famille couvrante finie de X', et on est réduit par 1.3 à prouver que chaque $X' \times_{Y'} S_\alpha = X \times_Y S_\alpha$ est quasi compact. Or, choisissant une factorisation de $S_\alpha \to Y$ par un Y_i, l'objet envisagé est aussi isomorphe à $X_i \times_{Y_i} S$, qui est bien quasi-compact puisque X_i est quasi-compact sur Y_i et S_α est quasi-compact.

Corollaire 1.11. — *Soient $g : Y \to Z$ un morphisme dans le topos E, $(f_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ une famille couvrante de morphismes de but Y. Alors :*

(i) *Supposons I finie. Si les $g f_i$ sont quasi-compacts, il en est de même de g.*

(ii) *Supposons les f_i quasi-compacts. Si les $g f_i$ sont quasi-séparés, il en est de même de g. Si I est fini, et si les $g f_i$ sont cohérents, g est cohérent.*

Le cas (i) résulte aussitôt des définitions et de 1.3, (sans hypothèse sur E). Pour prouver (ii), il suffit en vertu de (i) de traiter le cas non respé. Considérons le diagramme 1.8 $(*)$ avec X remplacé par un X_i. Comme la famille des f_i est couvrante, il en est de même de la famille des $f_i \times_Z \mathrm{id}_Y$ qui s'en déduit par changement de base, donc en vertu de 1.10 (ii), 178
pour prouver que $\Delta_{Y/Z}$ est quasi-compacte, il suffit de prouver que les Γ_{f_i} le sont. Or $g f_i$ étant quasi-séparé par hypothèse, il en est de même de $\mathrm{pr}_2 : X_i \times_Z Y \to Y$ qui s'en déduit par changement de base, d'autre part $\mathrm{pr}_2 \Gamma_{f_i} = f_i$ est quasi-compact par hypothèse. Il en est donc de même de Γ_{f_i} en vertu de 1.8 (iv) appliqué au morphisme composé de pr_2 et de Γ_{f_i}, C.Q.F.D.

Corollaire 1.12. — *Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille finie d'objets de E, X la somme des X_i, $f_i : X_i \to Y$ des morphismes dans E, et $f : X \to Y$ le morphisme correspondant. Pour que f soit* *quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) il faut et il suffit que les f_i le soient ; dans le cas « quasi-séparé », l'hypothèse « I finie » peut-être omise.*

La suffisance de la condition est un cas particulier de 1.11, compte tenu que les morphismes canoniques $f_i : X_i \to X$ forment une famille couvrante finie, et que ce sont des morphismes quasi-compacts, comme il résulte aussitôt de la définition et de 1.4. La nécessité résulte de la transitivité 1.8 (i), compte tenu que les f_i sont même cohérents (car ils sont quasi-séparés en vertu de 1.8.1).

Définition 1.13. — *Soit X un objet d'un topos E. On dit que X est un* objet quasi-séparé du topos *E si pour tout objet S quasi-compact de E, tout morphisme de S dans X est quasi-compact, i.e. (1.7) si pour deux objets quasicompacts S, T de E et des morphismes $S \to X$, $T \to X$, le produit fibré $S \times_X T$ est toujours quasi-compact. On dit que X est un objet cohérent du topos E si X est quasi-compact et quasi-séparé.*

179 ***Proposition 1.14***. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans un topos E.*

(i) *Si Y est quasi-compact, alors f quasi-compact implique X quasi-compact. Si Y est quasi-séparé, alors X quasi-compact implique f quasi-compact. Si Y est cohérent, f quasi-compact équivaut à X quasi-compact.*

(ii) *Si Y est quasi-compact (*resp. *quasi-séparé,* resp. *cohérent) et si f est quasi-compact (*resp. *quasi-séparé,* resp. *cohérent) alors X est quasi-compact (*resp. *quasi-séparé,* resp. *cohérent).*

Les premières deux assertions de (i) sont contenues trivialement dans les définitions de morphisme quasi-compact (1.7) resp. d'objet quasi-séparé (1.13), la troisième résulte de la conjonction des deux premières. Le premier cas de (ii) n'est qu'une redite, le troisième résulte encore de la conjonction des deux premiers, reste à traiter le cas quasi-séparé. Soit donc S un objet quasi-compact de E et $g : S \to X$ un morphisme, prouvons que f est quasi-compact. Comme Y est quasi-séparé, fg est quasi-compact, et comme f est quasi-séparé, il en résulte (1.8 (iii)) que g est quasi-compact, C.Q.F.D.

Corollaire 1.15. — *Tout sous-objet d'un objet quasi-séparé de E est quasi-séparé. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de E, avec $I \in U$; alors $X = \amalg_i X_i$ est quasi-séparé (*resp. *cohérent) si et seulement si les X_i le sont.*

180 La première assertion résulte de 1.14 (ii) et de 1.8.1, mais est également triviale sur la définition. Pour la deuxième non respée, comme les $X_i \to X$ sont des monomorphismes, il reste à prouver le « il suffit », qui résulte facilement des définitions et de 1.3 ; le cas respé résulte du cas traité et de 1.4.

Corollaire 1.16. — *Sous les conditions de 1.10 (ii), si les Y_i sont cohérents, alors f est quasi-compact si et seulement si les $X_i = X \times_Y Y_i$ sont des objets quasi-compacts de E.*

En effet, en vertu du critère 1.10 (ii), il faut exprimer que les $f_i : X_i \to Y_i$ sont quasi-compacts, ce qui équivaut à X_i quasi-compacts en vertu de 1.14 (i).

Corollaire 1.17. — *Soient E un topos admettant une famille génératrice formée d'objets quasi-compacts, et $(g_i : Y_i \to Y)_{i \in I}$ une famille couvrante (resp. couvrante finie) dans E, avec les Y_i cohérents. Pour que Y soit quasi-séparé (resp. cohérent), il faut et il suffit que pour tout*

$i \in I$, g_i soit quasi-compact, ou encore que pour tout couple d'indices $i, j \in I$, $Y_i \times_Y Y_j$ soit un objet quasi-compact de E.

Le cas respé résulte aussitôt du cas non respé et de 1.3. La nécessité de la première condition est triviale par définition, prouvons qu'elle est suffisante. Soit donc $f : X \to Y$ un morphisme, avec X quasi-compact, prouvons que f est quasi-compact. Or comme les g_i 181
sont quasi-compacts, il s'ensuit que les $X_i = X \times_Y Y_i$ sont quasi-compacts, ce qui implique que f l'est en vertu de 1.16. Exprimant enfin la quasi-compacité des g_i à l'aide du même critère 1.16, on trouve le deuxième critère de 1.17. En particulier :

Corollaire 1.17.1. — *Soient E comme dans 1.17, X un objet cohérent de E, $\mathcal{R} \rightrightarrows X$ une relation d'équivalence dans X, $Y = X/\mathcal{R}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Y est cohérent,*
(ii) *$f : X \to Y$ est quasi-compact,*
(iii) *$\mathcal{R}$ est quasi-compact.*

Corollaire 1.18. — *Soient E un topos admettant une sous-catégorie génératrice C formée d'objets quasi-compacts, Y un objet de E. Pour que Y soit quasi-séparé, il faut et il suffit que tout morphisme $X \to Y$, avec $X \in \operatorname{ob} C$, soit quasi-compact.*

La nécessité est triviale par définition, les $Y \in \operatorname{ob} C$ étant quasi-compacts par hypothèse. Pour prouver la suffisance, soit Z un objet quasi-compact de E, prouvons que tout morphisme $Z' \to Y$ est quasi-compact. Pour ceci, il suffit en vertu de 1.10 (i) de vérifier que pour tout $X \to Y$, avec $X \in \operatorname{ob} C$, $Z \times_Y X$ est quasi-compact, ce qui résulte en effet du fait que les $X \to Y$ sont quasi-compacts par hypothèse, et que Z est quasi-compact.

Corollaire 1.19. — *Soient E un topos admettant une sous-catégorie génératrice formée d'objets quasi-compacts, $(g_i : Y_i \to Y)_{i \in I}$ une famille couvrante dans E, avec les Y_i quasi-séparés et les g_i quasi-compacts. Alors Y est quasi-séparé.* 182

En effet, soit X un objet quasi-compact de E, montrons que tout morphisme $f : X \to Y$ est quasi-compact. En vertu de 1.10(ii) il suffit de prouver que les morphismes induits $f_i : X_i = X \times_Y Y_i \to Y_i$ sont quasi-compacts. Or comme g_i est quasi-compact, X_i est quasi-compact (X l'étant), et comme Y_i est quasi-séparé, il s'ensuit bien que f_i est quasi-compact.

Remarque 1.20.1. — Le lecteur habitué à l'usage des termes « quasi-compact » et « quasi-séparé » en géométrie algébrique s'attendra à certaines autres relations entre les notions « absolues »(concernant les objets du topos E) et les notions « relatives » (concernant des flèches de E) envisagées, par exemple : si $f : X \to Y$ est un morphisme dans E tel que X soit quasi-compact-séparé, alors f est quasi-séparé. De telles propriétés ne sont valables que moyennant des conditions de finitude restrictive sur le topos E, plus fortes que celles envisagées dans 1.10, conditions que nous étudierons au numéro suivant.

1.20.2. — Il résulte encore de 1.5 que le fait que pour un objet X du topos E d'être quasi-séparé ne dépend que du topos induit $E_{/X}$, et signifie que l'objet final dudit topos est quasi-séparé, i.e. que dans $E_{/X}$, le produit de deux objets quasi-compacts est quasi-compact.

183
1.21. Cas des sites. — Soient C un $\mathscr{U}$-site, E le topos des $\mathscr{U}$-faisceaux sur C, f une flèche de C, X un objet de C. On dit que f est un *morphisme quasi-compact* (resp. quasi-séparé) *du site* C si $\epsilon(f)$ est un morphisme quasi-compact (resp. quasi-séparé) du topos E ; et de même que X est un *objet quasi-séparé du site* C si $\epsilon(X)$ est un objet quasi-séparé du topos E (comparer 1.2). Lorsque C est un $\mathscr{U}$-topos muni de sa topologie canonique, alors le foncteur canonique $\epsilon : C \to E$ est une équivalence de catégories, et par suite la définition précédente est compatible avec les définitions antérieures 1.7 et 1.13. Notons également que la définition envisagée ne change pas quand on remplace l'univers $\mathscr{U}$ par un autre univers $\mathscr{V}$ tel que C soit aussi un $\mathscr{V}$-site, du moins lorsque C admet une famille topologiquement génératrice formée d'objets quasi-compacts. Pour le voir, on est ramené aussitôt au cas où $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$, donc E est une $\mathscr{V}$-site, et à prouver que pour toute flèche f du $\mathscr{U}$-topos E, f est quasi-compacte (resp. quasi-séparé) si et seulement si elle définit une flèche quasi-compacts dans le topos E' des $\mathscr{V}$-faisceaux sur E, et de même que pour tout objet X de E, X est quasi-séparé si et seulement si l'objet correspondant de E' est quasi-séparé. Notons que nous connaissons déjà (sans hypothèse sur E) l'énoncé analogue pour le cas d'un objet quasi-compact (1.2). Le cas « f quasi-compact » s'en déduit, grâce au critère 1.10 (i) appliqué successivement
184 dans E et dans E', pour la même famille génératrice $(X_i)_{i \in I}$ de E formée d'objets quasi-compacts ; d'où également le cas « f quasi-séparé », qui signifie que le morphisme diagonal correspondant est quasi-compact. Enfin pour le cas « X quasi-séparé », on est encore ramené au cas « X quasi-compact », grâce au critère 1.18.

1.22. — ***Exemples.*** Reprenons l'exemple 1.6.2 de la catégorie (Sch) avec une topologie T_i, qui est un $\mathscr{V}$-site pour $\mathscr{V}$ convenable, admettant la sous-catégorie des schémas affines comme catégorie génératrice topologique formée d'objets quasi-compacts. On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'une flèche $f : X \to Y$ de ce site est quasi-compacte (resp. quasi-séparé) si et seulement si c'est un morphisme quasi-compact (resp. quasi-séparé) de schémas au sens habituel ([3] ou [4]) ; de même un objet du site est quasi-compact (resp. quasi-séparé) si et seulement si c'est un schéma quasi-compact (resp. quasi-séparé) au sens habituel de loc.cit. Il y a lieu de dire d'ailleurs, comme ici, *morphisme cohérent de schémas, schémas cohérent*, au lieu de « morphisme quasi-compact et quasi-séparé de schémas », « schéma quasi-compact et quasi-séparé », comme on le fait d'ailleurs dans EGA I 2$^{\text{ème}}$ édition.

1.22.1. — Pour un schéma donné $X \in \mathscr{U}$, on peut aussi regarder le topos $\mathrm{Top}(X)$ associé à l'espace topologique sous-jacent, ou le topos $\mathrm{Top}(X_{\mathrm{et}})$ (resp. $\mathrm{Top}(X_{\mathrm{fppf}})$), associé au site
185 des X-schémas étales (resp. localement de présentation finie) éléments de $\mathscr{U}$, avec la topologie étale (resp. fppf). C'est un $\mathscr{U}$-topos qui admet une famille génératrice formée d'objets cohérents, correspondants aux objets affines du site de définition ;

Ceci dit, l'objet final de ce topos est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) si et seulement si le schéma X est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent). De même, un morphisme du site des espaces étalés sur X (resp. du site X_{et} des schémas étales sur X, resp. du site X_{fppf} des schémas localement de présentation finie sur X) est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) si et seulement si c'est un morphisme de schémas qui est (au sens habituel de *loc. cit.*) quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent).

Théorème 1.23. — *Soient E un $\mathscr{U}$-topos, X un objet de E.*

(i) *Pour que X soit quasi-compact, il faut et il suffit que pour tout système inductif filtrant $(Y_i)_{i\in I}$ de E, avec $I \in \mathscr{U}$, l'application naturelle*

$$\varinjlim \operatorname{Hom}(X, Y_i) \longrightarrow \operatorname{Hom}(X, \varinjlim Y_i) \tag{1.23.1}$$

soit injective.

(ii) *Supposons que E admette une sous-catégorie génératrice C formée d'objets quasi-compacts. Pour que X soit cohérent, il faut que pour toute donnée comme dans* (i)*, l'application* (1.23.1) *soit bijective.*

(i) Nécessité. Supposons X quasi-compact, il faut prouver que si $i \in I$ et $f_i, g_i : X \rightrightarrows Y_i$ **186**
sont tels que les composés f, g de f_i, g_i avec $Y_i \to Y = \varinjlim Y_j$ sont égaux, alors il existe $j \geq i$ tel que les composés f_j, g_j avec $Y_i \to Y_j$ sont déjà égaux. Or comme dans E les limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives finies, et en particulier aux noyaux, on a

$$\operatorname{Ker}(f, g) = \varinjlim_{j\geq I} \operatorname{Ker}(f_j, g_j).$$

Par hypothèse $\operatorname{Ker}(f, g) = X$, donc X est la limite de la famille filtrante croissante de ses sous-objets $\operatorname{Ker}(f_j, g_j)$, donc comme X est quasi-compact, il est égal à un de ces sous-objets, donc il existe $j \geq i$ tel que $f_j = g_j$.

Suffisance. Pour prouver que X est quasi-compact, il revient au même (1.5.2) de prouver que pour toute famille filtrante croissante $(X_i)_{i\in I}$ de sous-objets de X dont la $\varinjlim$ est X, il existe $i \in I$ tel que $X_i = X$. Or comme dans E tout monomorphisme est effectif (II 4.0), il s'ensuit que

$$X_i = \operatorname{Ker}(f_i, g_i : X \rightrightarrows X \amalg_{X_i} X).$$

Soit $Y_i = X \amalg_{X_i} X$, et considérons le système inductif formé par les Y_i. Si Y en est la limite inductive, on a $Y \simeq X \amalg_{\varinjlim X_i} X = X \amalg_X X = X$. Par suite, pour un $i \in I$ fixé, f_i, g_i donnent le même élément de $\operatorname{Hom}(X, Y)$, donc par hypothèse il existe $j \geq i$ tel que $f_j = g_j$ i.e. $X_j = X$, C.Q.F.D.

(ii) Il reste à prouver que sous les conditions indiquées, tout morphisme $X \to Y$ provient **187**
d'un morphisme $X \to Y_i$ pour un $i \in I$ convenable. Comme C engendre E et que les Y_i couvrent Y, nous pouvons couvrir X par des objets X_α de C, de telle façon que chacun des composés $X_\alpha \to X \to Y$ se factorise par un des Y_i. Comme X est quasi-compact, on peut supposer la famille des X_α finie, donc que les morphismes $X_\alpha \to Y$ se factorisent par un Y_i fixe en des $g_{\alpha i} : X_\alpha \to Y_i$. Comme X est quasi-séparé, les $X_\alpha \times_X X_\beta$ sont quasi-compacts. D'ailleurs pour tout (α, β), les composés de pr_1 et pr_2 sur $X_\alpha \times_X X_\beta$ avec $X_\alpha, X_\beta \to Y_i$ sont

$$\begin{tikzcd}
X_\alpha \times_X X_\beta \arrow[dd] \arrow[dr] & & & \\
& X_\alpha \arrow[rr] \arrow[dl] & & Y_i \arrow[dl] \\
X \arrow[rr] & & Y &
\end{tikzcd}$$

tels que leurs composés avec $Y_i \to Y$ sont égaux. En vertu de(i), il existe donc un $j \geq i$ tel que les composés avec $Y_i \to Y_j$ soient déjà égaux. Comme l'ensemble des couples (α, β) est fini, on peut prendre j indépendant de ce couple. Par suite les morphismes $g_{\alpha j}$ proviennent par composition d'un morphisme $g_j : X \to Y_j$, dont le composé avec $Y_j \to Y$ est d'ailleurs le morphisme $X \to Y$ donné, puisqu'il en est ainsi après composition avec les $Y_j \to X$. Cela achève la démonstration.

Remarques 1.23.2. — L'hypothèse sur E dans (ii) peut être remplacée par une hypothèse supplémentaire *sur* X, savoir que X admet un système fondamental de familles couvrantes par des objets quasi-compacts.

188 ***Corollaire 1.24.*** — *Soient E un topos, et soit C une sous-catégorie strictement pleine de E formée d'objets cohérents. Utilisant le fait que dans E les $\mathcal{U}$-limites inductives sont représentables, on trouve* (I 8.6.1) *un foncteur canonique.*

$$\mathrm{Ind}(C) \longrightarrow E. \tag{1.24.1}$$

Ce foncteur est pleinement fidèle. Si E admet une sous-catégorie génératrice formée d'objets cohérents, et si C est stable par facteurs directs, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *Le foncteur* (1.24.1) *est essentiellement surjectif, i.e. c'est une équivalence de catégories.*
(ii) *C est une sous-catégorie génératrice de E, stable par limites inductives finies.*
(iii) *La catégorie C est égale à la sous-catégorie pleine E_{coh} de E formée de tous les objets cohérents de E, et la condition nécessaire* 1.23 (ii) *de cohérence pour un objet de E est aussi suffisante.*

Soit E_{PF} la sous-catégorie pleine de E définie dans I 8.7.6. En vertu de I 8.7.5 a), l'énoncé 1.23 (ii) équivaut à la deuxième inclusion de

$$C \subset E_{\mathrm{coh}} \subset E_{PF},$$

189 et l'inclusion composée $C \supset E_{PF}$ signifie que (1.24.1) est pleinement fidèle. Comme par hypothèse la sous-catégorie E_{coh} de E est génératrice, il en est a fortiori de même de E_{PF} ; d'autre part dans E les limites projectives finies sont représentables, de sorte que nous pouvons appliquer I 8.7.7. La condition (iii) de 1.24 s'écrit aussi $C = E_{\mathrm{coh}} = E_{PF}$ et équivaut à la condition $C = E_{PF}$, qui n'est autre que la condition (ii bis) de *loc. cit.* (compte tenu que par hypothèse, E_{coh} donc E_{PF} est une sous-catégorie génératrice de E). De même la condition (ii) de 1.24 n'est autre que la condition (iii bis) de *loc. cit.*. Donc l'équivalence des conditions (i), (ii bis) et (iii bis) dans *loc. cit.* donne l'équivalence des conditions (i), (ii) et (iii) de 1.24, C.Q.F.D.

La démonstration (ou plus précisément, l'invocation de I 8.7.7 (ii bis)) fournit également la partie a) du

Corollaire 1.24.2. — *Soit E un topos admettant une sous-famille génératrice formée d'objets cohérents, et soit E_{PF} la sous-catégorie strictement pleine des objets X de E tels que le foncteur covariant* $\mathrm{Hom}(X, -)$ *qu'il représente commute aux limites inductives filtrantes. Alors :*

a) *Le foncteur naturel*

$$\mathrm{Ind}(E_{PF}) \longrightarrow E$$

est une équivalence de catégories.

b) *Pour qu'un objet X de E appartienne à E_{PF}, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à un facteur direct (= image d'un projecteur (I, 10.6)) du conoyau d'une double flèche $X_1 \rightrightarrows$* 190
X_0, avec X_1 et X_0 cohérents.

c) *La sous-catégorie E_{PF} de E est stable par limites inductives finies, et est équivalente à une petite catégorie.*

Il reste à prouver b) et c). La première assertion de c) est triviale grâce à I 2.8, et implique le « il suffit » de b) grâce à 1.23 (ii). Pour le « il faut », on utilise 1.23 (i) qui montre que X est quasi-compact, d'où l'existence d'un épimorphisme $X_0 \to X$, avec X_0 cohérent, compte tenu du fait que E_{coh} engendre E et est stable par sommes finies. Soit $R = X_0 \times_X X_0$, de sorte que X s'identifie au conoyau de $R \rightrightarrows X_0$. En vertu de a), on a $R = \varinjlim R_i$, limite inductive filtrante des coker $(R_i \rightrightarrows X_0) = X_i$. D'après l'hypothèse $X \in \mathrm{Ob}\, E_{PF}$, pour i assez grand le morphisme $u_i : X_i' \to X$ admet une section $v : X \to X_i'$. Soit $w = vu_i : X_i' \to X_i'$, de sorte que $w^2 = w$ et $X \simeq \mathrm{Coker}(w, \mathrm{id}_{X_i'} : X_i' \rightrightarrows X_i')$. Comme R_i est à nouveau quasi-compact, on le couvre par $X_1 \to R_i$ avec X_i cohérent, d'où $X_i \simeq \mathrm{Coker}(X_1 \rightrightarrows X_0)$, ce qui prouve b).

Enfin, comme $E_{PF} \subset E_{\mathrm{qu.cpct}}$, la dernière assertion de c) résulte de 1.5.3.

Corollaire 1.25. — *Soit E un topos tel que la sous-catégorie pleine C de E formée des objets cohérents soit génératrice. Considérons le foncteur canonique*

$$\varphi : \mathrm{Ind}(c) \longrightarrow E.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes : 191

(i) *Le foncteur φ est essentiellement surjectif, i.e. tout objet de E est limite inductive filtrante d'objets cohérents.*

(i bis) *Le foncteur φ est une équivalence de catégories.*

(ii) *Toute limite inductive finie dans E d'objets cohérents est un objet cohérent.*

(ii bis) *Le conoyau dans E d'une double flèche d'objets cohérents est un objet cohérent.*

(iii) *La réciproque de* 1.23 (ii) *est valable.*

C'est un cas particulier de 1.24, compte tenu que C est stable par sommes finies (1.4), ce qui implique l'équivalence de (ii) et de (ii bis), et compte tenu du

Lemme 1.25.1. — *Soit E un topos. Tout facteur direct X' d'un objet cohérent X de E est cohérent.*

En effet, X' est quasi-compact comme quotient de X (1.3), et quasi-séparé comme sous-objet de X (1.15).

Corollaire 1.26. — *Soit E un topos satisfaisant aux conditions équivalentes* 1.25. *Alors, il en est de même de tout topos induit.*

Cela résulte aussitôt du critère (ii), compte tenu de 1.20.2 et du fait que l'existence d'une sous-catégorie génératrice de E formée d'objets cohérents implique manifestement la même propriété pour un topos induit.

Remarque 1.27. — Parmi les exemples importants de topos satisfaisant les conditions de 192
1.25, signalons les topos noethériens (2.14), et le topos zariskien ou étale (VII 1) d'un schéma X (cf. IX, note p.42). Mais même lorsque le topos E est *cohérent*(2.3) (i.e. la sous-catégorie

pleine C des objet cohérents est génératrice et stable par limites projectives finies), il n'est par toujours vrai que C soit *parfait* (2.9.1) i.e. satisfasse aux conditions équivalentes de 1.25 ; cf. 1.28 ci-dessous.

Exercice 1.28. — Soient E un topos, $p_1,\ p_2\ :\ X_1 \rightrightarrows X_0$ une double flèche dans E. Définir une suite croissante de sous-objets R_n ($n \geq 0$) de $X_0 \times X_0$ par la condition $R_0 = \mathrm{Sup}(\mathrm{Im}(p_1, p_2), \mathrm{Im}(p_2, p_1))$, et $R_n = \mathrm{pr}_{13}(\mathrm{pr}_{12}^{-1}(R_{n-1}), \mathrm{pr}_{23}^{-1}(R_{n-1}))$ pour tout $n \geq 1$, où $\mathrm{pr}_{ij}(1 \leq i < j \leq 3)$ désignent les projections qu'on devine du produit triple de X_0 vers le produit double.

a) Montrer qu'on obtient ainsi une suite croissante de sous-objets de $X_0 \times X_0$, que $R = \varinjlim R_n$ est un graphe d'équivalence (I 10.4) dans X_0, et que le morphisme canonique
$$X = \mathrm{Coker}(p_1, p_2) \longrightarrow X_0/R$$
est un isomorphisme.

b) En conclure que si X_0 est quasi-compact et $X = \mathrm{Coker}(p_1, p_2)$ est quasi-séparé (donc
193 cohérent), alors la suite des R_n est stationnaire. Inversement, si cette suite est stationnaire, et si on suppose X_0 cohérent et X_1 quasi-compact alors X est cohérent. (Pour ce dernier point, écrire $R_n \simeq (R_{n-1}, \mathrm{pr}_2) \times_{X_0} (R_{n-1}, \mathrm{pr}_1)$ et en conclure que R_n est quasi-compact sur X_0 pour tout n, puis utiliser 1.19.)

c) Construire un exemple de deux applications d'ensembles $p_1, p_2\ :\ X_1 \rightrightarrows X_0$, telles que la suite des (R_n) ne soit pas stationnaire.

d) Soit C une petite catégorie où les limites inductives finies et les limites projectives finies sont représentables, et où tout morphisme se factorise en un épimorphisme effectif suivi d'un monomorphisme. Répéter pour une double flèche (p_1, p_2) de C la construction des R_n. Munissant C de la topologie canonique, montrer que le foncteur canonique $\epsilon\ :\ C \to C^\sim$ est exact, et commute par suite à la formation des R_n.

e) Prendre pour C une petite sous-catégorie pleine de (Ens), stable à isomorphisme près par limites projectives finies et limites inductives finies, et contenant les ensembles X_0, X_1 de c). En conclure que le topos $C^\sim$ (qui est un topos *cohérent* (2.3), i.e. engendré par la sous-catégorie de ses objets cohérents, laquelle est stable par limites projectives finies) ne satisfait pas aux conditions équivalentes de 1.25.

f) Soient k un corps, C le site fppf des schémas localement de présentation finie sur k (SGA 3 IV 6.3). Montrer qu'il existe un schéma affine réduit X sur k qui admit un automorphisme f qui n'est pas d'ordre fini (prendre par exemple l'espace affine E^2 muni
194 de l'automorphisme $f(x) = x$, $f(y) = x + y$). Montrer que si $p_1,\ p_2\ :\ X_1 \rightrightarrows X_0$ est une double flèche dans C, telle que la double flèche correspondant dans (Ens)$p_1(\bar{k})\ :\ p_2(\bar{k})\ :\ X_1(\bar{k}) \rightrightarrows X_0(\bar{k})$ donne une suite (R_n) non stationnaire, alors il en est de même de la double flèche de $C^\sim$ définie par p_1, p_2, donc, si X_0 est de type fini sur k, alors le conoyau dans $C^\sim$ de (p_1, p_2) n'est pas cohérent. En conclure que le conoyau dans $C^\sim$ du couple (f, id_X) n'est pas cohérent, donc que le topos $C^\sim$ ne satisfait par aux conditions équivalentes de 1.25. En conclure plus généralement que si S est un schéma non vide, C le site fppf des schémas localement de présentation finie sur S, alors le topos $C^\sim$ ne satisfait pas aux conditions de 1.25. (On fera attention que, contrairement à l'apparence, $C^\sim$ n'est donc noethérien (2.11) que si S est vide, comme il résulte de ce qui précède et de 2.14.

Définition 1.30. — *Soit E un topos. Un objet X de E est dit un* objet prénoethérien[ii] *du topos E s'il satisfait aux deux conditions équivalentes suivantes :*

(i) *Tout sous-objet de X est quasi-compact.*
(ii) *Toute suite croissante de sous-objets de X est stationnaire.*

1.30.1. — L'équivalence des conditions (i) et (ii) est claire. On notera que ces conditions ne dépendent encore que du topos induit $E_{/X}$, et même seulement de l'ensemble ordonné des ouverts de $E_{/X}$, isomorphe à l'ensemble ordonné des sous-objets de X. Elles sont stables par passage à un sous-objet de X.

1.31. — On prouve comme pour 1.3 et 1.4 les faits suivantes : si $(X_i \to X)$ est une famille couvrante finie, avec les X_i prénoethériens, alors X est prénoethérien ; en particulier un quotient d'un objet prénoethérien de E est prénoethérien. Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille d'objets de E, alors leur somme X est un objet prénoethérien de E si et seulement si tous les X_i sauf un nombre fini sont isomorphes à $\varnothing_E$, et tous les X_i sont prénoethériens. **195**

1.32. — Évidemment un objet prénoethérien d'un topos E est quasi-compact ; lorsque E admet une famille génératrice formée d'objets prénoethériens, la réciproque est vraie (comme il résulte aussitôt de 1.31) : les objets prénoethériens de E sont alors ses objets quasi-compacts.

Supposons que E admette une famille génératrice $(X_i)_{i \in I}$ formée d'objets quasi-compacts, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Les X_i sont prénoethériens.
(ii) Tout objet quasi-compact de E est prénoethérien.
(iii) Tout monomorphisme dans E est quasi-compact.

(On vient de voir l'équivalence de (i) et (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii) est trivial à partir des définitions, et (iii) $\Rightarrow$ (ii) sur la définition 1.30 (i).)

On notera que (iii) a comme conséquence que *tout morphisme de E est quasi-séparé* ; donc (1.14 (ii)) tout objet X de E au-dessus d'un objet quasi-séparé X de E est lui-même quasi-séparé. **196**

Exemple 1.33. — (*Topos classifiant d'un groupe*). Soient G un groupe $\in \mathscr{U}$, B_G son topos classifiant (IV 2.4) i.e. la catégorie des ensemble $\in \mathscr{U}$ où G opère à gauche. Les objets connexes-non vides de B_G (IV 4.3.5) sont les ensembles à opérateurs qui sont non vides et sur lesquels G opère transitivement, et tout objet E de B_G est somme de ses composantes connexes, qui sont les sous-objets non vides minimaux de E (savoir les orbites de G dans E). Par suite E est un objet quasi-compact de B_G si et seulement si l'ensemble $\pi_0(E)$ des orbites de G dans E est fini, et alors E est même un objet prénoethérien de B_G. Ces objets (et même le seul objet G_s, qui est connexe non-vide) forment une sous-catégorie génératrice de B_G. Pour que l'objet final e de B_G soit quasi-séparé, i.e. pour que le produit de deux objets quasi-compacts de B_G soit quasi-compact, il faut et il suffit que le produit $G_s \times G_s$ soit quasi-compact, ce qui équivaut manifestement au fait que G est fini. On en conclut, plus généralement, qu'un objet E de B_G est quasi-séparé si et seulement si les stabilisateurs de ses points sont des sous-groupes *finis* de G ; i.e. s'il est isomorphe à une somme

ii. Par la notion plus forte d'objet *noethérien*, cf. 2.11 ci-dessous.

d'espaces homogènes G/H, avec H *fini*.) En effet, en vertu de 1.15 on peut supposer dans
197 ce critère E connexe, mais si $x \in E$ a comme groupe de stabilité G_x, on sait (IV 5.8) que B_G/E est équivalent au topos B_{G_x}, donc son objet final est quasi-séparé si et seulement si G_x est fini. On conclut de ce critère que tout objet de B_G qui se trouve au-dessus d'un objet quasi-séparé est quasi-séparé, a fortiori, le produit de deux objets quasi-séparés de B_G est quasi-séparé. On conclut aussi que les objets cohérents de B_G sont les objets isomorphes à des sommes finies d'espaces homogènes G/H, avec H *fini*. Comme G_s est cohérent, on voit que les objets cohérents de B_G forment déjà une sous-catégorie génératrice de B_G. De plus, cette sous-catégorie est stable par produits fibrés (comme il résulte de fait que tout objet au-dessus d'un objet quasi-séparé est quasi-séparé). (Dans la terminologie 2.11 plus bas B_G est un topos *localement noethérien*, mais il n'est quasi-séparé que si G est fini, et alors B_G est même noethérien.)

On voit tout de suite qu'un morphisme $f : E' \to E$ est quasi-compact si et seulement si l'application induit $\pi_0(f) : \pi_0(E') \to \pi_0(E)$ pour les ensembles d'orbites est propre i.e. à fibres finies ; on retrouve qu'un monomorphisme est quasi-compact (1.32), donc tout morphisme est quasi-séparé. Par suite les morphismes cohérents dans B_G sont simplement les morphismes quasi-compacts, qu'on vient de caractériser.

Soit E un objet du topos B_G. On vérifie facilement que E est une limite inductive filtrante d'objets cohérents de B_G si et seulement si les stabilisateurs des points de E sont des
198 groupes ind-finis (i.e. limites inductives filtrantes de leurs sous-groupes finis). En particulier, si G n'est pas ind-fini (par exemple si $G = \mathbf{Z}$), l'objet final du topos B_G n'est pas limite inductive d'objets cohérents ; plus précisément, pour que le topos B_G satisfasse aux conditions équivalentes de 1.25, il faut et il suffit que son objet final soit limite inductive filtrante d'objets cohérents, ou encore que le groupe G soit ind-fini.

2. Conditions de finitude pour un topos

Proposition 2.1. — *Soit E un $\mathscr{U}$-topos. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) *Il existe une sous-catégorie pleine génératrice C de E, formée d'objets quasi-compacts, et stable par produits fibrés.*
(ii) *Il existe un $\mathscr{U}$-site C, tel que tout objet de C soit quasi-compact, que dans C les produits fibrés soient représentables, et que E soit équivalent à la catégorie des faisceaux $C^{\sim}$.*

Supposons que ces conditions sont satisfaites. Alors on peut même choisir dans (i) (resp. (ii)) *la catégorie C $\mathscr{U}$-petite. D'autre part, pour tout $X \in \operatorname{ob} C$, l'objet X* (resp. $\epsilon(X)$) *du topos E est* cohérent.

L'implication (i) ⇒ (ii) résulte de IV 1.2.1., et le fait que dans (i) (resp. (ii)) on peut prendre C $\mathscr{U}$-petite se voit aussitôt par l'argument de IV 1.2.3 appliqué à une petite sous-catégorie pleine génératrice au sens topologique (II 3.0.1) de C. Il reste à prouver (ii) ⇒ (i) et la dernière assertion de 2.1, ce qui résulte aussitôt du

199 ***Corollaire 2.1.1.*** — *Soit C un $\mathscr{U}$-site où les produits fibrés soient représentables et dont tout objet soit quasi-compact, et soient $E : C^{\sim}$, $\varepsilon : C \to E$ le foncteur canonique. Alors pour tout $X \in \operatorname{ob} C$, $\varepsilon(X)$ est un objet cohérent de E. La sous-catégorie pleine de E formée des objets*

cohérents de E qui se trouvent au-dessus de quelque $\varepsilon(X)$ est stable par produits fibrés (et est évidemment génératrice dans E).

On sait déjà que $\epsilon(X)$ est quasi-compact (1.2), prouvons qu'il est quasi-séparé. Soient donc F, G deux objets quasi-compacts de E et $F \to \varepsilon(X)$, $G \to \epsilon(X)$ deux morphismes, prouvons que le produit fibré $F \times_{\epsilon(X)} G$ est quasi-compact. Recouvrant F et G par un nombre fini d'objets de la forme $\epsilon(Y_i)$ resp. $\epsilon(Z_j)$, et procédant comme dans 1.2 pour nous ramener au cas où les composés $\epsilon(Y_i) \to \epsilon(X)$, $\epsilon(Z_j) \to \epsilon(X)$ proviennent de morphismes $Y_i \to X$ resp. $Z_j \to Y$, on est ramené grâce à 1.3 au cas où les morphismes $F \to \epsilon(X)$ et $G \to \epsilon(X)$ sont les transformés par ϵ de morphismes $Y \to X$, $Z \to X$. Mais comme les produits fibrés sont représentables dans C et que ϵ y commute, on est réduit à prouver que $\epsilon(Y \times_X Z)$ est quasi-compact, ce qui a été déjà noté plus haut pour tout objet de la forme $\epsilon(U)$.

Soient maintenant $G \to F$, $H \to F$ des morphismes d'objets cohérents de E, tels qu'il existe un morphisme $F \to \epsilon(X)$, pour quelque $X \in \operatorname{ob} C$, prouvons que $G \times_F H$ est cohérent. Comme G et H sont quasi-compacts et F quasi-séparé, il résulte déjà des définitions que le produit fibré est quasi-compact. Reste à voir qu'il est quasi-séparé, ou ce qui revient au même **200**
(1.15) que $G \times_{\epsilon(X)} H$ est quasi-séparé. Cela résulte du fait plus général :

Corollaire 2.1.2. — *Sous les conditions de 2.1.1, pour tout objet quasi-séparé G de E, tout morphisme $G \to \epsilon(X)$ est quasi-séparé. Si $H \to \epsilon(X)$ est un deuxième morphisme, avec H quasi-séparé, alors $G \times_{\epsilon(X)} H$ est quasi-séparé.*

La première assertion implique la deuxième, car elle implique par changement de base que $G \times_{\epsilon(X)} H$ est quasi-séparé, donc, puisque H est quasi-séparé, $G \times_{\epsilon(X)} H$ l'est aussi (1.14 (ii)). Pour prouver que $G \to \epsilon(X)$ est quasi-séparé, nous allons utiliser le

Lemme 2.1.3. — *Soient E un topos, $f : X \to Y$ un morphisme dans E. Supposons que E admette une famille génératrice d'objets quasi-compacts, et qu'il existe une famille couvrante $(g_i : X_i \to X)_{i \in I}$ de X telle que les X_i soient quasi-compacts, et que pour tout couple d'indices $i, j \in I$, $X_i \times_Y X_j$ soit quasi-séparé. Alors, si X est un objet quasi-séparé de E, f est un morphisme quasi-séparé.*

En effet, la famille $(g_i \times_Y g_j : X_i \times_Y X_j \to X \times_Y X)_{(i,j) \in I \times I}$ est couvrante, donc pour voir que le morphisme $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ est quasi-compact, il suffit de voir que pour tout $(i, j) \in I \times I$, le morphisme qui s'en déduit par changement de base $g_i \times_Y g_j$ l'est (1.10 (ii)). **201**
Or ce dernier n'est autre que le morphisme canonique $X_i \times_X X_j \to X_i \times_Y X_j$; comme par hypothèse X est quasi-séparé et les X_i sont quasi-compacts, $X_i \times_X X_j$ est quasi-compact, donc comme $X_i \times_Y X_j$ est quasi-séparé par hypothèse, le morphisme $X_i \times_X X_j \to X_i \times_Y X_j$ est bien quasi-compact, C.Q.F.D.

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration de 2.1.2, en prouvant que tout morphisme $f : G \to \epsilon(X)$, avec G avec G quasi-séparé, est quasi-séparé. Pour ceci, couvrons G par des objets $\epsilon(X_i)$, tels que les morphismes composés $\epsilon(X_i) \to \epsilon(X)$ proviennent de morphismes $X_i \to X$. En vertu de 2.1.3, comme les $\epsilon(X_i)$ sont quasi-compacts, il suffit de vérifier que les produits fibrés $\epsilon(X_i) \times_{\epsilon(X)} \epsilon(X_j) = \epsilon(X_i \times_X X_j)$ sont quasi-séparés. Or on a déjà vu que tout objet de E de la forme $\epsilon(U)$ est cohérent. Cela prouve 2.1.2 et achève la démonstration de 2.1.

Proposition 2.2. — *Soit E un topos contenant une sous-catégorie pleine génératrice C formée d'objets cohérents. Les conditions suivantes sur E sont équivalentes :*

(i) *Tout objet quasi-séparé de E est quasi-séparé sur l'objet final.*

(i bis) *Pour tout morphisme $f : X \to Y$ dans E, X quasi-séparé implique f quasi-sépare.*

(i ter) *Tout objet X de C est quasi-séparé sur l'objet final de E, i.e. le morphisme diagonal $X \to X \times X$ est quasi-compact.*

202 (ii) *Le produit de deux objets quasi-séparés de E est quasi-séparé.*

(ii bis) *Le produit dans E de deux objets de C est quasi-séparé.*

Ces conditions impliquent que la sous-catégorie pleine E_{coh} de E formée des objets cohérents de E est stable par produits fibrés (et à fortiori, que E satisfait aux conditions équivalentes de 2.1).

Évidemment (i bis) ⇒ (i), et l'implication inverse résulte de 1.8 (iii). On a (i) ⇒ (ii) par un argument déjà fait : si X et Y sont quasi-séparés, comme par l'hypothèse (i) X est quasi-séparé sur e, $X \times Y$ est quasi-séparé sur Y par changement de base, donc X est quasi-séparé en vertu de 1.14 (ii). Le même argument montre que (i ter) ⇒ (ii bis), et d'autre part (i) ⇒ (i ter) et (ii) ⇒ (ii bis) sont triviaux, de sorte qu'il reste à établir (ii bis) ⇒ (i). Mais si X est un objet quasi-séparé de E, recouvrant X par des objet X_i de C (ce qui est possible, C étant génératrice), comme les X_i sont quasi-compacts par hypothèse sur C, on peut appliquer 2.1.3 au morphisme $X \to e$, de sorte que pour prouver que ce dernier est quasi-séparé, on est ramené précisément à voir que les $X_i \times X_j$ sont quasi-séparés, ce qui est l'hypothèse (ii bis).

Remarque 2.2.1. — La condition (i ter) équivaut aussi à la condition (i quater). Pour toute double flèche $g_1, g_2 : Y \rightrightarrows X$ dans C, le noyau dans E est quasi-compact (ou encore (1.15) cohérent).

203 Pour le voir, il suffit d'appliquer le critère 1.10 (i) au morphisme diagonal $X \to X \times X$ envisagé dans (i ter).

Définition 2.3. — *Un topos E satisfaisant les conditions équivalentes de* 2.2 (resp. de 2.1) *est appelé un* topos algébrique (resp. *un* topos localement algébrique, *ou* localement cohérent). *Un objet X d'un topos E est appelé* objet algébrique du topos E *si le topos induite $E_{/X}$ est algébrique. Un topos E est dit* quasi-séparé (resp. cohérent) *s'il est algébrique et si son objet final est quasi-séparé (resp. cohérent).*

2.3.1. — C'est dans les topos algébriques que les notions de finitude développées au n° 1 ont des propriétés pleinement satisfaisantes, analogues aux propriétés des notions de même nom dans la catégorie des schémas. Tous les topos localement algébriques (= localement cohérents) rencontrés en pratique sont en fait algébriques, donc l'intérêt pratique de cette notion semble pour l'instant assez réduit. On peut cependant construire des topos localement algébriques et non algébriques (2.17 f).

2.4. — Voici quelques remarques générales concernant les notions introduites dans 2.3, qui convaincront le lecteur (du moins on l'espère) que la terminologie introduite est cohérente.

2.4.1. — Sous les conditions de 2.1 (i) resp. (ii), pour tout $X \in C$, X (resp. $\epsilon(X)$) est un
204 objet (cohérent) algébrique de E (2.1.2 et 1.19.2), en d'autres termes le topos induit $E_{/X}$ (resp. $E_{\epsilon(X)} \cong (C_{/X})^{\sim}$) est algébrique, donc *cohérent*. Il revient au même de dire que *lorsque C admet un objet final, alors E lui-même est algébrique, donc cohérent.*

2.4.2. — Si E est un topos algébrique, alors tout topos induit $E_{/X}$ est également algébrique (2.2 (i bis)) ; pour qu'un topos E soit localement algébrique = localement cohérent, il faut et il suffit qu'il existe une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de X, couvrant l'objet final, telle que les X_i soient algébriques (resp. cohérents) i.e. telle que les topos induits $E_{/X_i}$ soient algébriques (resp. cohérents). -La suffisance résulte aussitôt des définitions, la nécessité des observations 2.4.1. Bien entendu, un topos algébrique est localement algébrique, et si E est un topos localement algébrique, tout topos induit $E_{/X}$ est localement algébrique.

2.4.3. — Si X est un objet algébrique d'un topos E, alors tout objet X' de E qui se trouve au-dessus de X est encore algébrique (cf. 2.4.2). En particulier, tout objet d'un topos algébrique est algébrique, et inversement bien sûr.

2.4.4. — La sous-catégorie pleine de E formée des objets *quasi-séparés* qui sont *algébriques* est stable par produits fibrés et par sous-objets (1.15), donc aussi par noyaux. Si E est algébrique, cette catégorie (qui n'est alors autre que la catégorie des objets quasi-séparés de E sans plus) est également stable par produit de deux objets. Si E est quasi-séparé (et alors 205
seulement) cette catégorie est stable par limites projectives finis quelconques, ou encore contient l'objet final de E.

La sous-catégorie pleine C de E formée des objets *cohérents* qui sont *algébriques* est stable par produits fibrés. Si E est localement algébrique i.e. localement cohérent, dire que E est algébrique revient à dire que C est également stable par noyaux de doubles flèches (2.2.1) ; et dire que E est quasi-séparé revient à dire que de plus C est stable par produit de deux objets (cf. 1.17). Enfin dire que E est cohérent revient à dire que C est stables par limites projectives finies quelconques, ou encore qu'il contient l'objet final de E.

2.4.5. — Soit E un topos. Pour que E soit localement cohérent (resp. algébrique, resp. quasi-séparé, resp. cohérent) il faut et il suffit qu'il admette une sous-catégorie pleine génératrice C formée d'objets quasi-compacts (qui seront automatiquement cohérents (2.1)), et qui soit *stable* par produits fibrés (resp. par produits fibrés et par noyaux, resp. par produits fibrés et par produits de deux objets, resp. par limites projectives finies quelconques) ; ou encore que E soit équivalent à un topos $C^{\sim}$, où C est un $\mathcal{U}$-site dont tout objet est quasi-compact, et où les produits fibrés et les produits de deux objets (resp. toutes les limites projectives finies) sont représentables. (Pour la nécessité, on prend pour C la catégorie des objets de E 206
qui sont cohérents et *algébriques*, et on applique 2.4 ; pour la suffisance, on applique 2.2 (i ter)). Dans cet énoncé, on peut évidemment supposer encore C $\mathcal{U}$-petit.

2.4.6. — Soit E un topos, Si E est algébrique, un objet X de E est quasi-séparé (resp. cohérent) si et seulement si le topos induit $E_{/X}$ l'est. Lorsque E n'est plus supposé algébrique, on peut dire seulement que $E_{/X}$ est quasi-séparé (resp. cohérent) si et seulement si X est quasi-séparé (resp. cohérent) et *algébrique*. Ce n'est pas grave, vu qu'on n'aura sans doute pas à utiliser ces notions en dehors du cas E algébrique.

2.4.7. — Pour que la notion d'objet cohérent (resp. quasi-séparé d'un topos E ait des propriétés satisfaisantes, il faut se borner aux objets qui sont de plus algébriques, condition automatiquement satisfaite si E est algébrique. Comme nous n'aurons sans doute jamais à travailler avec des E localement algébriques qui ne soient algébriques, la question de réviser la terminologie introduite dans 1.13, en la réservant éventuellement aux seuls objets algébriques, ne se pose donc pas en termes bien aigus !

D'autre part, nous sommes abstenus de définir la notion de topos quasi-compact. Dans l'esprit du présent numéro, il s'imposerait d'appeler ainsi les topos *algébriques* sont l'objet final est quasi-compact.

207 Nous avons hésité à introduire un tel usage, car si X est un espace topologique, il ne serait pas vrai que X est quasi-compact si et seulement si le topos associé $\mathrm{Top}(X)$ l'est. On notera à ce propos que $\mathrm{Top}(X)$ est localement cohérent si et seulement si X admet une base d'ouverts formée d'ouverts quasi-compacts U tels que pour $U_j, U_k \subset U_i$, $U_j \cap U_k$ soit encore quasi-compact (et alors $\mathrm{Top}(X)$ est même algébrique). Cette conditions est vérifiée pour les espaces topologiques sous-jacents aux schémas, mais rarement pour les espaces rencontrés par les analystes, fussent-ils (les espaces) compacts. Explicitons encore, pour la commodité des références :

Proposition 2.5. — *Soit E un topos algébrique, $f : X \to Y$ un morphisme dans E. Si Y est un objet quasi-séparé (resp. cohérent) de E, alors, pour que X soit un objet quasi-séparé (resp. cohérent) de E, il faut et il suffit que le morphisme f soit quasi-séparé (resp. cohérent).*

La suffisance a déjà été vue dans 1.14(ii), et est vraie sans hypothèse sur E. La nécessité dans la cas non respé est vraie sans supposer même Y quasi-séparé, et n'est autre que la définition 2.3 via 2.2 i bis). Il reste à prouver que si Y est cohérent et X cohérent, alors f est cohérent. Comme on sait déjà que f est quasi-séparé, il suffit de voir que f est quasi-compact, ce qui résulte du fait que X est quasi-compact et Y quasi-séparé (1.13).

208 ***Corollaire 2.6.*** — *Soient E un topos algébrique, $f : X \to Y$ un morphisme dans E, $(Y_i \to Y)_{i \in I}$ une famille couvrante, avec les Y_i quasi-séparés (resp. cohérents). Pour que f soit quasi-sépare (resp. quasi-compact, resp. cohérent) il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, $X_i = X \times_Y Y_i$ soit un objet quasi-séparé (resp. quasi-compact, resp. cohérent) de E.*

Il suffit de conjuguer 1.10 (ii) et 2.5 dans le cas « quasi séparé » ou « cohérent » ; le cas « quasi-compact » a déjà été vu dans 1.16. On notera que la nécessité de la condition énoncée dans 2.6 est également valable sans hypothèse sur le topos E.

On trouve comme cas particulier de 2.6 :

Corollaire 2.7. — *Soient E un topos cohérent, X un objet de E. Pour que X soit un objet quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) de E, il faut et il suffit qu'il soit quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) au-dessus de l'objet final (1.9.2).*

En particulier, X est constructible (1.9.2) si et seulement s'il est cohérent.

Corollaire 2.8. — *Soient E un topos localement cohérent, $f : X \to Y$ un morphisme dans E. Pour que f soit quasi-séparé, il faut et il suffit que pour tout objet quasi-séparé Y' de $E_{/Y}$, $f^*(Y') = X \times_Y Y'$ soit un objet quasi-séparé de $E_{/X}$ (ou de E, cela revient au même (1.20.2)).*

209 Le « il faut » est valable sans condition sur E, car si Y' est quasi-séparé, comme $f' : X' = X \times_Y Y' \to Y'$ est quasi-séparé par changement de base, X' est quasi-séparé (1.14 (ii)). Pour la réciproque, notons qu'il existe une famille couvrante $Y_i \to Y$ de Y par des objets quasi-séparés et algébriques. En vertu de 1.10 (ii), pour vérifier que f est quasi-séparé, il suffit de vérifier que les $f_i : X_i = X \times_Y X_i \to Y_i$ le sont. Or l'hypothèse sur f^* implique que les X_i sont quasi-séparés, donc les f_i le sont puisque $E_{/Y_i}$ est un topos algébrique.

Remarque 2.8.1. — Les énoncés 2.5 et 2.6 restent valables si on y remplace l'hypothèse « E algébrique » par l'hypothèse plus générale « Y est algébrique », comme on voit trivialement en appliquant l'énoncé primitif au topos induit $E_{/Y}$, qui est algébrique. De même, dans 2.8 il suffit de supposer que $E_{/Y}$ (au lieu de E) soit localement cohérent.

Proposition 2.9. — *Soient E un topos, C une sous-catégorie de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est localement cohérent (resp. cohérent), satisfait aux conditions équivalentes de 1.25, et C est la sous-catégorie pleine E_{coh} de E formée des objets cohérents.*
(ii) *C est une sous-catégorie strictement pleine génératrice de E, stable par limites inductives finies et par produits fibrés (resp. et par limites projectives finies), et est formée d'objets quasi-compacts.*

L'implication (i) ⇒ (ii) résulte trivialement des définitions et de la forme 1.25 (ii) des 210
conditions envisagées dans 1.25 ; prouvons l'implication inverse. Le fait que C soit une sous-catégorie pleine génératrice, formée d'objet quasi-compacts, et stable par produits fibrés (resp. par limites projectives finies) implique, par définition, que E est localement cohérent (resp. cohérent). Le fait que de plus C soit strictement pleine et stable par limites inductives finies implique alors que $C = E_{\mathrm{coh}}$ (en vertu de 1.24 (ii) ⇒ (iii)), et que la condition 1.25 (ii) est satisfaite, C.Q.F.D.

Définition 2.9.1. — *Un $\mathscr{U}$-topos E est dit parfait s'il est cohérent (2.3) et s'il satisfait aux conditions équivalentes de 1.25. i.e. si la sous-catégorie E_{coh} de E formée des objets cohérents de E est stable par limites inductives finies. On dit que E est localement parfait s'il existe une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de E couvrant l'objet final, telle que pour tout $i \in I$, le topos induit $E_{/X_i}$ soit parfait.*

2.9.2. — Il résulte aussitôt de cette définition qu'un topos parfait (resp. localement parfait) est cohérent (resp. localement cohérent). Comme exemples de topos parfaits (resp. localement parfaits), signalons les topos noethériens (resp. localement noethériens) introduits dans 2.11 ci-dessous (cf. 2.14), le topos zariskien et le topos étale d'un schéma cohérent (resp. d'un schéma quelconque) (IX, note page 42). Comme contre-exemple, 211
signalons le topos fppf d'un schéma S, qui est localement cohérent (et même cohérent si S est un schéma cohérent, i.e. quasi-compact et quasi-séparé) (VII 5.6), mais qui n'est pas localement parfait si $S \neq \varnothing$ (1.28 f)).

Dans un topos localement parfait, la notion d'objet constructible est particulièrement stable (2.9.3 ci-dessous), ce qui est une raison pourquoi la notion semble intéressante. Une autre raison est dans le fait que comme celle de topos cohérent ou localement cohérent, la notion de topos parfait ou localement parfait est stable par rapport à la formation du sous-topos fermé complémentaire d'un ouvert (4.6), et qu'elle se comporte de façon particulièrement simple pour l'opération de recollement de topos (4.11, 4.14).

Proposition 2.9.3. — *Soit E un topos localement parfait (2.9.1). Alors la sous-catégorie pleine E_{cons} de E formée des objets constructibles de E (1.9.3) est stable par limites inductives finies (et aussi par limites projectives finies bien sûr, en vertu de (1.9.3)).*

Comme la propriété pour un objet de E d'être constructible est locale sur E (1.10 (ii)), on est ramené au cas où E est un topos parfait. Mais alors $E_{\mathrm{cons}} = E_{\mathrm{coh}}$ (2.7), et la conclusion résulte de la définition 2.9.1.

212 ***Corollaire 2.9.4***. — *Soit E un topos localement parfait. Alors E est parfait si et seulement si E est cohérent. Pour tout objet X de E, le topos induit $E_{/X}$ est localement parfait.*

Problème 2.9.5. — Il est concevable que les topos parfaits soient assez particuliers pour se prêter à une *théorie de structure* aussi explicite (suivant un modèle proposé par M.Artin à l'époque du séminaire oral). Appelons *topos fini* un topos équivalent à un topos de la forme $\widehat{C}$, où C est une catégorie finie (cf. exercice 3.11), et *topos profini* un topos qui est une limite projective filtrante de topos finis (au sans de 6. plus bas, qui s'applique grâce à 3.12 c)). Comme un topos fini est noethérien (2.17 g)) donc parfait, et qu'une limite projective filtrante de topos parfaits est parfait (6.), on voit qu'un topos profini est parfait. La question qui se pose serait de savoir si réciproquement tout topos parfait est profini. Cela équivaut à la question si toute sous-catégorie finie de E_{coh} est contenue dans une sous-catégorie pleine F_0 de E_{coh} qui est équivalente à une catégorie F_{coh}, où F est un topos fini (cf. 3.11). (Si la réponse était négative, il y aurait lieu de trouver des conditions intrinsèques supplémentaires maniables pour un topos parfait qui assurent qu'il est profini.) Il resterait enfin à étudier la structure des topos profinis en termes d'une notion convenable de « catégorie profinie
213 karoubienne », inspirée de IV 7.6 h). Cette étude n'a pas été faite encore même dans le cas particulier où E est le topos zariskien, ou étale, d'un brave schéma cohérent X, et devrait donner alors des invariants plus fins que l'espace compact X_{cons} (EGA IV 1.) associé à X.

Dans le même ordre d'idées, signalons la questions suivante : Soit E un topos parfait, E' le topos induit sur un ouvert de E, et E'' le sous-topos fermé correspondant (IV 9.9). Si E' et E'' sont des topos finis, en est-il de même de E ?

Proposition 2.10. — *Soit E un topos. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E admet une sous-catégorie pleine génératrice stable par produits fibrés, formée d'objets prénoethériens de E.*

(ii) *E admet une sous-catégorie pleine génératrice formée d'objets prénoethériens quasi-séparés (i.e. prénoethériens cohérents).*

(iii) *E est localement cohérent (2.3) et tout objet quasi-compact de E est prénoethérien.*

(iii bis) *E est localement cohérent et admet une famille génératrice formée d'objets prénoethériens de E.*

L'équivalence de (iii) et (iii bis) résulte de 1.32, et il est trivial que (i) ⇒ (iii bis) et (iii) ⇒
214 (i), donc (i) équivaut à (iii) et (iii bis). Enfin (i) ⇒ (ii) résulte de la dernière assertion de 2.1, et il reste à prouver (ii) ⇒ (i). Cette implication résulte du fait que la sous-catégorie pleine de E formée des objets noethériens quasi-séparés, si elle est génératrice, est stable par produits

fibrés, car un tel produit fibré est quasi-compact en vertu des définitions, donc noethérien par la première assertion de 1.32 ; et il est quasi-séparé par la dernière assertion de 1.32.

Définition 2.11. — *Un topos E est dit topos localement noethérien s'il satisfait aux conditions équivalentes de 2.10, noethérien si de plus son objet final est cohérent (ou ce qui revient au même (1.32)) prénoethérien et quasi-séparé). Un objet X d'un topos E est dit objet noethérien de E si le topos induit $E_{/X}$ est un topos noethérien.*

2.12. — Si E est un topos localement noethérien, alors il en est de même de tout topos induit $E_{/X}$; inversement, si on peut trouver une famille (X_i) couvrant l'objet final telle que les E_{X_i} soient localement noethériens, il en est de même de E. Si C est une sous-catégorie pleine génératrice de E formée d'objets prénoethériens et stable par produits fibrés (2.11 (i)), alors pour tout $X \in C$, $E_{/X}$ est un topos noethérien, i.e. les objets de C sont même *noethériens*, (car si E est localement noethérien et $X \in \mathrm{Ob}\, E$, alors $E_{/X}$ est noethérien si et seulement si X est cohérent). Il s'ensuit qu'un topos E est localement noethérien si et seulement si on peut recouvrir l'objet final de E par des objets noethériens X_i.

2.13. — Dans un topos localement noethérien E, tout monomorphisme est quasi-compact, 215
et tout morphisme est quasi-séparé (1.32). A fortiori, E est un topos *algébrique* (2.3) et non seulement localement cohérent i.e. localement algébrique. Donc un topos E est noethérien si et seulement si il est localement noethérien et *cohérent* (2.3). En d'autres termes, si E est un topos localement noethérien, alors les objets noethériens de E ne sont autres que les objets *cohérents* de E.

2.14. — Soit E un topos localement noethérien, Si E est quasi-séparé, i.e. si son objet final est quasi-séparé, alors *tout* objet de E est quasi-séparé (1.32), donc les objets prénoethériens de E sont identiques aux objets noethériens (i.e. cohérents) de E. Comme un objet quotient d'un objet prénoethérien est prénoethérien, il s'ensuit que E satisfait aux conditions équivalentes de 1.25 (puisqu'il satisfait la condition 1.25 (ii bis)). En particulier, si C est la sous-catégorie pleine de E formée des objets noethériens (cohérents) de E, alors le foncteur naturel

$$\mathrm{Ind}(C) \longrightarrow E$$

est une équivalence de catégories. On conclut de ceci qu'*un topos noethérien est parfait* (2.9.1), donc qu'un topos localement noethérien est localement parfait.

Si on suppose seulement E localement noethérien, il sera encore vrai que tout objet de E est limite inductive de ses sous-objets prénoethériens (car dans un topos admettant une sous-catégorie génératrice formée d'objets quasi-compacts, tout objet est limite inductive 216
filtrante de ses sous-objets quasi-compacts). Mais comme un objet prénoethérien de E n'est plus nécessairement cohérent, cet énoncé n'a alors qu'une utilité très limitée, et on sait (1.33) que les conditions de 1.25 ne sont plus nécessairement vérifiées.

Exemple 2.15. — (*Espaces topologiques.*) Soit X un espace topologique. Alors les conditions suivantes sont équivalentes : (i) l'espace topologique X est noethérien (i.e. tout ouvert de X est quasi-compact), i.e. toute suite croissante d'ouverts de X est stationnaire) ; (ii) le topos $\mathrm{Top}(X)$ est noethérien ; (iii) l'objet final X de $\mathrm{Top}(X)$ est noethérien ; (iv) l'objet final X de $\mathrm{Top}(X)$ est prénoethérien.

En effet, on a trivialement (ii) ⇔ (iii) ⇒ (iv) ⇔ (i), d'autre part (i) implique que la sous-catégorie génératrice ouv(X) de Top(X), qui est stable par limites projectives finies, est formée d'objets prénoethériens, d'où (ii).

On voit de même que l'espace topologique X est localement noethérien (i.e. est réunion d'ouverts noethériens) si et seulement si le topos Top(X) est localement noethérien.

2.15.1. — Ainsi, nos définitions 1.30, 2.11 sont compatibles avec la terminologie reçue pour les espaces topologique. D'autre part, nous avons tenu dans le cas général à donner au terme
217 « objet noethérien » un sens plus fort que celui de la notion plus naïve de 1.30, pour que l'ensemble des propriétés qui s'attachent à cette notion (plutôt que la seule structure grammaticale de la définition) soit bien en accord avec l'intuition qui s'attache aux espaces topologiques et aux schémas *noethériens.*

Le lecteur trouvera d'autres exemples dans les exercices suivants.

Exercice 2.16. — (*Espaces à opérateurs et topos classifiants*).

Soit X un espace topologique sur lequel opère un groupe discret G, d'où (IV 2.3) un topos $E = \mathrm{Top}(X, G)$. On interprète les objets X' de ce topos comme des espaces étalés sur X à groupe d'opérateurs G, et on note que le topos induit $E_{/X}$, est canoniquement équivalent à $\mathrm{Top}(X', G)$.

a) Pour que l'objet final du topos E soit quasi-compact, il faut et il suffit que l'espace topologique quotient X/G soit quasi-compact (Utiliser IV 8.4.1).
b) Soit P l'objet de E définit par l'espace étalé trivial $X \times G$ avec opération diagonale de G. Montrer que le topos induit $E_{/P}$ est équivalent au topos Top(X) (comparer IV 5.8.3). En conclure que E est localement cohérent (resp. localement noethérien) si et seulement si Top(X) est localement cohérent (cf. 2.4.7) (resp. localement noethérien (cf. 2.15)). Montrer que si E est localement cohérent, i.e. localement algébrique, il est
218 même algébrique, en utilisant la famille génératrice formée des objets T_U, où U est un ouvert cohérent de X, $T_U = G \times U$ avec opération $g \cdot (u, g') = (u, gg')$ de G, et la morphisme structural $p_U : T_U \to X$ défini par $P_U(u, g) = g \cdot u$.
c) Supposons E algébrique, i.e. Top(X) algébrique (2.4.7). Montrer que le morphisme structural $P \to e$ est quasi-séparé. Montrer que E est quasi-séparé si et seulement si Top(X) est quasi-séparé (ou encore l'espace topologique X est quasi-séparé, i.e. l'intersection de deux ouverts quasi-compacts de X est un ouverts quasi-compact), *et* G est fini ou X vide. (Comparer 1.33.)
d) Montrer que le morphisme structural $P \to e$ est quasi-compact si et seulement si G est fini. Montrer que E est cohérent (resp. noethérien) si et seulement si Top(X) l'est, *et* G est fini ou X vide.
e) Soient E un topos, G un Groupe de E, d'où un topos classifiant B_G (IV 2.4). Faire l'étude des conditions de finitude dans B_G, en s'inspirant de ce qui précède. Même question lorsqu'on part d'un pro-groupe strict $\mathscr{G} = (G_i)_{i \in I}$ de E. En particulier, on verra que si E est cohérent (resp. noethérien) et les G_i sont cohérents, alors $B_{\mathscr{G}}$ est cohérent (resp. noethérien).

Exercice 2.17. — (*Topos de la forme* $\widehat{C}$.) Soient C une catégorie équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$, et $E = \widehat{C}$ la catégorie des préfaisceaux sur C. Par le foncteur canonique $\varepsilon : C \to \widehat{C}$, on identifie C à une sous-catégorie pleine de E.

(a) C est une sous-catégorie génératrice de E formée d'objets quasi-compacts. Pour que 219
ceux-ci soient prénoethériens (cf. 1.32), il faut et il suffit que pour tout objet X de C, tout crible de X soit engendré par une famille finie de morphismes $X_i \to X$ de C. Pour que l'objet final de E soit quasi-compact (resp. prénoethérien), il faut et il suffit qu'il existe une sous-catégorie finale de C dont l'ensemble d'objets soit fini (resp. que tout crible de C soit engendré par une sous-catégorie de C dont l'ensemble d'objets soit fini).

(b) Pour que E admette une sous-catégorie génératrice formée d'objets cohérents (ou encore, quasi-séparés), il faut et il suffit que les objets de C soient cohérents dans E, ou encore que pour deux flèches $Y \xrightarrow{f} X$, $Z \xrightarrow{g} X$ dans C, l'objet $Y \times_X Z$ de E soit quasi-compact i.e. on peut trouver une famille finie de carrés commutatifs dans C

$$\begin{tikzcd} & T_i \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Y \arrow[dr, "f"'] & & Z \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd},$$

telle que tout autre carré commutatif dans C

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Y \arrow[dr, "f"'] & & Z \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd},$$

provienne d'un morphisme $T \to T_i$. (Noter que si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice 220
de E, tout $X \in \operatorname{ob} C$ est isomorphe à un facteur direct d'un des F_i.)

(c) Pour que E soit localement cohérent, i.e. soit engendré par une famille d'objets cohérents et *algébriques*, il faut et il suffit que les objets X de C soient des objets cohérents et algébriques de E, i.e. que la condition de b) soit vérifiée, ainsi que la condition suivante : pour toute double flèche $f, g : Y \rightrightarrows Z$ de C *au-dessus d'un objet X de C*, le noyau de cette double flèche dans E est un objet quasi-compact de E, i.e. il existe une famille finie de diagramme commutatifs dans C

$$\begin{tikzcd} T_i \arrow[r] & Y \arrow[r, shift left, "f{,}g"] \arrow[r, shift right] & Z \end{tikzcd}$$

telle que tout autre diagramme commutatif dans C

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] & Y \arrow[r, shift left, "f{,}g"] \arrow[r, shift right] & Z \end{tikzcd}$$

provienne d'un morphisme $T \to T_i$. Pour que E soit algébrique, il faut et il suffit qu'il satisfasse à la conditions de b) et à la condition précédente, mais où on prend une double flèche quelconque (f, g) de C (pas nécessairement au-dessus d'un objet X de C). Pour que E soit quasi-séparé, il faut et il suffit qu'il satisfasse les conditions de b), et que de plus pour deux objets X, $Y \in \operatorname{ob} C$, le produit $X \times Y$ dans E soit quasi-compact. Pour que E soit cohérent, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux deux conditions précédentes, et qu'il existe un sous-catégorie finale de C dont l'ensemble sous-jacent soit fini.

221 (d) Donner un exemple où les objets de la sous-catégorie génératrice C de E sont prénoethériens, mais où E n'admet pas de famille génératrice formée d'objets cohérents (i.e. (b)) où les objets de C ne sont pas tous cohérents). Prendre pour ceci pour C la catégorie ayant des objets X, T_i $(i = 0, 1, \dots)$ et e (l'objet final), les seuls morphismes entre ces objets en plus des morphismes structuraux dans e et des identités, étant des morphismes $u_i : T_i \to X$, $v_i : X \to T_i$ soumis aux conditions $u_i v_i = \mathrm{id}_X$, et enfin $p_i = v_i u_i$ (satisfaisant nécessairement $p_i^2 = \mathrm{id}_{T_i}$). On vérifie que les seuls cribles de X ou d'un T_i sont les deux cribles triviaux, et que e admet exactement un crible non trivial, donc en vertu de a), les objets de C sont des objets prénoethériens de E. Cependant, le produit $X \times X$ dans E n'est pas quasi-compact, car il ne satisfait pas au critère de b).

(e) Donner un exemple où la sous-catégorie génératrice C de E est formée d'objets cohérents de E, mais où E n'est pas localement cohérent. Prendre pour ceci pour C la catégorie dont l'ensemble des objets est formée d'objets distincts e (l'objet final), Y, Z et T_i $(i = 0, 1, \dots)$, avec comme seuls morphismes entre ces objets, en plus des morphismes dans l'objet final e et des morphismes identiques, des morphismes $f, g : Y \rightrightarrows Y$, soumis aux conditions $f u_i = g u_i$. On vérifiera que C satisfait à la condition de b) (avec un peu de patience ; on trouve que tous les produits fibrés d'objets de C sont isomorphes

222 à $\varnothing_E$ ou sont dans C, à l'exception de $Z \times_e Z$ et $Y \times_e Z$ qui sont recouverts par deux éléments de C), mais évidemment $\operatorname{Ker}(f, g)$ ne satisfait pas à la condition de c).

(f) Donner un exemple où C est stable par produits fibrés (a fortiori, E est un topos localement cohérent i.e. localement algébrique) mais où E n'est pas un topos algébrique. (Prendre l'exemple donné dans d), et la sous-catégorie pleine C' de E formée des objets Y, Z, T_i $(i > 0)$ et $\varnothing_E$).

(g) Supposons la catégorie C finie. Prouver que le topos E est noethérien, que ses objets noethériens (i.e. quasi-compacts) sont les contrafoncteurs $F : C^\circ \to (\mathrm{Ens})$ tels que pour tout objet X de C, $F(X)$ soit un ensemble *fini*, et que les foncteurs fibres sur E transforment objets noethériens en ensembles finis (cf. IV 7.6. h)).

(h) Supposons que tout morphisme $f : X \to X$ de C se factorise en un composé ip, où i est un monomorphisme et où p admet un inverse à droite. Soit X un objet de C, $I(X)$ l'ensemble de ses sous-objets au sens de C, considéré comme un ensemble ordonné, $S(I(X))$ l'ensemble des parties U de $I(X)$ telles que pour deux éléments X', $X'' \in I(X)$, $X' \in U$ et $X'' \leq X'$ implique $X'' \in U$. Montrer que l'ensemble ordonné des sous-objets dans E de X est isomorphe à l'ensemble $S(I(X))$ (ordonné par inclusion). En conclure que si $I(X)$ est fini, alors X est un objet prénoethérien de E. En particulier, si (en plus de la conditions de factorisation ci-dessus) C est stable par

produits fibrés (resp. par limites projectives finies) et si pour tout $X \in \operatorname{ob} C$, l'ensemble 223
$I(X)$ des sous-objets de X dans C est fini, alors le topos E est localement noethérien (resp. noethérien).

(i) Soit C la catégorie des ensembles finis (ou, au choix, des ensembles finis non vides) $\in \mathscr{U}$, de sorte que $E = \widehat{C}$ est la catégorie des ensembles simpliciaux augmentés (resp. des ensembles simpliciaux tout court). Montrer que E est un topos noethérien. (Utiliser h).) Prenant un pro-objet $(X_i)_{i\in I}$ non essentiellement constant de C, montrer que E admet des foncteurs fibres qui ne transforment pas objets noethériens en objets noethériens (i.e. en ensembles finis).

(j) On considère le diagramme d'implications suivant de propriétés pour un topos E :

$$\begin{tikzcd}
\text{E est noethérien} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{E est localement noethérien} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[ddr, Rightarrow] & \\
\text{E est cohérent} \arrow[r, Rightarrow] & \text{E est algébrique} \arrow[d, Rightarrow] & \\
& \begin{array}{c}\text{E est loc. cohérent, i.e.}\\ \text{E}_{\text{cohalg}} \text{ engendre E}\end{array} \arrow[d, Rightarrow] & \text{E}_{\text{prénoeth}} \text{ engendre E} \arrow[ddl, Rightarrow] \\
& \text{E}_{\text{coh}} \text{ engendre E} \arrow[d, Rightarrow] & \\
& \text{E}_{\text{qucpct}} \text{ engendre E} &
\end{tikzcd}$$

Montrer que toutes les implications de ce diagramme sont strictes, et qu'il n'y a pas entre les notions envisagées d'autres implications que les implications composées du diagramme précédent. Ici E_{coh}, E_{qucpct}, $E_{\text{prénoeth}}$, E_{cohalg} désignent respectivement les 224
sous-catégories pleines de E formées des objets cohérents, resp. quasi-compacts, resp. prénoethériens, resp. cohérents et algébriques de E. (On se bornera à des topos de la forme $\widehat{C}$, en utilisant les résultats énoncés dans d), e), f).)

(k) Résoudre la question suivante (dont le rédacteur de ces lignes ignore la réponse) : $E = \widehat{C}$ peut-il être localement noethérien sans que les $\operatorname{Hom}(X, Y)$ (pour $X, Y \in \operatorname{ob} C$) soient finis ?

Exercice 2.18. — Soit E un topos.

a) Soit X un objet prénoethérien de E. Montrer que X est isomorphe à une somme finie d'objets connexes (IV 4.3.5) de E. (Montrer par l'absurde qu'une suite croissante de partitions de X (IV 8.7) est stationnaire.)

b) Soient X un objet de E, $(f_i : X_i \to X)_{i\in I}$ une famille couvrante de X. Montrer que si chacun des X_i est isomorphe à une somme d'objets connexes de E, il en est de même de X. (Se ramener au cas où les X_i sont connexes, puis au cas où ce sont des sous-objets de X, et considérer alors sur l'ensemble d'indices I la relation d'équivalence R

engendrée par la relation $X_i \cap X_j \neq \phi_E$, et montrer que si $J = I/R$, X est somme des $X(i) = \operatorname{Sup}_{i\in I} X_i$.)

c) Conclure de b) que si on désigne par $(X_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E, alors E est
225 localement connexe (IV 8.7. ℓ)) si et seulement si chacun des X_i $(i \in I)$ est isomorphe à une somme d'objets connexes de E.

d) Conclure de a) et c) que si E admet une sous-catégorie génératrice formée d'objets prénoethériens, en particulier si E est localement noethérien, alors E est localement connexe, et a fortiori est isomorphe au topos somme (IV 8.7 b)) d'une famille de topos connexes (IV 8.7 e)) i.e. dont l'objet final est connexe. (En particulier, on peut associer à E, pour tout morphisme $f : P \to E$, où P est un topos « connexe non vide et simplement connexe » (IV 2.7.5) un pro-groupe fondamental $\pi_1(E, f)$; on notera que si E est localement noethérien « non vide » on peut toujours trouver un tel f, avec P le topos ponctuel, grâce à Deligne ([9]).

3. Conditions de finitude pour un morphisme de topos

Définition 3.1. — *Soit $f : E' \to E$ un morphisme de topos. On dit que f est* quasi-compact (resp. quasi-séparé) *si pour tout objet quasi-compact (resp. quasi-séparé) X de E, $f^*(X)$ est quasi-compact (resp. quasi-séparé). On dit que f est cohérent si f est quasi-compact et quasi-séparé.*

3.1.1. — On notera que si f possède une des propriétés précédentes, alors tout morphisme de topos isomorphe à f possède la même propriété. Il est trivial également que le composé de deux morphismes de topos quasi-compacts (resp. quasi-séparés, resp. cohérents) est encore quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent).

226 ***Proposition 3.2.*** — *Avec les notations de 3.1, soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille génératrice d'objets quasi-compacts (resp. cohérents) de E. Supposons, dans le cas respé, que E' admette une famille génératrice formée d'objets quasi-compacts. Pour que f soit quasi-compact (resp. cohérent), il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, $f^*(X_i)$ soit quasi-compact (resp. cohérent).*

La nécessité de la condition est triviale. Pour la suffisance dans le premier cas, on note que pour tout objet quasi-compact X de E, il y a une famille épimorphique finis de morphismes $X_i \to X$, donc il y a une famille épimorphique finie $f^*(X_i) \to f^*(X)$, avec les $f^*(X_i)$ quasi-compacts par hypothèse, donc $f^*(X)$ est quasi-compacts (1.3). Dans le deuxième cas, il reste à voir que si X est un objet quasi-séparé de E, alors $f^*(X)$ est quasi-séparé. L'hypothèse sur X peut s'exprimer (1.17) par l'existence d'une famille épimorphique de morphismes $X_i \to X$ telle que les $X_i \times_X X_j$ soient quasi-compacts. Ceci dit, on aura une famille couvrante $f^*(X_i) \to f^*(X)$, telle que les produits fibrés $f^*(X_i) \times_{f^*(X)} f^*(X_j)$ sont quasi-compacts (puisque en vertu de a), f^* transforme objets quasi-compacts en objets quasi-compacts). Comme les $f^*(X_i)$ sont cohérents, on conclut encore à l'aide de 1.17.

Corollaire 3.3. — *Soient C et C' deux $\mathcal{U}$-sites où les produits fibrés soient représentables et où toute famille couvrante admet une sous-famille couvrante finie, $g : C \to C'$ un morphisme de sites* (IV 4.9.1). *Alors le morphisme de topos $f : C^\sim \to C'^\sim$ défini par g est cohérent.*

227 En effet, $\epsilon_C(C)$ (resp. $\epsilon_{C'}(C')$) est une famille génératrice de C (resp. de C') satisfaisant les conditions respées de 3.2 (2.1.1).

Proposition 3.4. — *Soient E un topos localement cohérent (2.3), $f : X \to Y$ une flèche de E, d'où un morphisme de topos induits* (IV (5.5.2)) *$E_{/X} \to E_{/Y}$. Pour que ce dernier soit un morphisme de topos quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent), il faut et il suffit que f soit un morphisme quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent).*

Le cas « quasi-compact » est trivial en vertu des définitions (sans condition sur E), le cas « quasi-séparé » n'est autre que 2.8, enfin le cas « cohérent » résulte de la conjonction des deux cas précédents.

Proposition 3.5. — *Soit $f : E' \to E$ un morphisme de topos localement cohérents. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille génératrice dans E formée d'objets cohérents algébriques. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour toute flèche u quasi-compacte de E, $f^*(u)$ est quasi-compacte.*

(i bis) *Pour toute flèche $u : X_i \to X_j$, $f^*(u)$ est quasi-compacte.*

(ii) *Pour tout objet cohérent Y' de E', tout objet cohérent algébrique Y de E, et toute flèche $v : Y' \to f^*(Y)$, le morphisme de topos correspondant*

$$f_v : E'_{/Y'} \longrightarrow E_{/Y}$$

composé du morphisme de localisation $E'_{/Y'} \to E'_{/f^*(Y)}$ déduit de Y (IV (5.5.2)) *et du* 228
morphisme $E'_{/f^*(Y)} \to E_{/Y}$ induit par f (IV (5.10.1)) *est cohérent.*

(ii bis) *Même condition que dans* (ii)*, mais en se bornant à un ensemble de données $v_\alpha : Y'_\alpha \to f^*(Y_\alpha)$ tel que les Y'_α soient algébriques et recouvrent l'objet final de E'.*

(ii ter) *(Lorsqu'on se donne une famille génératrice $(X'_{i'})_{i' \in I'}$ dans E' formée d'objets cohérents, et pour tout $i' \in I'$, un $i \in I$ et une flèche $v_{i'} : X'_{i'} \to f(X_i)$.) Pour tout $i' \in I'$, le morphisme de topos $E'_{/X'_{i'}} \to E_{/X}$ défini par v_i est cohérent.*

Comme toute flèche $X_i \to X_j$ est quasi-compacte, il est évident que (i) ⇒ (i bis). Inversement, supposons (i bis) vérifié et prouvons (i). Soit $u : X \to Y$ une flèche quasi-compacte de E. En termes d'une famille épimorphique $X_i \to Y$, l'hypothèse sur u s'exprime donc par le fait que les $X \times_Y X_i$ sont quasi-compacts (1.16), i.e. qu'il existe pour chaque i une famille finie épimorphique de morphismes $X_j \to X \times_Y X_i$ (1.3). Alors on a une famille épimorphique correspondante $f^*(X_i) \to f^*(Y)$, telle que pour tout i on ait une famille épimorphique finie $f^*(X_j) \to f^*(X \times_Y X_i) \simeq f^*(X) \times_{f^*(Y)} f^*(X_i)$, dont le composé avec la projection pr_2 dans $f^*(X_i)$ est un morphisme quasi-compact $f^*(X_j) \to f^*(X_i)$, grâce à l'hypothèse (i bis). Il s'ensuit (1.11 (i)) que pour tout i, $\mathrm{pr}_2 : f^*(X) \times_{f^*(Y)} f^*(X_i)$ est quasi-compact, donc (1.10 (ii)) $f^*(u) : f^*(X) \to f^*(Y)$ est quasi-compact.

Il reste à prouver les implications (i) ⇒ (ii) et (ii bis) ⇒ (i), l'implication (ii) ⇒ (ii bis) étant 229
triviale, et (ii ter) étant un cas particulier de (ii bis). L'implication (i) ⇒ (ii) est immédiate : en effet, un objet X de $E_{/Y}$ est quasi-compact (resp. quasi-séparé) si et seulement si le morphisme structural $X \to Y$ (resp. le morphisme diagonal $X \to X \times_Y X$) est quasi-compact (2.7), et on a le même critère de quasi-compacité et de quasi-séparation pour $f^*_Y(X')$. Prouvons enfin (ii bis) ⇒ (i). Soit donc $u : X \to Y$ une flèche quasi-compacte dans E, prouvons

que $f^*(u)$ est quasi-compacte. Comme les Y'_α recouvrent l'objet final de E', il suffit de prouver que les $f^*(u)|Y'_\alpha$ sont quasi-compacts (1.10 (ii)). Or, ces morphismes ne sont autres que les $f^*_{v_\alpha}(u|Y_\alpha)$, et on est donc réduit à prouver ceci :

Corollaire 3.6. — *Soit $f : E' \to E$ un morphisme cohérent de topos localement cohérents. Alors pour tout flèche quasi-compacte u de E, $f^*(u)$ est quasi-compacte.*

Grâce à l'implication (i bis) ⇒ (i) de 3.4 déjà prouvée, il suffit de prouver que si $u : X \to Y$ est une flèche de E, avec X, Y cohérents, alors $f^*(u)$ est un morphisme quasi-compact, ce qui résulte aussitôt de l'hypothèse sur f, impliquant que $f^*(X)$ et $f^*(Y)$ sont également cohérents.

230 ***Définition 3.7.*** — *Soit $f : E' \to E$ un morphisme de topos localement cohérents. On dit que f est* localement cohérent *s'il satisfait aux conditions équivalentes de 3.5.*

Remarquons que « localement » signifie localement en haut.

3.7.1. — Cette notion ne dépend encore que de la classe d'isomorphie du morphisme de topos f, et elle est manifestement stable par composition de morphismes de topos. De plus, en vertu de 3.5, si f est cohérent il est localement cohérent, la réciproque étant vraie si E' et E sont cohérents (en vertu de 3.5 (ii bis)). Du critère 3.5 (ii bis) résulte aussitôt le critère suivant :

Corollaire 3.7. — *Soient $f : E' \to E$ un morphisme de topos localement cohérents, $(Y_i)_{i\in I}$, $(Y'_i)_{i\in I}$ deux familles d'objets de E et de E', et pour tout $i \in I$ $v_i : Y'_i \to f^*(Y_i)$ un morphisme, d'où un morphisme de topos*

$$f_{v_i} : E'_{/Y'_i} \longrightarrow E_{/Y_i}.$$

Supposons que les Y'_i recouvrent l'objet final de E'. Alors f est localement cohérent si et seulement si pour tout $i \in I$, f_{v_i} l'est.

En particulier, appliquant ceci au morphisme identique d'un topos induit, on trouve :

Corollaire 3.8. — *Soient E un topos localement cohérent, $v : X \to Y$ une flèche de E. Alors le morphisme des topos induits $E_{/X} \to E_{/Y}$ défini par v est localement cohérent.*

231 ***Remarque 3.9.*** — *Il semble que tous les morphismes de topos algébriques qu'on ait rencontrés en pratique soient localement cohérents (c'est pourquoi le terme « localement cohérent » n'est pas appelé sans doute à un très grand usage). Il revient au même d'affirmer que les morphismes de topos cohérents qu'on a rencontrés en pratique sont cohérents. On peut cependant construire des morphismes non cohérents de topos cohérents, et plus particulièrement, un morphisme non cohérent du topos ponctuel* (IV 2.2) *dans un topos noethérien E,* cf. 2.17 i).

Exemples 3.10. — (*Topos associés aux schémas.*) Reprenons l'exemple 1.22 de la catégorie (Sch) avec des topologies T_i de SGA IV 6.3. Soit, pour tout schéma X, X_{T_i} le $\mathscr{V}$-topos défini par le site induit $(\mathrm{Sch})_{/X}$. Alors le morphisme de schémas $f : X \to Y$ définit un morphisme de topos $f_{T_i} : X_{T_i} \to Y_{T_i}$, et il résulte de 3.4 et de 1.22 que ce dernier morphisme de topos est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) si et seulement si le morphisme de schémas f est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) au sens habituel de EGA IV 1. En tout état de cause, f_{T_i} est localement cohérent en vertu de 3.8.

On peut aussi associer à un schéma X les $\mathscr{U}$-topos $\mathrm{Top}(X)$ et $\mathrm{Top}(X_{\text{ét}})$ comme dans 1.22.1, et à tout morphisme de schémas $f : X \to Y$ sont alors associés des morphismes $\mathrm{Top}(f)$ et $\mathrm{Top}(f_{\text{ét}})$ des topos correspondants. Soit $T(f)$ l'un de ces deux morphismes de topos. On vé- 232
rifie immédiatement via 3.2 que ce morphisme de topos est toujours localement cohérent, et qu'il est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) si et seulement si le morphisme de schémas f est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. cohérent) au sens habituel.

Ces observations montrent donc encore que la terminologie introduite dans le présent numéro est compatible avec la terminologie reçue en théorie des schémas, et mérite donc d'être acceptée par le lecteur le plus récalcitrant.

Exercice 3.11. — (*Topos cohérents et prétopos.*)

a) On appelle $\mathscr{U}$-prétopos (ou simplement prétopos), une catégorie C satisfaisant aux conditions suivantes :
   1) Les limites projectives finies dans C sont représentables.
   2) Les sommes finies dans C sont représentables, elles sont disjointes et universelles.
   3) Les relations d'équivalence dans C sont effectives, et tout épimorphisme dans C est effectif universel.
   4) C est équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$.

   Montrer que si E est un $\mathscr{U}$-topos cohérent, alors la sous-catégorie pleine E_{coh} de E formée des objets cohérents de E est un $\mathscr{U}$-prétopos, et que le foncteur d'inclusion $E_{\mathrm{coh}} \to E$ est exact à gauche, commute aux sommes finies et au passage au quotient 233
   par des relations d'équivalence. (Utiliser 1.5.3, 1.15 et 1.17.1). Montrer que la topologie induite par E sur C est la topologie « précanonique », i.e. la topologie dont les familles couvrantes $X_i \to X$ sont celles qui admettent une sous-famille *finie* couvrantes pour la topologie canonique de C. Par suite E se reconstitue à équivalence près par la connaissance du prétopos $C = E_{\mathrm{coh}}$, comme le topos $C^{\sim}$ (C étant munie de sa topologie précanonique).
b) Soit C un $\mathscr{U}$-prétopos. Munissons C de la topologie précanonique. Montrons que tout morphisme f de C se factorise en $f''f'$, avec f' un épimorphisme et f'' un monomorphisme. Montrer que le topos $E = C^{\sim}$ est cohérent, et que le foncteur canonique $\epsilon : C \to E$ induit une équivalence de C avec la sous-catégorie E_{coh} de E. (Montrer d'abord que ε est un foncteur pleinement fidèle exact à gauche commutant aux sommes finies et au passage au quotient par une relation d'équivalence, puis qu'un sous-objet cohérent dans E d'un objet de C est dans l'image essentielle de C.) Par suite, le $\mathscr{U}$-prétopos C se reconstitue à équivalence de catégories près quand on connaît le $\mathscr{U}$-topos associé $E = C^{\sim}$.
c) Soient C et C' deux $\mathscr{U}$-prétopos. Montrer que pour qu'un foncteur $\varphi : C' \to C$ soit un morphisme de sites de C dans C' (pour les topologies précanoniques), il faut et il suffit que φ soit exact à gauche, et commute aux sommes finies et au passage un quotient par une relation d'équivalence.
d) Avec les notations de c), supposons que C et C' soient associés à deux $\mathscr{U}$-topos cohé- 234
   rents E, E' comme dans a). Montrer que le foncteur canonique (IV 4.9.3)

$$\mathbf{Morsite}(C, C') \longrightarrow \mathbf{Homtop}(E, E')$$

induit une équivalence de premier membre (explicité dans C)) avec la sous-catégorie pleine de deuxième formé des morphismes de topos $E \to E'$ qui sont *cohérents*, un foncteur quasi-inverse étant obtenu en associant à tout morphisme cohérent de topos $f : E \to E'$ le foncteur $E'_{\mathrm{coh}} = C' \to E_{\mathrm{coh}} = C$ induit par F^*.

e) Soient C un $\mathscr{U}$-prétopos et $E = C^{\sim}$. Exprimer directement en termes de propriétés d'exactitude de C les conditions équivalentes de 1.25 (Consulter 1.28 b.) Montrer qu'un objet X de C est noethérien dans E si et seulement si toute suite croissante de sous-objets de X dans C est stationnaire, donc que E est noethérien si et seulement si tout objet de C satisfait à la conditions précédente.

Exercice 3.12. — Un topos E est appelé un topos *fini* s'il existe une catégorie finie C telle que E soit équivalent à $\widehat{C}$.

a) Pour que E soit un topos fini, il faut et il suffit que E admette suffisamment de points essentiels (IV 7.6 b)), et que la catégorie $\mathbf{Pointess}(E)$ des points essentiels de E soit équivalente à une catégorie finie. (Utiliser IV 7.6 d) et h).)

235 b) Supposons E fini. Prouver que tout point de E est essentiel. Prouver que les 2-foncteurs $E \mapsto \mathbf{Point}(E)$ et $C \mapsto \widehat{C}$ établissent des 2-équivalences entre la 2-catégorie des topos finis E, et la 2-catégorie des catégories karoubiennes (IV 7.5 a)) C qui sont équivalentes à des catégories finies, et que tout morphisme de topos finis est essentiel (IV 7.6 a)). (Utiliser a) et IV 7.6 h).)

c) Supposons $E = \widehat{C}$, avec C équivalente à une catégorie finie, et soit F un topos cohérent. Rappelons (IV (4.6.3.1.)) que les morphismes de topos $f : E \to F$ correspondent aux foncteurs $u : C \to \mathbf{Point}(F)$. Montrer que pour que f soit cohérent, il faut et il suffit que f transforme point cohérent de E (3.1) en point cohérent de F, ou encore que pour tout $X \in \operatorname{ob} C$, $u(X)$ soit un point *cohérent* de F. (Utiliser 3.2 et 2,17 g).) En conclure que tout morphisme $f : E \to F$ d'un topos fini dans un topos fini est cohérent.

d) Soit X un espace topologique sobre (IV 4.2.1). Pour que le topos $\mathrm{Top}(X)$ (IV 2.1) soit fini, il faut et il suffit que X soit un ensemble fini. (Utiliser IV 7.1.6)

4. Conditions de finitude dans un topos obtenu par recollement

Le Présent paragraphe ne sera plus utilisé dans la suite du Séminaire.

4.1. — Soient E un topos, U un ouvert de E (i.e. un sous-objet de l'objet final de E), et
236 considérons les sous-topos ouverts et fermés correspondants de E (IV 9)

$$E' = E_{/U}, E'' = E_{/U}.$$

Nous désignerons par

$$j : E' \longrightarrow E, i : E'' \longrightarrow E$$

les morphismes de topos canoniques. Rappelons (3.4) que pour que j soit un morphisme quasi-compact (resp. cohérent) de topos, il faut et il suffit que l'inclusion

$$j : U \longrightarrow e$$

de U dans l'objet final de E (inclusion que nous noterons également j) soit un morphisme quasi-compact (resp. cohérent) dans E ; d'autre part, $j : E' \to E$ est toujours quasi-séparé (car $j : U \to e$ l'est (1.8.1)). Nous nous proposons de donner des critères pour que le topos E'' soit cohérent, et le morphisme de topos $i : E'' \to E$ soit cohérent. Notons d'abord :

Proposition 4.2. — *Les notations étant celles de 4.1, le morphisme d'inclusion $i : E'' \to E$ est quasi-compact, i.e. pour tout objet quasi-compact X de E, l'objet $i^*(X)$ de E'' est quasi-compact ; de plus, si X est prénoethérien (1.30), $i^*(X)$ est prénoethérien.*

Cela résulte de la définition 1.1 et du

Lemme 4.2.1. — *L'application $Y \mapsto i^*(Y)$ induit un isomorphisme d'ensembles ordonnés* 237
entre l'ensemble des sous-objets de X qui contiennent le sous-objet $X_U = X \times U$ de X, et l'ensemble des sous-objets de $i^*(X)$.

Notons que, i_* étant conservatif (car pleinement fidèle) et exact à gauche (en particulier, commuant aux produits fibrés), il s'ensuit aussitôt qu'un morphisme $u : Y \to Z$ dans E'' est un monomorphisme si et seulement si $i_*(u) : i_*(Y) \to i_*(Z)$ l'est . Il s'ensuit aussitôt, identifiant (par i_*) E' à la sous-catégorie pleine de E formée des objets Z satisfaisant aux conditions équivalentes de IV 9.7 1), que les sous-objets sans E' de l'objet Z de E'' s'identifient aux sous-objets Y de Z dans E qui veulent bien appartenir à E'', ou, ce qui revient au même, qui contiennent $Z_U \xrightarrow{\sim} U$. Or pour Z de la forme $i_*i^*(X) = X_{\complement U}$ donné par la somme amalgamée IV (9.5.1),

$$i_*i^*(X) = X_{\complement U} = X \amalg_{X_U} U,$$

la donnée d'un sous-objet Y de ce dernier dans E équivaut à la donnée d'un couple formé un sous-objet Y_1 de X et d'un sous-objet Y_2 de U, avec la condition que les images inverses de ces sous-objets dans X_U coïncident. La condition que Y contienne U signifie alors que $Y_2 = U$, et la condition qui reste sur Y_1 est que Y_1 contienne X_U. Cela établit donc une bijection entre l'ensemble des sous-objets de $i^*(X)$ dans E'', et l'ensemble des sous-objets de X qui contiennent X_U. Il est clair que c'est un isomorphisme d'ensembles ordonnés, et 238
que l'application inverse est bien celle annoncée dans 3.14.1.

Corollaire 4.3. — a) *Soit X un objet de E. Pour que X soit quasi-compact, il suffit que $i^*(X)$ et $j^*(X)$ le soient, et cette condition est également nécessaire si $j : U \to e$ est quasi-compact.*

b) *Soit Y un objet de E''. Pour que Y soit quasi-compact, il suffit que $i_*(Y)$ le soit, et cette condition est également nécessaire si U est quasi-compact.*

Démonstration

a) La suffisance résulte de la définition 1.1 et du fait que le couple (i^*, j^*) est conservatif (IV 9.11 3)). La nécessité résulte du fait que i et j sont quasi-compacts (en vertu de 3.14 et de l'hypothèse que j est quasi-compact).

b) Comme $Y \simeq i^*i_*(Y)$, la suffisance résulte de 4.2. La nécessité résulte de la suffisance dans a), compte tenu que $i^*i_*(Y) \simeq Y$ et $j^*i_*(Y) \simeq U$.

Corollaire 4.4. — *Soit Y un objet de E''. Si U est quasi-compact ou si E admet une famille génératrice formée d'objets quasi-compacts, alors pour que Y soit quasi-séparé (resp. cohérent), il* suffit *qu'il en soit ainsi de $i_*(Y)$. Si U est quasi-séparé (resp. cohérent) et si $j : U \to e$ est un* *morphisme quasi-compact, alors pour que Y soit quasi-séparé (resp. cohérent), il faut que $i_*(Y)$ le soit.*

239 Le cas respé résulte du cas non respé, compte tenu de 4.3 b). Supposons $i_*(Y)$ quasi-séparé, et prouvons qu'il en est de même de Y, sous l'une des deux hypothèses faites. Il faut donc prouver que pour deux objets quasi-compacts Y' et Y'' au-dessus de Y, le produit fibré $Y' \times_Y Y''$ est quasi-compact. Lorsqu'on suppose Y quasi-compact, on note qu'il suffit de prouver que $i_*(Y' \times_Y Y'')$ est quasi-compact (4.3 b)), ce qui résulte du fait que $i_*(Y')$ et $i_*(Y'')$ le sont (4.3 b)), utilisant ici la quasi-compacité de U), que i_* commute aux produits fibrés, et l'hypothèse $i_*(Y)$ quasi-séparé. Lorsqu'on suppose que E admet une famille génératrice formée d'objets quasi-compacts, alors $i_*(Y')$ est limite inductive filtrante de ses sous-objets quasi-compacts ${X'}_\alpha$, donc $Y' \simeq i^* i_*(Y')$ est limite inductive filtrante de sous-objets $i^*({X'}_\alpha)$, et comme Y' est quasi-compact, il est égale à un des $i^*({X'}_\alpha)$. De même Y'' est de la forme $i^*({X''}_\beta)$, où ${X''}_\beta$ est un sous-objet quasi-compact de $i_*(Y'')$. Mais alors $Y' \times_Y Y'' = i^*(X'_\alpha \times_{i_* Y} X''_\beta)$, et comme $X'_\alpha \times_{i_*(Y)} X''_\beta$ est quasi-compact en vertu de l'hypothèse $i_*(Y)$ quasi-séparé, il s'ensuit que $Y' \times_Y Y''$ l'est aussi en vertu de 4.2.

Inversement, supposant U quasi-séparé et $j : U \to e$ quasi-compact, montrons que si Y est quasi-séparé, il en est de même de $i_*(Y)$, i.e. que pour deux objets X', X'' quasi-compacts au-dessus de $i_*(Y)$, le produit fibré $X' \times_{i_*(Y)} X''$ est quasi-compact. Pour ceci, appliquant
240 4.3 a), il suffit de prouver que son image par i^* est quasi-compact (ce qui résulte de 4.2 et de l'hypothèse que Y est quasi-séparé) *et* que son image par j^* est quasi-compact ; or cette dernière est $j^*(X') \times j^*(X'')$, et est bien quasi-compacte car $j^*(X')$ et $j^*(X'')$ le sont (j étant quasi-compact) et U est quasi-séparé.

Corollaire 4.5. — *Supposons que E admette une sous-catégorie génératrice formée d'objets quasi-compacts* (resp. *prénoethériens), alors il en est de même de E''.*

Cela résulte de 4.2 et du

Lemme 4.5.1. — *Si $(X_\alpha)_\alpha$ est une famille génératrice dans E, alors $(i^*(X_\alpha))_\alpha$ est une famille génératrice dans E''.*

Cela signifie en effet que la famille des foncteurs

$$Y \longrightarrow \mathrm{Hom}(i^*(X_\alpha), Y)$$

sur E'' est conservative, or on a $\mathrm{Hom}(i^*(X_\alpha), Y) \simeq \mathrm{Hom}(X_\alpha, i_*(Y))$, et il suffit d'utiliser le fait que le foncteur i_* est conservatif.

Proposition 4.6. — *Les notations sont celles de 4.1.*

a) *Si E admet une famille génératrice formée d'objets cohérents, il en est de même pour le sous-topos fermé E'', et le morphisme d'inclusion $i : E'' \to E$ est cohérent.*

241 b) *Supposons que le morphisme $j : U \to e$ dans E soit quasi-compact. Si E est localement cohérent* (resp. *cohérent,* resp. *quasi-séparé,* resp. *localement noethérien,* resp. *noethérien,* resp. *localement parfait,* resp. *parfait) il en est de même de E'', et le morphisme d'inclusion $i : E'' \to E$ est cohérent.*

a) La première assertion résultera de la seconde et de 4.5.1. En tous cas, 4.5 implique que E'' admet une famille génératrice formée d'objets quasi-compacts, donc 3.2 s'applique et nous montre qu'il suffit de vérifier que pour tout objet cohérent X de E, l'objet $i^*(X)$ de E'' est cohérent. Utilisant la compatibilité de la formation du topos complémentaire d'un ouvert avec la localisation (IV 9.13 b)), on est ramené au cas où X est l'objet final de E, donc à prouver que l'objet final de E'' est cohérent. Or, 4.4 s'applique, donc il suffit de prouver que $i_*(e_{E''}) = e_E$ est cohérent, ce qui est bien le cas.

b) Comme sous chacune des hypothèses faites dans b), E admet une famille génératrice formée d'objets cohérents, il résulte déjà de a) que $i : E'' \to E$ est cohérent. De plus, 4.5.1 implique alors que E'' admet la sous-catégorie pleine ${E''}_{\mathrm{coh}}$ formée de ses objets cohérents comme sous-catégorie génératrice. Supposons E cohérent, et montrons que E'' l'est aussi, i.e. (2.4.5) montrons que la sous-catégorie ${E''}_{\mathrm{coh}}$ de E'' est stable par limites projectives finies, sachant qu'il en est ainsi pour la sous-catégorie E_{coh} de E ; or cela résulte aussitôt du critère 4.4 respé (qui s'applique, car U est maintenant cohérent, e l'étant et $j : U \to e$ étant quasi-compact), compte tenu que i_* est exact à gauche. 242
Par localisation, utilisant encore IV 9.13 b), on en conclut que si E est localement cohérent, il en est de même de E''. Si E est quasi-séparé, alors E'' l'est aussi : en effet son objet final est quasi-séparé en vertu de 4.4, celui de E l'étant, et il reste à prouver que le produit de deux objets quasi-séparés de E'' est quasi-séparé (sachant qu'il en est ainsi dans E''), ce qui résulte encore du critère 4.4 et du fait que i_* commute aux produits (compte tenu que le sous-objet U de e est quasi-séparé, e l'étant, de sorte que 4.4. s'applique).

Comme un topos est localement noethérien (resp. noethérien) si et seulement si il est localement cohérent (resp. cohérent) et admet une famille génératrice formée d'objets pré-noethériens (2.10 (iii bis)), il résulte de ce qui précède et de 4.5 que si E est localement noethérien (resp. noethérien), il en est de même de E''. Supposons maintenant E parfait, et prouvons que E'' l'est. Comme on sait déjà qu'il est cohérent, il reste à vérifier qu'il satisfait au critère 1.25 (i), i.e. que tout objet Y de E'' est limite inductive filtrante d'objets cohérents, sachant que l'énoncé analogue est vrai dans E ; or $i_*(Y)$ étant limite inductive filtrante d'objets cohérents X_α, $Y \simeq i^*i_*(Y)$ est limite inductive filtrante des objets cohérents $i^*(X_\alpha)$. Par localisation (IV 9.13 b)) on en conclut que si E est localement parfait, il en est de même de E''. Cela achève la démonstration de 4.6.

Remarque 4.6.1. — En fait, dans 4.6 b) l'hypothèse que $j : U \to e$ soit quasi-compact 243
est inutile, sauf peut-être dans le cas « E quasi-séparé ». Il suffit en effet, en vertu de la démonstration qui précède, de voir que E cohérent implique E'' cohérent. Or U est limite inductive filtrante de ses sous-objets quasi-compacts U_α, et on vérifiera alors dans 7. qu'alors E'' s'identifie au topos limite projective (au sens de 7.) des sous-topos fermés E''_i complémentaire des $E_{/U_i}$, qui en vertu de 4.6 b) sont des topos cohérents à morphismes de transition cohérents. Il s'ensuit alors que E'' est un topos cohérent (7).

Corollaire 4.7. — *Supposons que la sous-catégorie E_{coh} de E formée des objets cohérents soit génératrice, et soit X un objet de E.*

a) *Pour que X soit quasi-séparé, il faut que $i^*(X)$ et $j^*(X)$ le soient, et cette condition est aussi suffisante si $j : U \to e$ est quasi-compact.*

b) *Supposons que $j : U \to e$ soit quasi-compact. Alors X est cohérent si et seulement si $i^*(X)$ et $j^*(X)$ le sont.*
c) *Supposons E cohérent et $j : U \to e$ quasi-compact. Alors E est parfait (2.9.1) si et seulement si E' et E'' le sont.*

a) On a signalé dans 4.1 que $j : E' \to E$ est quasi-séparé, et d'autre part on sait par 4.6 a) qu'il en est de même de i, d'où la nécessité. Pour la suffisance, soient X' et X'' des objets quasi-compacts au-dessus de X, il faut prouver que $X' \times_X X''$ est quasi-
244 compact, et pour ceci il suffit de prouver que ses images par i^* et j^* le sont (4.3 a)). Comme i et j sont quasi-compacts, en vertu de 4.2 et de l'hypothèse $j : U \to e$ quasi-compact, la conclusion résulte alors du fait que i^* et j^* commutent aux produits fibrés, et de l'hypothèse que $i^*(X)$ et $j^*(X)$ sont quasi-séparés.
b) Résulte de la conjonction de a) et de 4.3 a).
c) La nécessité a été déjà vue (4.6 b)). La suffisance résulte du fait que, E étant cohérent, E' et E'' le sont (4.6 b)), de sorte que pour un des topos envisagés, le fait qu'il soit parfait signifie que la catégorie de ses objets cohérents est stable par $\varinjlim$ finies. On conclut donc par b).

Exercice 4.8. — a) Résoudre la question suivante (dont le rédacteur avoue à sa confusion ignorer la réponse) : avec les notations de 4.1, si E est quasi-séparé (resp. algébrique) en est-il de même de E'' ?
b) Supposons que E soit équivalent à un topos de la forme $\widehat{C}$, où C est une catégorie équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$. Prouver directement, en utilisant 2.17 c) et IV 9.24, que si E est localement cohérent (resp. cohérent, resp. algébrique, resp. quasi-séparé, resp. localement noethérien, resp. noethérien) il en est de même de E''.

4.9. — Gardons les notations de 4.1, et rappelons (IV 9.16) que la donnée d'une situation (E, U), formée par un topos E et un ouvert U de E, équivaut essentiellement à celle d'un
245 triple (E', E'', f), où E' et E'' sont des topos et où

(4.9.1) $$f : E' \longrightarrow E''$$

est un « foncteur de recollement », i.e. un foncteur *exact à gauche et accessible* ; partant de (E, U) comme dans 4.1, le foncteur de recollement associé est donné par

(4.9.2) $$f = i^* j_*.$$

Nous nous proposons d'exprimer, en termes des données E', E'', f le fait que E soit un topos cohérent (resp. parfait) et que U soit un objet quasi-compact, ou ce qui revient au même, que E et E' soient cohérents. Nous savons déjà que ceci entraîne que E'' est également cohérent (4.6 b)), de sorte que la question revient à la suivante : étant donnés deux topos *cohérents* E' et E'' et un foncteur de recollement f (4.9.1), à quelles conditions sur f le topos recollé E est-il cohérent (resp. parfait) ? Nous savons d'ailleurs (4.7 c)) que E est parfait si et seulement si E est cohérent, et E' et E'' sont parfaits ; donc le cas respé du problème posé se ramène au cas non respé. Signalons cependant que la solution (4.10) de ce dernier est plus jolie si on suppose déjà E' parfait.

4.9.3. — Notons d'abord que si E est cohérent, alors on reconstruit la sous-catégorie pleine E_{coh} de E formée des objets $X = (X', X'', u : X'' \to f(X'))$ de E qui sont cohérents, comme étant la sous-catégorie E_0 de E formée des X pour lesquels $X' = j^*(X)$ et $X'' =$ **246**
$i^*(X)$ sont cohérents (4.7 b)). Une condition nécessaire pour que E soit cohérent est donc que la sous-catégorie E_0 précédente soit génératrice. Cette condition est également suffisante, car en vertu de 4.3 a) E_0 est formée d'objets quasi-compacts, d'autre part il est clair que E_0 est stable par limites projectives finies, et on conclut par 3.4.5.

Rappelons maintenant (IV 9.18) que la donnée d'un foncteur de recollement (4.9.1) équivaut à celle d'un *faisceau* sur E'', à valeurs dans $\mathrm{Pro}(E')^0$:

$$G \in \mathbf{Faisc}(E'', \mathrm{Pro}(E')^0), G : E''^0 \longrightarrow \mathrm{Pro}(E'^0), \tag{4.9.4}$$

ou ce qui revient au même, à celle d'un foncteur $g = G^0$,

$$g : E'' \longrightarrow \mathrm{Pro}(E') \tag{4.9.5}$$

qui *commute aux limites inductives*. Si C est une sous-catégorie génératrice de E'', qu'on munit de la topologie induite, on sait (II 6.10) que la donnée de G équivaut aussi (à isomorphisme unique près) à celle d'un faisceau sur C à valeurs dans $\mathrm{Pro}(E')^0$

$$G_C \in \mathbf{Faisc}(C, \mathrm{Pro}(E')^0), G_C : C^\circ \longrightarrow \mathrm{Pro}(E')^0, \tag{4.9.6}$$

ou, ce qui revient au même, à celle d'un foncteur $g_C = G_C^0$,

$$g_C : C \longrightarrow \mathrm{Pro}(E'), \tag{4.9.7}$$

satisfaisant aux conditions d'exactitude à gauche qu'on sait (II 6.2.1)). Bien entendu, g_C n'est **247**
autre que la *restriction de* g (4.9.5) *à* C. Le cas le plus intéressant pour nous est celui où on prend $C = E'_{\mathrm{coh}}$, d'où des objets

$$G_0 \in \mathbf{Faisc}(E''_{\mathrm{coh}}, \mathrm{Pro}(E')^0), G_0 : E''^0_{\mathrm{coh}} \longrightarrow \mathrm{Pro}(E')^0, \tag{4.9.8}$$

$$g_0 = G_0^0 : E''_{\mathrm{coh}} \longrightarrow \mathrm{Pro}(E'), \tag{4.9.9}$$

dont chacun revient encore à la donnée de f.

4.9.10. — Supposons la sous-catégorie pleine génératrice C de E'' formée d'objets quasi-compacts et qu'elle soit stable dans E'' par sommes finies, par passage au quotient par des relations d'équivalence, et par produits fibrés : c'est le cas par exemple pour $C = E''_{\mathrm{coh}}$ (1.15 et 1.17.1). Il est alors immédiat, si P est une catégorie où les limites projectives finies sont représentables (par exemple $P = \mathrm{Pro}(E')^0$), qu'un foncteur $G_C : G^0 \to P$ est un faisceau à valeurs dans P si et seulement si le foncteur $g_C = G_C^0 : C \to P^0$ commute aux sommes finies et au passage au quotient par une relation d'équivalence. Ceci précise en particulier quels sont les faisceaux (4.9.6) (exprimant donc les foncteurs de recollement $f : E' \to E''$).

Ces rappels étant posés, nous pouvons donner la solution au problème posé dans 4.9 :

Proposition 4.10. — *Soient E', E'' deux topos cohérents, et $f : E' \to E''$ un foncteur de* **248**
recollement (IV 9.10)*, i.e. un foncteur exact à gauche et accessible. Soit E le topos qu'on en déduit par recollement* (IV 9.16)*, et désignons par E'_{coh} (resp. E'_{PF}) la sous-catégorie strictement pleine de E' formée des objets cohérents (resp. des objets X tels que le foncteur covariant* $\mathrm{Hom}(X, -)$ *représenté par X commute aux petites limites inductives filtrantes). Considérons les conditions suivantes :*

(i) *E est cohérent.*

(ii) *Pour tout objet X' de E', il existe une famille de morphismes*

$$v_\alpha : Y'_\alpha \longrightarrow X'$$

de but X', à sources des objets cohérents de E', telle que la famille des

$$f(v_\alpha) : f(Y'_\alpha) \longrightarrow f(X')$$

dans E'' soit couvrante.

(ii bis) *f commute aux (petites) limites inductive inductives filtrantes, et* (ii) *est vrai pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\, E'_{PF}$.*

(ii ter) *Le foncteur canonique* (IV 9.20.1)

$$\pi : \mathbf{Point}(E'') \longrightarrow \mathrm{Pro}(E') \tag{4.10.1}$$

défini par le foncteur de recollement f se factorise (à isomorphisme près) par $\mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}})$ *(via le foncteur pleinement fidèle* $\mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}}) \to \mathrm{Pro}(E')$ *provenant de l'inclusion $E'_{\mathrm{coh}} \to E'$) :*

$$\pi_0 : \mathbf{Point}(E'') \longrightarrow \mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}}). \tag{4.10.2}$$

249 (iii) *Le foncteur f commute aux (petites) limites inductives filtrantes.*

(iii bis) *Le foncteur g_0 (4.9.9) se factorise (à isomorphisme près) par un foncteur*

$$E''_{\mathrm{coh}} \longrightarrow \mathrm{Pro}(E'_{PF}), \tag{4.10.3}$$

via le foncteur pleinement fidèle $\mathrm{Pro}(E'_{PF}) \to \mathrm{Pro}(E')$ *déduit de l'inclusion $E'_{PF} \to E'$.*

(iii ter) *Le foncteur canonique π (4.10.1) se factorise (à isomorphisme près) en*

$$\pi_1 : \mathbf{Point}(E'') \longrightarrow \mathrm{Pro}(E'_{PF}). \tag{4.10.4}$$

(iv) *Le foncteur g_0 (4.9.9) se factorise (à isomorphisme près) par un foncteur*

$$E''_{\mathrm{coh}} \longrightarrow \mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}}). \tag{4.10.5}$$

On a alors le diagramme d'implications :

$$\text{(iv)} \Rightarrow \text{(i)} \Leftrightarrow \text{(ii)} \Leftrightarrow \text{(ii bis)} \Leftrightarrow \text{(ii ter)} \Rightarrow \text{(iii)} \Leftrightarrow \text{(iii bis)} \Leftrightarrow \text{(iii ter)}. \tag{4.10.6}$$

Signalons tout de suite le

Corollaire 4.11. — a) *Supposons que E' soit parfait. Alors toutes les conditions envisagées dans 4.10 sont équivalentes, en particulier E est cohérent si et seulement si f commute aux limites inductives filtrantes, ou encore si et seulement si le foncteur g_0 (4.9.9) se factorise*
250 *(à isomorphisme près) par* $\mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}})$.

b) *Pour que E soit parfait, il faut et il suffit que E' et E'' le soient, et que f (resp. g_0) satisfasse à la condition énoncée dans* a).

En effet, a) résulte du fait que E' parfait signifie $E'_{\mathrm{coh}} = E'_{PF}$, de sorte que (iii bis) implique (iv). L'assertion b) s'ensuit, comme il résulte des remarques préliminaires de 4.9.

4.12. Démonstration de 4.10. —

a) Explicitons la condition équivalente à (i) obtenue dans 4.9.3, savoir que la sous-catégorie pleine E_0 de E est génératrice i.e. que pour tout objet $X = (X', X'', u : X'' \to f(X'))$ de E, la famille de tous les morphismes

$$v = (v', v'') : Y = (Y', Y'', v : Y'' \longrightarrow f(y')) \longrightarrow X,$$

avec $Y \in \mathrm{Ob}\, E_0$ i.e. Y', Y'' cohérents, est épimorphique. Comme le couple de foncteurs (i^*, j^*) est conservatif, cela signifie aussi que la famille des morphismes correspondants $Y' \to X'$ est épimorphique dans E', et que la famille des morphismes correspondants $Y'' \to X''$ est épimorphique dans E''. Or c'est clair pour la première, comme on voit en prenant des $Y \in \mathrm{Ob}\, E_0$ *au-dessus de* U i.e. tels que $Y'' = \varnothing_{E''}$: on trouve la famille de toutes les flèches dans E' de but X', à source cohérente, qui est bien épimorphique puisque E' est cohérent donc la cous-catégorie ${E'}_{\mathrm{coh}}$ est génératrice. Il reste donc à exprimer que la famille des $Y'' \to X''$ est épimorphique, quel que soit l'objet donné X de E.

b) Or supposons satisfaite la condition (ii) pour l'objet X' envisagé ici. Il en résulte que l'on peut trouver une famille épimorphique de morphismes $Y''_\beta \to X''$, dont les composées avec $u : X'' \to f(X')$ se relèvent chacun en un morphisme $Y''_\beta \to f(Y'_\alpha)$ pour $\alpha = \phi(\beta)$ convenable ; comme E''_{coh} est une sous-catégorie génératrice de E'', on peut même supposer les Y''_β cohérents. Mais alors les diagrammes commutatifs 251

$$\begin{tikzcd} Y''_\beta \arrow[r] \arrow[d] & f(Y'_{\varphi(\beta)}) \arrow[d] \\ X'' \arrow[r] & f(X') \end{tikzcd}$$

fournissent la famille cherchée de morphismes dans E, donnant une famille épimorphique $Y''_\beta \to X''$. Donc (ii) $\Rightarrow$ (i).

Réciproquement, supposons (i) et prouvons (ii). On applique la condition explicitée dans a) au cas de l'objet

$$X = j_*(X') = (X', f(X'), \mathrm{id} = f(X') \xrightarrow{\sim} f(X'));$$

comme les $Y'' \to X'' \simeq f(X')$ forment une famille épimorphique, il en est de même a fortiori de la famille des $f(v') : f(Y') \to f(X')$, d'où la conclusion, puisque les Y' sont cohérents par hypothèse. Donc

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \text{(ii)}.$$

c) Notons maintenant que la condition (iv) signifie aussi que pour tout objet X'' de F'', le foncteur pro-représentable 252

$$g(X'') : X' \longrightarrow \mathrm{Hom}(X'', f(X'))$$

sur E' est pro-représentable par un pro-objet dont les composants sont dans ${E'}_{\mathrm{coh}}$, ou ce qui revient au même, qu'il existe dans la catégorie $E'_{/g(X'')}$, formée des couples d'un objet X' de E' et d'un élément $u \in g(X'')(X') = \mathrm{Hom}(X'', f(X'))$, $u : X'' \to f(X')$, un ensemble cofinal d'objets (X'_α, u_α), $u_\alpha : X'' \to f(X'_\alpha)$, avec $X''_\alpha \in \mathrm{Ob}\, E'_{\mathrm{coh}}$. La condition de cofinalité, comme la catégorie $E'_{/g(X'')}$ est filtrante, signifie simplement que pour tout objet (X', u), $u : X'' \to f(X')$ de $E'_{/g(X'')}$ il existe un morphisme d'un $({X'}_i, u_i)$ dans l'objet précédent, i.e. un morphisme $v'_\alpha : X'_\alpha \to X'$ rendant commutatif le triangle

(∗)
$$\begin{tikzcd} & f(x'_\alpha) \arrow[d, "f'(v'_\alpha)"] \\ X'' \arrow[ur, dash, "u_\alpha"] \arrow[r] & f(X'). \end{tikzcd}$$

Donc la condition (iv) équivaut à ceci :

(iv bis) Pour tout flèche $u : X'' \to f(X')$, avec $X' \in \operatorname{Ob} E'$ et $X'' \in \operatorname{Ob} E'_{\mathrm{coh}}$, il existe une flèche $v : Y' \to X'$ dans E' telle que u se factorise à travers $f(v') : f(X') \to f(X')$.

Or il est clair que la condition (iv bis) implique (ii), puisque pour X' fixé, la
253 famille des $u : X'' \to f(X')$ de source un objet cohérent est épimorphique, de sorte qu'il en est a fortiori ainsi de la famille de tous les $f(v'_\alpha)$ dans les diagrammes correspondants (∗). Donc

$$\text{(iv)} \Rightarrow \text{(i)}.$$

d) Explicitons la condition (ii ter). Soit p un point de E'', alors par définition $\pi(p)$ est le pro-objet de E' qui pro-représente le foncteur $h : X' \to f(X')_p$, ou encore la pro-objet défini par le foncteur canonique $E'_{/h} \to E'$, où $E'_{/h}$ désigne la catégorie des couples (X', u), avec $X' \in \operatorname{Ob} E'$ et $u \in h(X')$ i.e. $u \in f(X')_p$. Dire que ce pro-objet est isomorphe à un pro-objet provenant de $\operatorname{Pro}(E'_{\mathrm{coh}})$ signifie que la sous-catégorie de $E'_{/h}$ formée des (X', u) avec $X' \in \operatorname{Ob} E'_{\mathrm{coh}}$ y est cofinale, i.e. que pour tout objet (X', u), $u \in f(X')_p$, de $E'_{/h}$, il existe un objet (X'_0, u_0) qui le majore, avec X'_0 cohérent, i.e. qu'il existe un morphisme $X'_0 \to X'$ (X'_0 cohérent) tel que u soit dans $\operatorname{Im}(f(X'_0) \to f(X'))$. Dire que ceci est vrai pour tout point p signifie que pour tout objet X' de E', la famille des $f(X'_0) \to f(X')$, avec $f(X'_0)_P \to f(X')_P$ soit surjective. Comme on verra dans l'appendice (10.) qu'un topos cohérent E'' a assez de points, on voit que la condition obtenue signifie aussi que pour tout $X' \in \operatorname{Ob} E$, la famille des $f(X'_0) \to f(X')$ est épimorphique. Mais cela n'est autre que la condition (ii), donc

$$\text{(ii)} \Leftrightarrow \text{(ii ter)}.$$

254 e) La condition que f commute aux limites inductives filtrantes (condition (iii)) équivaut, comme la famille des foncteurs fibres de E'' est conservative, à celle que les foncteurs composés $h : X' \to f(X')_P$ le sont. Prouvons que cela signifie que le pro-objet $\pi(p)$ qui pro-représente ce foncteur est dans l'image essentielle de $\operatorname{Pro}(E'_{PF})$: cela prouvera alors les implications

$$\text{(iii)} \Leftrightarrow \text{(iii ter)} \Leftarrow \text{(ii ter)} \Rightarrow \text{(iii bis)}.$$

Nous sommes donc amenés à prouver le

Lemme 4.12.1. — *Soient E' un topos tel que la sous-catégorie E'_{coh} y soit génératrice, et $X' \in \operatorname{Ob}\operatorname{Pro}(E')$. Pour que X' appartienne à l'image essentielle de $\operatorname{Pro}(E'_{PF})$, il faut et il suffit que le foncteur $h : E' \to (\mathrm{Ens})$ qu'il pro-représente commute aux limites inductives filtrantes.*

Comme une limite inductive filtrante de foncteurs commutant aux limites inductives filtrantes possède la même propriété, la suffisance résulte de la définition de E'_{PF}. Pour la nécessité, il faut prouver que si le foncteur h commute aux limites inductives filtrantes, alors dans la catégorie filtrante $E'_{/h}$ des couples (X', u) avec $u \in h(X')$, la sous-catégorie formée des couples (X', u) avec $X' \in \operatorname{Ob} E'_{PF}$ est cofinale, i.e. pour tout (X', u) dans $E'_{/h}$, il existe un morphisme $X'_0 \to X'$, avec $X'_0 \in \operatorname{Ob} E'_{PF}$, tel que $u \in \operatorname{Im}(h(X'_0) \to h(X'))$. Or on sait que X' est limite inductive filtrante d'objets X'_i de 255
E'_{PF} (1.24.2 a)), donc $h(X')$ est limite inductive filtrante des $h(X'_i)$, d'où la conclusion.

f) Il reste seulement à prouver les implications
$$\text{(ii bis)} \Rightarrow \text{(ii)} \quad \text{et} \quad \text{(iii)} \Leftrightarrow \text{(iii bis)}.$$
La première implication résulte trivialement du fait que tout objet X' de E' est limite inductive filtrante d'objets X'_i de E'_{PF}. Pour la deuxième, il suffit de noter que la famille des foncteurs
$$Y'' \longmapsto \operatorname{Hom}(X'', Y''),$$
pour $X'' \in \operatorname{Ob} E''_{\mathrm{coh}}$, est conservative et formée de foncteurs commutant aux limites inductives filtrantes (1.23 (ii)), donc le foncteur $f : E' \to E''$ commute aux limites inductives filtrantes si et seulement s'il en est ainsi des foncteurs composés $X' \to \operatorname{Hom}(X', f(X')) = \operatorname{Hom}_{\operatorname{Pro}(E')}(g_0(X''), X')$, ce qui équivaut au fait que les $g_0(X'')$ sont dans l'image essentielle de $\operatorname{Pro}(X'_{PF})$, en vertu de 4.12.1. C.Q.F.D.

Remarque 4.13. — Il convient de préciser, en langage faisceautique, la signification de la condition 4.10 (iv). Considérons le diagramme commutatif de foncteurs

(4.13.1)
$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Pro}(E'_{\mathrm{coh}})^{\circ} \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[d, "\beta_0"] & \operatorname{Pro}(E')^{\circ}_{\beta} \arrow[d, "\beta"] \\
\check{E}'_{\mathrm{coh}} & \check{E}' \arrow[l, "\gamma"] ,
\end{tikzcd}$$

où les signes $\vee$ désignent les catégories de foncteurs à valeurs dans (Ens), et la deuxième 256
flèche horizontale γ est la flèche de restriction des foncteurs, toutes les autres flèches désignant les foncteurs pleinement fidèles bien connus. Notons que la flèche d'inclusion α *ne commute pas en général aux limites projectives*, mêmes finies, donc en général un faisceau F sur un site C (tel que E'') définit un préfaisceau $\alpha \circ F$ sur ce même site, à valeurs dans $\operatorname{Pro}(E'')^0$, qui n'est pas nécessairement un faisceau. Néanmoins, si un *préfaisceau F* sur C à valeurs dans $\operatorname{Pro}(E'_{\mathrm{coh}})^0$ est tel que le préfaisceau αF correspondant à valeurs dans $\operatorname{Pro}(E')^0$ est un faisceau, alors F est lui-même un faisceau. Cela provient en effet du fait que la condition d'être un faisceau est une propriété d'exactitude à gauche (II 6.2 1)), et que les foncteurs β, β_0 et γ commutent aux petites limites projectives.

D'autre part, il résulte de la caractérisation 4.9.10 des faisceaux sur E''_{coh} à valeurs dans une catégorie P quelconque, que pour tout foncteur $\alpha : P \to Q$ tel que $\alpha^0 : P^0 \to Q^0$
257 commute aux *sommes finies* et au *passage au quotient par des relations d'équivalence*, le foncteur $g \mapsto \alpha \circ g'$ de $\mathrm{Hom}({E''}^0_{\mathrm{coh}}, P)$ dans $\mathrm{Hom}({E''}^0_{\mathrm{coh}}, Q)$ transforme faisceaux en faisceaux. D'autre part, nous savons que dans Hom E'_{coh} et dans E' les sommes finies et les quotients par les relations d'équivalence sont représentables, et que le foncteur d'inclusion $E'_{\mathrm{coh}} \to E'$ y commute (1.15 et 1.17.1). Il en est donc de même pour les catégories $\mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}})$ et $\mathrm{Pro}(E')$ et le foncteur d'inclusion entre ces catégories (I 8.9.5 b) et 8.9.7), lequel n'est autre que α^0, où α est le foncteur intervenant dans (4.13.1). De ceci on conclut que si

$$\varphi : {E'}^0_{\mathrm{coh}} \longrightarrow \mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}})^0 \tag{4.13.2}$$

est un foncteur, alors φ *est un faisceau sur* E''_{coh} *à valseurs dans* $\mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}})^0$ *si et seulement si* $\alpha \circ \varphi$ *est un faisceau sur* E''_{coh} *à valeurs dans* $\mathrm{Pro}(E')^0$. *Donc la catégorie des foncteurs de recollement* $f : E' \to E''$ qui satisfont à la condition 4.10 (iv) est canoniquement équivalente à la catégorie des faisceaux φ sur E''_{coh} à valeurs dans $\mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}})^0$. On en conclut, compte tenu de 4.10, qu'un tel faisceau φ définit canoniquement un foncteur de recollement (à isomorphisme unique près), et que le topos E déduit de ce dernier est *cohérent*; de plus (4.11) *si* E' *est parfait*, on obtient ainsi *tous* les topos *cohérents* qu'on peut déduire des topos E', E'' par recollement.

258 Notons d'autre part que E'_{coh} est équivalente à une petite catégorie et est stable par limites projectives finies, de sorte que (I 8.10.14) $\mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}})^0$ est équivalente, par le foncteur pleinement fidèle β_0 de (4.13.1), à la sous-catégorie pleine de $E'_{\mathrm{coh}} = \mathrm{Hom}(E'_{\mathrm{coh}}, (\mathrm{Ens}))$ formée des foncteurs qui sont exacts à gauche. Donc la donnée d'un faisceau (4.13.2) équivaut à celle d'un foncteur

$$F : {E''}^0_{\mathrm{coh}} \times E'_{\mathrm{coh}} \longrightarrow (\mathrm{Ens}) \tag{4.13.3}$$

qui soit un faisceau par rapport au premier argument et qui soit exact à gauche en le second argument ; ou encore, à celle d'un foncteur

$$f_0 : E'_{\mathrm{coh}} \longrightarrow E'' \tag{4.13.4}$$

qui soit exact à gauche. Si f est le foncteur de recollement satisfaisant à la condition 4.10 (iv) associé à φ, on vérifie immédiatement que f_0 est canoniquement isomorphe à la restriction du foncteur $f : E' \to E''$. On voit donc que *sous les conditions envisagées* f_0 *détermine* f (à isomorphisme canonique près). Signalons enfin, pour résumer le contenu de 4.11 :

Corollaire 4.14. — *Lorsque* E' *est un topos parfait, alors la catégorie des foncteurs de recollement* $f : E' \to E''$ *qui donnent par recollement un topos cohérent* E *est équivalente par* $f \mapsto f_0 = f/E'_{\mathrm{coh}}$ *à la catégorie des foncteurs* $f_0 : E'_{\mathrm{coh}} \to E''$ *qui sont exacts à gauche, ou*
259 *encore à la catégorie des faisceaux* φ *sur le site* E''_{coh} *(ou, ce qui revient au même, sur le topos* E'' *) à valeurs dans la catégorie* $\mathrm{Pro}(E'_{\mathrm{coh}})^0$ (cf. 4.9.10).

On observera que la première assertion résulte également 4.10 en notant que $E' \approxeq \mathrm{Ind}(E'_{\mathrm{coh}})$ (1.25), donc que la catégorie des foncteurs $f : E' \to P$ commutant aux limites inductives filtrantes (où P est une catégorie où les petites limites inductives filtrantes sont représentables) est équivalente, par le foncteur restriction, à la catégorie des foncteurs quelconque $f : E'_{\mathrm{coh}} \to P$; il est immédiat que sous ces conditions, si dans P les $\varinjlim$ finies sont représentables, que f est exact à gauche si et seulement si f_0 l'est.

Remarques 4.15. — a) La démonstration donnée de 4.10 montre qu'on obtient des conditions équivalentes à (ii ter) resp. (iii ter) en remplaçant la catégorie $\mathbf{Point}(E'')$ par une sous-catégorie qui définisse une famille *conservative* de foncteurs fibres.

b) Prenant pour E'' le topos ponctuel (IV 2.2), on voit aussitôt que les conditions (ii ter) et (iii ter) ne sont équivalentes *que si* $E'_{\mathrm{coh}} = E'_{PF}$, i.e. si E' est parfait. Donc la condition « E cohérent » n'équivaut à la condition « f commute aux limites inductives filtrantes » que si E' est parfait. Par contre, prenant plus généralement pour E'' un topos cohérent de la forme $\widehat{C}$, on voit que *dans ce cas la condition* (i) *équivaut à* (iv) *pour tout* E'. En fait, le rédacteur n'est pas arrivé à construire dans le cas général un exemple où E soit cohérent, sans que la condition (iv) soit vérifiée. C'est honteux !

5. Commutation des foncteurs $H^i(X, -)$ aux limites inductives filtrantes 260

Théorème 5.1. — *Soient E' un topos algébrique (2.3), E un topos localement cohérent (2.3), $f : E' \to E$ un morphisme cohérent de topos (3.1). Alors, pour tout entier q, les foncteurs $R^q f_*$* (V 5.0) *commutent aux limites inductives filtrantes de faisceaux abéliens.*

Corollaire 5.2. — *Soit E' un topos cohérent (2.3). Pour tout entier q, le foncteur $H^q(E', -)$ commute aux limites inductives filtrantes de faisceaux abéliens.*

Corollaire 5.3. — *Soient E un topos (resp. un topos algébrique) (2.3), X un objet de E algébrique et cohérent (resp. cohérent) (2.3). Pour tout entier q, le foncteur $H^q(X, -)$ commute aux limites inductives filtrantes de faisceaux abéliens.*

Le corollaire 5.2, se déduit de 5.1 en prenant pour E le topos ponctuel et pour $f : E' \to E$ l'unique morphisme (IV 2.2). Montrons que 5.2 entraîne 5.3. Soit $j_X : E_{/X} \to E$ le morphisme de localisation. On a un isomorphisme canonique, fonctoriel en le faisceau abélien (V 2.2.1) $H^q(X, F) \simeq H^q(E_{/X}, j_X^* F)$. Le foncteur j_X^* commute aux limites inductives et le topos $E_{/X}$ est cohérent (2.4.6) d'où 5.3. Montrons que 5.3 entraîne 5.1. Soit E_{cohalg} la sous-catégorie pleine de E définie par les objets algébriques et cohérents de E. C'est une catégorie génératrice (2.4.5). Pour tout faisceau abélien F, $R^q f_* F$ est le faisceau associé au préfaisceau $X \mapsto H^q(f^* X, F)$ ($X \in \mathrm{ob}\, C$) (V 5.1). Comme f est cohérent, $f^* X$ est cohérent pour tout objet X de C (3.1). D'après 5.3 le préfaisceau $X \mapsto H^q(f^* X, F)$ commute aux limites inductives filtrantes de l'argument F d'où 5.1. en utilisant le fait que le foncteur faisceau associé commute aux limites inductives. (On remarquera qu'on n'utilise que la propriété suivante du morphisme f : Il existe une famille génératrice S de E telle que pour tout X de S, $f^*(X)$ soit algébrique et cohérent). Il reste donc à démontrer 5.2. On sait déjà que le foncteur $H^\circ(E', -)$ commute aux limites inductives filtrantes de faisceaux abéliens (1.2.3). D'après un résultat classique de [7], il suffit pour démontrer 5.2, de montrer qu'une limite inductive filtrante de faisceaux acycliques pour le foncteur $H^\circ(E', -)$ est acyclique pour $H^\circ(E', -)$. Ceci résulte du lemme suivant appliqué au cas où $C = E'_{\mathrm{coh}}$' :

Lemme 5.4. — *Soient E un topos localement cohérent (2.3), C une sous-catégorie pleine de E,* 261
génératrice et stable par produit fibré telle que tout objet de C soit quasi-compact (1.1). Une limite inductive filtrante de faisceaux C-acycliques (V 4.2) *est un faisceau C-acyclique.*

Soit $(F_i)_{i\in I}$, un système inductif filtrante de faisceaux C-acycliques et notons F sa limite inductive. Tout objet Y de C est cohérent (2.1) et par suite $F(Y) = \varinjlim_i F_i(Y)$ (1.2.3). Pour montrer que F est C-acyclique, il suffit de montrer que $\check{H}^q(Y,F) = 0$ pour tout $q > 0$ et tout Y de C (V 4.3). Soient X un objet de C, $\mathcal{X} = (X_\alpha \to X)_{\alpha\in A}$ une famille couvrante finie par des objets de $C^\bullet$. On a $H^q(\mathcal{X},F) = H^q(C^\bullet(\mathcal{X},F))$ (V 2.4.3). D'après ce qui précède, et en utilisant le fait que $C^\bullet(\mathcal{X},F)$ ne fait intervenir que des produits finis de groupes (V 2.3.3), on a $C^\bullet(\mathcal{X},F) = \varinjlim_i C^\bullet(\mathcal{X},F_i)$. Donc $H^q(\mathcal{X},F) = H^q(C^\bullet(\mathfrak{X},F)) = H^q(\varinjlim_i C^\bullet(\mathfrak{X},F_i)) = \varinjlim_i C^\bullet(\mathfrak{X},F_i)) = 0$ pour $q > 0$ (V 4.3). Par suite $\check{H}^q(X,F) = \varinjlim_{\mathfrak{X}} H^q(\mathfrak{X},F) = 0$.

Corollaire 5.5. — *Soient E un topos cohérent (2.3), $(X_i)_{i\in I}$ une famille filtrante décroissante de sous-objets cohérents de l'objet final. Notons Φ la famille des fermés de E* (IV 9) *contenue dans le fermé complémentaire de l'un des X_i. La famille Φ est une famille de supports de E* (V 6.12) *et pour tout entier q, les foncteurs $H^q_\Phi(E,-)$ et H^q_Φ* (V 6.13) *commutent aux limites inductives filtrantes.*

Soit Z_i le fermé complémentaire de X_i. Pour tout faisceau abélien F on a une suite exact (V 6.5) :

$$0 \longrightarrow H^0_{Z_i}(E,F) \longrightarrow H^0(E,F) \longrightarrow H^0(X_i,F) \longrightarrow H^1_{Z_i}(E,F) \longrightarrow \dots \quad .$$

Les foncteurs $H^q(E,F)$ et $H^q(X_i,F)$ commutent aux limites inductives de l'argument F (5.2, 5.3). Par suite $H^q_{Z_i}(E,F)$ commute aux limites inductives filtrantes de l'argument F, d'où la propriété analogue pour les foncteurs $H^q_\Phi(E,F)$, en passant à la limite inductive sur les Z_i (V 6.13). L'assertion concernant les foncteurs $\mathscr{H}^q_\Phi$ s'en déduit en localisant et en passant au faisceau associé.

262 ***Définition 5.6***. — Soient E un topos annelé d'anneau A et q un entier. Un A-Module G est dit de q-présentation finie s'il existe une famille X_i d'objets de E couvrant l'objet final de E, telle que pour tout i on ait une suite exacte de Modules sur $E_{/X_i}$:

$$L_q \longrightarrow L_{q-1} \longrightarrow \cdots L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow G_{/X_i} \longrightarrow 0 \tag{5.5.1}$$

où pour tout p, $L_p = A^{n_p}_{/X_i}$, n_p entier.

Proposition 5.7. — *Soit G un faisceau de q-présentation finie. Pour tout $i \leq q-1$, le foncteur* $\mathbf{Ext}^i_A(G,-)$ *commute aux limites inductives filtrantes de A-Modules.*

Le problème est local sur E (V 6.1). On peut donc supposer, quitte à se localiser aux $E_{/X_i}$, qu'on a une suite exacte du type (5.5.1). Posons $L. = L_q \to \cdots L_1 \to L_0$. On a $\mathbf{Ext}^i_A(G,F)$: $\mathscr{H}^i(\mathbf{Hom}_A(L.,F))$ et le foncteur $F \mapsto \mathbf{Hom}_A(L.,F)$ commute aux limites inductives, d'où la proposition.

Corollaire 5.8. — *Soient (E, A) un topos annelé, G un faisceau de A-Modules de q-présentation finie, X un objet algébrique et cohérent de E. Les foncteurs $F \mapsto \mathrm{Ext}^i_A(X; G, F)$, tels que $\frac{i(i-1)}{2} \leq q-1$, commutent aux limites inductives filtrantes de l'argument F.*

Se déduit de 5.7, et de 5.3 par la suite spectrale (V 6.1.3).

5.9. — Soient (E, A) un topos annelé, Φ une famille de supports de E (V 6.12), G un A-module de r-présentation finie (5.6), X un objet de E algébrique et cohérent (2.3). En passant à la limite inductive sur les fermés de Φ dans les dernières suites spectrales de V 6.9.1 et V 6.9.2 respectivement, on obtient deux suites spectrales (V 6.13)

$$\begin{cases} {}'E_2^{pq} = \varinjlim_{Z \in \Phi} \mathrm{Ext}^p_A(X; G, H^q_Z F) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{A,\Phi}(X; G, F), \\ {}''E_2^{pq} = \varinjlim_{Z \in \Phi} \mathbf{Ext}^p_A(G, H^q_Z F) \Rightarrow \mathbf{Ext}^{p+q}_{A,\Phi}(G, F). \end{cases} \tag{5.9.1}$$

Il résulte de 5.7 et de 5.8 qu'on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{cases} {}'E_2^{pq} \simeq \mathrm{Ext}^p_A(X; G, H^q_\Phi F) & , \quad \frac{p(p-1)}{2} \leq r-1, \\ {}''E_2^{pq} \simeq \mathbf{Ext}^p_A(G, H^q_\Phi F) & , \quad p \leq r-1. \end{cases} \tag{5.9.2}$$

Corollaire 5.10. — *On utilise les hypothèses et les notations de 5.5. Soient A un Anneau de E* 263
et G un A-Module de q-présentation finie. Pour tout entier i tel que $\dfrac{i(i-1)}{2} \leq r-1$, les foncteurs $F \mapsto \mathrm{Ext}^i_{A,\Phi}(E; G, F)$ et $F \mapsto \mathbf{Ext}^i_{A,\Phi}(G, F)$ (V 6.13) *commutent aux limites inductives filtrantes.*

Se déduit de 5.5 et 5.7 par les premières suites spectrales de V 6.9.1 et V 6.9.2 respectivement.

6. Limites inductive et projective d'une catégorie fibrée

6.0. — Nous supposons que le lecteur est familier avec la théorie des catégories fibrées [5]. Ce numéro a essentiellement pour but de fixer la terminologie et les notations concernant les catégories fibrées. Toutes les catégories considérées dans ce numéro appartiendront, sauf mention contraire, à un univers fixé $\mathcal{U}$.

Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{E}$ trois catégories, $\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ et $\pi' : \mathcal{G} \to \mathcal{E}$ deux foncteurs. On désigne par $\mathbf{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs $u : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, dash, "u"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{G} \arrow[dl, "\pi'"] \\ & \mathcal{E} & \end{tikzcd}$$

soit commutatif, et dont les morphismes sont les $\mathcal{E}$-morphismes de foncteurs, i.e. les morphismes de foncteurs transformés par π' en morphismes identiques.

Soit ξ un objet de $\mathcal{E}$. Les objets X de $\mathcal{F}$ tels que $\pi(X) = \xi$ sont appelés *les objets de $\mathcal{F}$ au-dessus de ξ*. Soit $f : \xi \to n$, un morphisme de $\mathcal{E}$. Les morphismes m de $\mathcal{F}$ tels que $\pi(m) = f$
264 sont appelés les morphismes de $\mathcal{F}$ *au-dessus de f*. Soient $f : \xi \to \eta$ un morphisme de $\mathcal{E}$ et X un objet de $\mathcal{F}$ au-dessus de ξ, Y un objet de $\mathcal{F}$ au-dessus de η ; on désigne par $\mathrm{Hom}_f(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y au-dessus de f.

Définition 6.1. — 1) *Un morphisme $m : X \to Y$ de $\mathcal{F}$ est dit* cartésien *si pour tout morphisme $p : Z \to Y$ au-dessus de $\pi(m)$, il existe un unique morphisme $q : Z \to X$ au-dessus de l'identité de $\pi(X)$ tel que $mq = p$.*

2) *La catégorie $\mathcal{F}$ est dite* préfibrée *par π au-dessus de $\mathcal{E}$ si pour tout morphisme $f : \xi \to \eta$ de $\mathcal{E}$ tout objet de $\mathcal{F}$ au-dessus de η est but d'un morphisme cartésien au-dessus de f.*

3) *La catégorie $\mathcal{F}$ est dite* fibrée *par π au-dessus de $\mathcal{E}$ si elle est préfibrée et si le composé de deux morphismes cartésiens composables de $\mathcal{F}$ est un morphisme cartésien.*

6.1.1. — Soit ξ un objet de $\mathcal{E}$. On appelle *catégorie fibre* de $\mathcal{F}$ en ξ, et on désigne par $\mathcal{F}_\xi$, la sous-catégorie de $\mathcal{F}$ dont les objets sont les objets de $\mathcal{F}$ au-dessus de ξ et les morphismes sont les morphismes de $\mathcal{F}$ au-dessus de id_ξ. Soient deux objets X et Y de F_ξ, on désigne par $\mathrm{Hom}_\xi(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y dans $\mathcal{F}_\xi$.

6.1.2. — Soit $f : \xi \to \eta$ un morphisme de $\mathcal{E}$. Un objet de Y au-dessus de η est but d'un morphisme cartésien au-dessus de f, si et seulement si le foncteur défini sur la fibre $\mathcal{F}_\xi$ à valeur dans les ensembles

$$Z \mapsto \mathrm{Hom}_f(Z, Y) \quad Z \in \mathrm{ob}(\mathcal{F}_\xi),$$

est représentable. Lorsque la catégorie $\mathcal{F}$ est préfibrée, le foncteur

$$Y \mapsto \mathrm{Hom}_f(., Y) \quad Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{F}_\eta),$$

à valeurs dans la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathcal{F}_\xi$, est en fait à valeurs dans la catégorie des foncteurs représentables sur $\mathcal{F}_\xi$, et définit donc, à isomorphisme unique près,
265 un foncteur $f^* : \mathcal{F}_\eta \to \mathcal{F}_\xi$, qui est appelé le foncteur *image réciproque pour f*. Supposons que la catégorie $\mathcal{F}$ soit préfibrée et choisissons pour tout morphisme f de $\mathcal{E}$ un foncteur changement de base f^*. La catégorie $\mathcal{F}$ est alors fibrée au-dessus de $\mathcal{E}$ si et seulement si pour tout couple f et g de morphismes composables de $\mathcal{E}$ le foncteur composé f^*g^* est un foncteur image réciproque. Soit alors

$$C_{f,g} : f^*g^* \longrightarrow (gf)^* \tag{6.1.2.1}$$

l'isomorphisme canonique. Les isomorphismes $C_{f,g}$ vérifient une condition de cocycles, provenant de l'associativité de la composition des morphismes dans $\mathcal{E}$:

$$C_{f,hg}(f^* \circ C_{g,h}) = C_{gh,f}(C_{f,g} \circ h^*) \tag{6.1.2.2}$$

6.1.3. — Réciproquement lorsqu'on se donne pour tout objet ξ de $\mathcal{E}$ une catégorie $\mathcal{F}_\xi$, pour tout morphisme $f : \xi \to \eta$ un foncteur $f^* : \mathcal{F}_\eta \to \mathcal{F}_\xi$, et pour tout couple (f, g) de morphismes de $\mathcal{E}$ un isomorphisme de foncteurs $C_{f,g} : f^*g^* \to (fg)^*$, tels que les $C_{f,g}$ vérifient la condition (6.1.2.2), on peut construire de manière essentiellement unique une catégorie $\mathcal{F}$ fibrée au-dessus de $\mathcal{E}$ dont les fibres « sont » les catégories $\mathcal{F}_\xi$ et dont les foncteurs changement de base peuvent être choisis « égaux » aux foncteurs donnés à l'avance [5].

6.1.4. — Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux catégories au-dessus de $\mathcal{E}$. On désigne par

$$\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/\mathcal{E}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$$

la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ définie par les foncteurs qui transforment les morphismes cartésiens de $\mathcal{F}$ en morphismes cartésiens de $\mathcal{G}$. Les objets de $\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/\mathcal{E}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ sont appelés *foncteurs cartésiens.*

Soient C et C' deux catégories et S un ensemble de morphismes de la catégorie C. On désigne par $\mathrm{Hom}_{S^{-1}}(C, C')$ l'ensemble des foncteurs de C dans C' qui transforment les morphismes de S en isomorphismes.

Désignons par (Cat) la catégorie dont les objets sont les catégories appartenant à l'univers et dont les morphismes sont les foncteurs entre ces catégories (la catégorie (Cat) n'appartient pas à l'univers).

Soient $\mathcal{F}$ une catégorie au-dessus de $\mathcal{E}$ et S l'ensemble des morphismes cartésiens de $\mathcal{F}$. La catégorie $\mathcal{F}$ définit deux foncteurs sur (Cat) à valeur dans la catégorie des ensembles 266
appartenant à l'univers :

$$C \mapsto \mathrm{Hom}_{S^{-1}}(\mathcal{F}, C) \quad C \in \mathrm{ob(Cat)}$$

$C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cart}/\mathcal{E}}(\mathcal{F}, C\times\mathcal{E}) = \{$Foncteurs cartésiens de $\mathcal{F}$ dans $C\times\mathcal{E}\}$

(la catégorie $C\times\mathcal{E}$ est considérée comme une catégorie au-dessus de $\mathcal{E}$ par le foncteur deuxième projection).

Proposition 6.2. — *Les foncteurs* (Cat) $\to$ (Ens) :

$$C \mapsto \mathrm{Hom}_{S^{-1}}(\mathcal{F}, C)$$
$$C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cart}/\mathcal{E}}(\mathcal{F}, C\times\mathcal{E})$$

sont canoniquement isomorphes. Ils sont représentables.

Preuve. — Pour prouver la première assertion, il suffit de remarquer que les morphismes cartésiens de $C\times\mathcal{E}$ sont les morphismes de la forme $m\times f$, où m est un isomorphisme de C. Pour prouver la seconde assertion, il suffit de prouver que le foncteur $\mathrm{Hom}_{S^{-1}}(\mathcal{F}, .)$ est représentable. Ceci résulte de [1]. Indiquons simplement l'idée de la démonstration. On adjoint formellement aux morphismes de $\mathcal{F}$ les inverses des morphismes de S. On considère la catégorie libre engendrée par les objets de $\mathcal{F}$, les morphismes de $\mathcal{F}$ et les inverses formels des morphismes de S (catégorie des chemins). On passe au quotient par les relations provenant des relations entre morphismes de $\mathcal{F}$ et les relations du type :

$$s^{-1}s = \mathrm{id} \quad , \quad ss^{-1} = \mathrm{id} \quad s\in S.$$

La catégorie ainsi obtenue est notée $\mathcal{F}(S^{-1})$ munie du foncteur canonique $Q = \mathcal{F} \to \mathcal{F}(S^{-1})$ représente le foncteur $\mathrm{Hom}_{S^{-1}}(\mathcal{F}, .)$.

Définition 6.3. — *Lorsque $\mathcal{F}$ est fibrée au-dessus de $\mathcal{E}$ le foncteur* $\mathrm{Hom}_{S^{-1}}(\mathcal{F}, .)$ *est noté* $\varinjlim_{\mathcal{E}^\circ} \mathcal{F}$ *et est appelé le foncteur limite inductive de $\mathcal{F}$ au-dessus de $\mathcal{E}^\circ$. La catégorie qui le* *représente est encore notée $\varinjlim_{\mathcal{E}^\circ} \mathcal{F}$ et est appelée la catégorie limite inductive de $\mathcal{F}$ au-dessus de $\mathcal{E}^\circ$.*

6.4.0. — Supposons $\mathcal{F}$ fibrée au-dessus de $\mathcal{E}$; choisissons pour tout morphisme f de $\mathcal{E}$ un foncteur changement de base au-dessus de f et soit

$$Q : \mathcal{F} \longrightarrow \varinjlim_{\mathcal{E}^\circ} \mathcal{F}$$

267 le foncteur canonique. Les foncteurs d'inclusions des fibres de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ composés avec le foncteur Q fournissent, pour tout objet ξ de $\mathcal{E}$, un foncteur

$$u_\xi : \mathcal{F}_\xi \longrightarrow \varinjlim_{\mathcal{E}} \mathcal{F}$$

et pour tout morphisme $f : \xi \to \eta$ de $\mathcal{E}$ un diagramme commutatif à isomorphisme canonique près :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_\eta \arrow[dd, "f^*"'] \arrow[dr, "u_\eta"] & \\
& \varinjlim_{\mathcal{E}^0} \mathcal{F} \\
\mathcal{F}_\xi \arrow[ur, "u_\xi"'] &
\end{tikzcd}$$

La catégorie $\varinjlim_{\mathcal{E}^\circ} \mathcal{F}$ apparaît alors comme la limite inductive *au sens des pseudo-foncteurs* [5] du pseudo-foncteur $\mathcal{E}^\circ \to \mathrm{Cat}$ qui associe à tout $\xi \in \mathrm{ob}$, $\mathcal{F}_\xi$ et à tout $f : \xi \to \eta$, le foncteur $f^* : \mathcal{F}_\eta \to \mathcal{F}_\xi$. On notera toute-fois que même lorsque $\xi \mapsto \mathcal{F}_\xi$ est un véritable foncteur, la catégorie $\varinjlim_{\mathcal{E}^\circ} \mathcal{F}$ n'est pas en général la limite inductive au sens de I 2 du foncteur $\xi \mapsto \mathcal{F}_\xi$ (cf. 6.8).

Proposition 6.4. — *Soit $\mathcal{F}$ une catégorie fibrée au-dessus de $\mathcal{E}$. On suppose que la catégorie $\mathcal{E}$ possède les propriétés suivantes :*

L1) *Tout diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[dr] & \\
& \cdot \\
\cdot \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

s'insère dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[dr] & \\
\cdot \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdot \\
 & \cdot \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

L2) *Pour tout couple de morphisme $u, v : \cdot \rightrightarrows \cdot$ tel qu'il existe un morphisme t vérifiant la relation $tu = tv$, il existe un morphisme w vérifiant la relation $uw = vw$.* **268**

(Notons que si la catégorie $\mathcal{E}^\circ$ est pseudo-filtrante (I 2.7), *elle possède les propriétés* L1) *et* L2)*). L'ensemble S des morphismes cartésiens de $\mathcal{F}$ possède alors les propriétés :*

Fr1) *L'ensemble S est stable par composition. Les isomorphismes appartiennent à S.*

Fr2) *Tout diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[dr] & \\
 & \cdot \\
\cdot \arrow[ur, "s"] &
\end{tikzcd},$$

où s appartient à S, peut se compléter en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[dr] & \\
\cdot \arrow[ur, "t"] \arrow[dr] & & \cdot \\
 & \cdot \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

où t appartient à S.

Fr3) *Pour tout couple de morphismes $u, v : \cdot \rightrightarrows \cdot$ tel qu'il existe un morphisme $s \in S$ vérifiant la relation $su = sv$, il existe un morphisme $t \in S$ tel que $ut = vt$.*

Preuve. — Laissée au lecteur à titre d'exercice.

Proposition 6.5. — *Soient $\mathcal{F}$ une catégorie, S un ensemble de morphismes de $\mathcal{F}$ possédant les propriétés* Fr1), Fr2) *et* Fr3) (6.4). *Pour tout objet X de $\mathcal{F}$, désignons par $S(X)$ la catégorie des morphismes de S de but X. La catégorie $S(X)$ est cofiltrante* (I 2.7). *La catégorie $\mathcal{F}(S^{-1})$ (qui représente le foncteur $\mathrm{Hom}_{S^{-1}}(\mathcal{F}, \cdot)$) peut alors se décrire comme suit :* **269**

a) *Les objets de $\mathcal{F}(S^{-1})$ sont les objets de $\mathcal{F}$.*

b) *Soient X et Y deux objets de $\mathcal{F}(S^{-1})$. On a*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(S^{-1})}(X, Y) = \varinjlim_{S(X)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(., Y).$$

c) *Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux morphismes de $\mathcal{F}(S^{-1})$. Soit*

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ X & Y \end{tikzcd} \qquad\qquad t \in S$$

(resp.

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, "t'"'] \arrow[dr, "g'"] & \\ Y & Z \end{tikzcd} \qquad\qquad t \in S)$$

un diagramme dans $\mathcal{F}$ dont l'image est f (resp. g). Soit

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, "t''"'] \arrow[dr, "f''"] & \\ \cdot \arrow[dr, "f'"'] & \cdot \arrow[d, "t'"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad\qquad t'' \in S$$

un diagramme commutatif dont l'existence est assurée par Fr2). L'image dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(S^{-1})}(X, Z)$ du diagramme

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, "tt''"'] \arrow[dr, "g'f''"] & \\ X & Z \end{tikzcd}$$

est le morphisme composé gf.

270 *Soit*

$$Q : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}(S^{-1})$$

le foncteur canonique.

d) *Le foncteur $Q^* : \mathcal{F}(S^{-1})\hat{} \to \mathcal{F}\hat{}$ ($F \mapsto F \circ Q$ I 5.0) est pleinement fidèle et injectif sur les objets.*

e) *Le foncteur $Q_! : \mathcal{F}\hat{} \to \mathcal{F}(S^{-1})\hat{}$ (adjoint à gauche au foncteur Q^* (I 5.1) est exact à gauche. (Il en est donc de même du foncteur Q lorsque dans $\mathcal{F}$ les limites projectives finies sont représentables).*

Preuve. — Nous renvoyons pour la preuve à [1].

Exercice 6.6. — Soient $\mathcal{F}$ une catégorie, S un ensemble de morphismes de $\mathcal{F}$ possédant les propriétés Fr1), Fr2) et Fr3). Pour tout objet X de $\mathcal{F}$, on note $S(X)$ la catégorie des morphismes de but X.

a) La catégorie $S(X)$ est cofiltrante (I 2)

b) Pour tout objet X de $\mathcal{F}$, désignons par $J_S(X)$ l'ensemble des cribles de X qui contiennent un crible engendré par un morphisme de S. Les $J_S(X)$ définissent sur $\mathcal{F}$ une topologie T.

c) Pour la topologie T, les morphismes de S sont bicouvrants (II 5.2).
d) Pour tout objet X de $\mathcal{F}$, désignons par $\mathcal{J}^2(X)$ la catégorie des morphismes bicouvrants de but X. Le catégorie $S(X)$ est cofinale dans $\mathcal{J}^2(X)$ (I 8).
e) Soit G un préfaisceau d'ensemble sur $\mathcal{F}$. Soit a le foncteur associé pour la topologie T. Pour tout objet X de $\mathcal{F}$, on a un isomorphisme canonique

$$aG(X) \xrightarrow{\sim} \frac{\lim}{S(X)} G(\cdot).$$

Un préfaisceau est un faisceau si et seulement s'il transforme tout morphisme de S en isomorphisme.
f) On choisit le foncteur faisceau associé de façon que sa restriction à $\mathcal{F}$ soit injective sur les objets. Désignons par $\underrightarrow{\mathcal{F}}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des faisceaux d'ensembles sur $\mathcal{F}$ définie par les faisceaux associés aux préfaisceaux représentés. La 271
catégorie $\underrightarrow{\mathcal{F}}$ est isomorphe à la catégorie $\mathcal{F}(S^{-1})$ décrite dans 6.5. Les objets de $\underrightarrow{\mathcal{F}}$ forment une famille de générateurs du topos $\mathcal{F}^\sim$ des faisceaux d'ensembles sur $\mathcal{F}$. La topologie induite sur $\underrightarrow{\mathcal{F}}$ par la topologie canonique de $\mathcal{F}^\sim$ est la topologie grossière (II 1.1.4).
g) Soit $Q : \mathcal{F} \to \underrightarrow{\mathcal{F}}$ le foncteur canonique. Le foncteur Q est un morphisme du site $\underrightarrow{\mathcal{F}}$ (topologie grossière) dans le site $\mathcal{F}$ (topologie T de b)) (IV 5.9) et induit un isomorphisme sur les topos correspondants.
h) Soit $u : \mathcal{F} \to C$ un foncteur. Le foncteur u est continu, si et seulement s'il transforme les morphismes de S en isomorphismes (III 1.1)
i) Soit $u : \mathcal{F} \to C$ un foncteur transformant les morphismes de S en isomorphismes. Le foncteur u se factorise d'une manière unique en

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "Q"'] & & C \\ & \underrightarrow{\mathcal{F}} \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

(On utilisera III 1.4).
j) Soit $\mathrm{Pro}_S \mathcal{F}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Pro}\,\mathcal{F}$ (I 8) définie par les proobjets dont les morphismes de transition sont dans S. Montrer que le foncteur Q se factorise en

$$\mathcal{F} \xhookrightarrow{\ i\ } \mathrm{Pro}_S \mathcal{F} \xrightarrow{\ j\ } \mathcal{F}_{S^{-1}}$$

où j est la restriction à $\mathrm{Pro}_S \mathcal{F}$ de $\mathrm{Pro}\,Q$. Montrer que le foncteur j admet un adjoint à gauche pleinement fidèle

$$A : \mathcal{F}_{S^{-1}} \longrightarrow \mathrm{Pro}_S \mathcal{F}.$$

Montrer que pour tout objet X de $\mathcal{F}$, $AQ(X)$ est le pro-objet

$$Y \longrightarrow X \in S(X) \mapsto Y.$$

Proposition 6.7. — *Soient $\mathcal{E}$ une catégorie cofiltrante (I 8.7) et $\mathcal{F} \to \mathcal{E}$ une catégorie fibrée* 272
(6.1.3).

1) *Soient ξ un objet de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}/\xi$ la catégorie fibrée sur $\mathcal{E}/\xi$ obtenue par le changement de base $\mathcal{E}/\xi \to \mathcal{E}$. Le foncteur canonique $\varinjlim_{\mathcal{E}/\xi} \mathcal{F}/\xi \to \varinjlim_{\mathcal{E}} \mathcal{F}$ est une équivalence de catégorie.*
2) *Soit plus généralement $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ un foncteur cofinal* (I 8). *Soit $\mathcal{F}' \to \mathcal{E}'$ la catégorie fibrée déduite de $\mathcal{F} \to \mathcal{E}$ par le changement de base $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E}$. Le foncteur canonique :*

$$\varinjlim_{\mathcal{E}'} \mathcal{F}' \longrightarrow \varinjlim_{\mathcal{E}} \mathcal{F}$$

est une équivalence de catégories.

Preuve. — Exercice.

Exercice 6.8. — 1) Soient $g : \mathcal{E}^\circ \to \mathrm{Cat}$ un foncteur et $\mathcal{G} \to \mathcal{E}$ la catégorie fibrée correspondante [5]. Montrer qu'il existe un foncteur canonique $\varinjlim_{\mathcal{E}^\circ} \mathcal{G} \to \varinjlim_{\mathcal{E}^\circ} g$. Montrer que ce foncteur n'est pas nécessairement une équivalence de catégories. (On pourra prendre pour g le foncteur constant dont la valeur est l'objet final de Cat et pour $\mathcal{E}$ la catégorie associée à un groupe).
2) On supposons que la catégorie $\mathcal{E}^\circ$ est pseudo-filtrante. Montrer qu'alors le foncteur canonique $\varinjlim_{\mathcal{E}^\circ} \mathcal{G} \to \varinjlim_{\mathcal{E}^\circ} g$ est une équivalence de catégories.

Proposition 6.9. — *Soit $\mathcal{F} \to \mathcal{E}$ une catégorie fibrée (6.1). Le foncteur* (Cat) $\to$ (Ens) *:*

$$C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cart}/\mathcal{E}}(C \times \mathcal{E}, \mathcal{F})$$

est représentable par la catégorie $\mathbf{Hom}_{\mathrm{Cart}/\mathcal{E}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Soient C une catégorie, $F : C \times \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un $\mathcal{E}$-foncteur cartésien (6.1.4), X un objet de C. Le foncteur $\xi \mapsto F((X, \xi))$ est un foncteur cartésien noté $F'(X)$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ qui dépend fonctoriellement de X. D'où une application $F \mapsto F'$ de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cart}/\mathcal{E}}(C\mathcal{E}, \mathcal{F})$ dans $\mathrm{Hom}(C, \mathbf{Hom}_{\mathrm{Cart}/\mathcal{E}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}))$ fonctorielle en C dont on vérifie immédiatement que c'est une bijection.

273 **6.10.** — La catégorie $\mathbf{Hom}_{\mathrm{Cart}/}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est appelée la catégorie des *sections cartésiennes* de la catégorie fibrée $\mathcal{F}$. Elle est aussi appelée parfois la catégorie *limite projective* de $\mathcal{F}$ suivant $\mathcal{E}^\circ$. Elle est alors notée $\varprojlim_{\mathcal{E}^\circ} \mathcal{F}$ [2].

6.11. — Choisissons un scindage de la catégorie fibrée $\mathcal{F} \to \mathcal{E}$, i.e. choisissons pour toute flèche $f : \xi \to \eta$ de $\mathcal{E}$ un foncteur changement de base $f^* : \mathcal{F}_\eta \to \mathcal{F}_\xi$. Pour tout objet ξ de $\mathcal{E}$, notons

$$v_\xi : \varprojlim_{\mathcal{E}^\circ} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_\xi$$

le foncteur d'évaluation en ξ. Pour tout morphisme $f : \xi \to \eta$, on a un diagramme de foncteurs commutatif à isomorphisme canonique près :

$$\begin{tikzcd} \varprojlim_{\mathcal{E}^\circ} \mathcal{F} \arrow[r, "v_\xi"] \arrow[dr, "v_\eta"'] & \mathcal{F}_\xi \arrow[d, "f^*"] \\ & \mathcal{F}_\eta . \end{tikzcd}$$

La catégorie $\varprojlim_{\mathcal{E}^\circ} \mathcal{F}$ apparaît ainsi comme la limite projective au *sens des pseudo foncteurs* de $\xi \to \mathcal{F}_\xi$. Même lorsque $\xi \mapsto \mathcal{F}_\xi$ est un véritable foncteur (i.e. même lorsque le scindage choisi est un clivage [5]) les catégories $\varprojlim_{\mathcal{E}^\circ} \mathcal{F}$ (6.10) et $\varprojlim_{\mathcal{E}^\circ} \mathcal{F}_\xi$ (I 2) ne sont pas, en général, équivalentes.

7. Topos et sites fibrés

7.1. Topos fibrés. —

Définition 7.1.1. — *Soit $\mathcal{U}$ un univers. Un $\mathcal{U}$-topos fibré sur une catégorie I est une catégorie fibrée sur I (6.1) :*

$$p : F \longrightarrow I$$

dont les fibres sont des $\mathcal{U}$-topos, et dont les foncteurs images inverses[(iii)] *relatifs aux morphismes $f : i \to j$ de I sont des foncteurs $f^* : F_j \to F_i$ images inverses de morphismes de topos $f_\bullet : F_i \to F_j$* (IV 3.1.2).

7.1.2. — Il revient au même de dire qu'un $\mathcal{U}$-topos fibré sur une catégorie I est une catégorie fibrée $p : F \to I$ dont les fibres sont des $\mathcal{U}$-topos et dont les foncteurs images inverses sont 274
exacts et commutent aux limites inductives (IV 1.6).

7.1.3. — Choisissons pour tout morphisme $f : i \to j$ de I un foncteur image inverse $f^* : F_j \to F_i$. On a alors, pour tout couple $i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k$ de morphismes composables de I, un isomorphisme canonique $c_{f,g} : f^* g^* \to (gf)^*$ (6.1.2.1) et les $c_{f,g}$ possèdent la propriété de cocycle (6.1.2.2). Choisissons de plus, pour tout $f : i \to j$ un foncteur adjoint à droite $f_* : F_i \to F_j$ au foncteur $f^* : F_j \to F_i$. Le foncteur $f_* : F_i \to F_j$ est défini à isomorphisme canonique près par sa propriété d'être adjoint à droite à f^*. On en déduit, par les résultats généraux sur les foncteurs adjoints, des isomorphismes canoniques ;

(7.1.3.1) $$c'_{g,f} : g_* f_* \longrightarrow (gf)_* .$$

qui possèdent une propriété de cocycle analogue à la propriété 6.2.2.2 et qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter. En appliquant alors les résultats de 6.1.3, on obtient une catégorie fibrée sur I° :

(7.1.3.2) $$p' : F' \longrightarrow I^\circ .$$

iii. pour la structure fibrée (6.1.2).

On vérifie facilement que la catégorie fibrée $p' : F' \to I^\circ$ ne dépend pas à I°-isomorphisme unique près des différents choix utilisés pour la construire[(iv)]. La fibre en tout objet i de I° de la catégorie fibrée $p' : F' \to I^\circ$ est canoniquement isomorphe au $\mathscr{U}$-topos F_i et est identifiée à ce dernier. Les foncteurs images inverses de la catégorie fibrée $p' : F' \to I^\circ$ sont des foncteurs *images directes* par des morphismes de topos.

7.1.4. — Soit $p : F \to I$ un $\mathscr{U}$-topos fibré. Choisissons pour chaque $f : i \to j$ un morphisme de topos (IV 3.1.2) $f\cdot : F_i \to F_j$ tel que le foncteur image inverse f^* (par $f\cdot$) soit l'image inverse pour la structure fibrés (6.1). On obtient alors des cocycles $c_{f,g}$ reliant ces morphismes de topos (7.1.3.1) et (7.1.3.2). La collection des morphismes $f.$, $f \in \mathrm{Fl}(I)$, et des cocycles $c_{f,g}$ est appelée un *biscindage* du topos fibré $F \to I$. Le choix d'un biscindage permet d'associer au topos fibré $F \to I$ un pseudo-foncteur $i \mapsto F_i$ de la catégorie I dans
275 la 2-catégorie des $\mathscr{U}$-topos. On peut alors lui associer de manière essentiellement unique (cf. [5]) un $\mathscr{U}$-topos fibré $F \to I$ muni d'un biscindage tel que le pseudo-foncteur correspondant soit canoniquement isomorphe à $i \mapsto F_i$. Dans la pratique on notera le plus souvent un $\mathscr{U}$-topos fibré $F \to I$ par la notation $(F_i)_{i \in I}$ en supposant implicitement qu'on a choisi un biscindage. On notera cependant que les constructions qu'on effectue sur les topos fibrés (telles que le topos total associé (7.4), la limite projective (8.1)) ne dépendent que des topos fibrés et non pas des biscindages éventuellement choisis.

Définition 7.1.5. — *Soient $p : F \to I$ et $q : G \to I$ deux $\mathscr{U}$-topos fibrés sur I. Un morphisme m de topos fibrés de (F,p) dans (G,q) consiste en la donnée d'un I-foncteur $m^* : G \to F$* (6.1.4) *et en la donnée pour tout i objet de I d'un adjoint à droite $m_{i*} : F_i \to G_i$ au foncteur $m_i^* : G_i \to F_i$ obtenu en restreignant aux fibres en i le foncteur m^*. Cette donnée doit être de plus soumise à la condition suivante : Pour tout objet i de I le couple de foncteurs adjoints (m_i^*, m_{i*}) est un morphisme du topos F_i dans le topos G_i.*

7.1.6. — Soient $m : (F,p) \to (G,q)$ un morphisme de $\mathscr{U}$-topos fibrés sur I et $p' : F' \to I^\circ$, $q' : G' \to I^\circ$ les catégories fibrées associées par le procédé 7.1.3 aux topos fibrés (F,p) et (G,q) respectivement. Choisissons des biscindages de F et G (7.1.4), notés dans les deux cas $(f : i \to j) \mapsto f. : (f^*, f_*)$, de F_i dans F_j et de G_i dans G_j respectivement. Comme $f^* : G \to F$ est un I-foncteur, on a, pour tout morphisme $f : i \to j$, un morphisme de foncteurs (morphisme de transition)

$$b_f : f^* m_j^* \longrightarrow m_i^* f^*, \tag{7.1.6.1}$$

et pour tout couple $i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k$ de morphismes composables, on a

$$m_i^*(c_{f,g}) b_f^* f^*(b_g) = b_{gf} c_{f,g}. \tag{7.1.6.2}$$

En passant aux foncteurs adjoints, on obtient des morphismes

$$b'_f : f_* m_{i*} \longrightarrow m_{j*} f_* \tag{7.1.6.3}$$

qui satisfont à des relations analogues aux relations (7.1.6.2). Comme les foncteurs f_*
276 sont des foncteurs images inverses des catégories fibrées (F', p') et (G', q') (7.1.3), on peut

iv. Le rédacteur présente ses excuses pour le caractère non intrinsèque de cette construction.

construire un I°-foncteur :

(7.1.6.4) $$m_* : F' \longrightarrow G',$$

dont les restrictions aux fibres sont les foncteurs m_{i*} et dont les isomorphismes de transition sont les b'_f. On vérifie avec un peu de patience que le foncteur m_* ainsi construit ne dépend pas du choix des morphismes de topos f.[v]

7.1.7. — On note $\mathrm{Homtop}_I(F,G)$ l'ensemble des morphismes de topos fibrés entre le topos fibré (F,p) et le topos fibré (G,q). L'ensemble $\mathrm{Homtop}_I(F,G)$ est l'ensemble des objets d'une catégorie notée $\mathbf{Homtop}_I(F,G)$: Si m et n sont deux morphismes de topos fibrés, un morphisme de m dans n est un I-morphisme de foncteur n^* dans le foncteur m^*. On en déduit d'ailleurs par adjonction un I°-morphisme du foncteur m_* dans le foncteur n_* (7.1.6). On a donc en définitive deux foncteurs

(7.1.7.1) $$\mathbf{Homtop}_I(F,G) \longrightarrow \mathbf{Hom}_I(G,F)^\circ$$

(7.1.7.2) $$\mathbf{Homtop}_I(F,G) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{I^\circ}(F',G')$$

qui associent à tout morphisme $(m^*, (m_{i*})_{i\in \mathrm{Ob}\, I})$, d'une part le foncteur $m^* \in \mathrm{Hom}_I(G,F)$, et d'autre part le foncteur $m_* \in \mathrm{Hom}_{I^\circ}(F',G')$ obtenu en recollant les m_{i*} comme en (7.1.6). Le foncteur $m^* : G \to F$ (7.1.7.1) est appelé le *foncteur image inverse* par le morphisme de topos fibré $m : F \to G$; le foncteur $m_* : F' \to G'$ (7.1.7.2) est appelé le *foncteur image directe* par le morphisme de topos fibré $m : F \to G$. Il résulte immédiatement des définitions que les foncteurs $m \mapsto m^*$ et $m \mapsto m_*$ sont *pleinement fidèles* et que leurs images essentielles sont, d'une part, l'ensemble des I-foncteurs de G dans F qui, fibre par fibre, sont exacts et commutent aux limites inductives et, d'autre part, l'ensemble des I^0-foncteurs de F' dans G' qui, fibre par fibre, sont exacts et commutent aux limites inductives et, d'autre part, l'ensemble des I^0-foncteurs de F' dans G' qui, fibre par fibre, possèdent un foncteur adjoint à gauche exact. Ceci justifie les abus de langage consistant à définir un morphisme de topos fibrés par son image directs ou son image inverse. En fait un tel morphisme de topos fibrés n'est alors défini qu'à isomorphisme unique près. 277

On note $\mathbf{Homtop}_{\mathrm{Cart}/I}(F,G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Homtop}_I(F,G)$ engendrée par les morphismes m tels que m_* (ou ce qui est équivalent m^*) soit un foncteur cartésien (6.1.4). De tels morphismes sont appelés des *morphismes cartésiens*. On a donc des foncteurs pleinement fidèles, induits par (7.1.7.1) et (7.1.7.2)

(7.1.7.3) $$\mathbf{Homtop}_{\mathrm{Cart}/I}(F,G) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/I}(G,F)^\circ,$$

(7.1.7.4) $$\mathbf{Homtop}_{\mathrm{Cart}/I}(F,G) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/I^\circ}(F',G').$$

7.1.8. — Soient $p : F \to I$, $q : G \to I$, $r : H \to I$ trois $\mathcal{U}$-topos fibrés sur I et $m : F \to G$, $n : G \to H$ deux morphismes de $\mathcal{U}$-topos fibrés. On définit comme en IV 3.3 le composé des deux morphismes m et n, qu'on note $nm : F \to H$, et si $\mathcal{V}$ est un univers tel que $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$, on définit une catégorie ($\mathcal{V}$-$\mathcal{U}$-$\mathrm{Top}_{/I}$) dont les objets sont les $\mathcal{U}$-topos fibrés sur I à catégories fibres éléments de $\mathcal{V}$, et dont les morphismes sont les morphismes de $\mathcal{U}$-topos fibrés sur I. De plus, comme en IV 3.3.2, l'application de composition

$$\mathrm{Homtop}_{/I}(F,G) \times \mathrm{Homtop}_{/I}(G,F) \longrightarrow \mathrm{Homtop}_{/I}(F,H)$$

v. voir note du bas de la page (page 112) est l'application induite sur les objets par un « foncteur de composition de morphismes » :

$$\mathbf{Homtop}_{/I}(F,G)\,\mathbf{Homtop}_{/I}(G,H) \longrightarrow \mathbf{Homtop}_{/I}(F,H)$$

et les considérations de IV 3.3 et IV 3.4 s'étendent sans changement au cas des U-topos fibrés. Le lecteur aura d'ailleurs remarqué que lorsque I est une catégorie ponctuelle (un objet, un morphisme identique) un $\mathscr{U}$-topos fibré sur I « n'est autre » qu'un morphisme de $\mathscr{U}$-topos, et un morphisme de $\mathscr{U}$-topos fibrés « n'est autre » qu'un morphisme de $\mathscr{U}$-topos et les constructions précédentes se réduisent à celles de IV 3.

7.1.9. — Soient $p : F \to I$ un $\mathscr{U}$-topos fibré et $\phi : J \to I$ un foncteur. La catégorie fibrée $p_J : F_J \to J$ déduite de (F,p) par le changement de base $\phi : J \to I$ est un $\mathscr{U}$-topos fibré sur J. Soient $p' : F' \to I^\circ$ et $(p_J)' : (F_J)' \to J^\circ$ les catégories fibrées déduites respectivement de (F,p) et (F_J,p_J) par la construction de 7.1.3. On vérifie immédiatement que la catégorie
278 $((F_J)',(p_J)')$ est canoniquement isomorphe à la catégorie $(p')_J : (F')_J \to J^\circ$ déduite de $p' : F' \to I^\circ$ par le changement de base $\phi : J^\circ \to I^\circ$. Ces deux catégories fibrées sur J° seront par la suite identifiées et notées $p'_j : F'_j \to J^\circ$. L'opération de changement de base est fonctorielle, et même 2-fonctorielle, par rapport à son argument : pour tout couple $p : F \to I$ et $G \to I$ de $\mathscr{U}$-topos fibrées sur I, on a deux diagrammes commutatifs se catégories et foncteurs :

(7.1.9.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Homtop}_I(F,G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Hom}_I(G,F)^\circ \arrow[d] \\
\mathbf{Homtop}_J(F_J,G_J) \arrow[r] & \mathbf{Hom}_J(G_J,F_J)^\circ,
\end{tikzcd}$$

(7.1.9.2)
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Homtop}_I(F,G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Hom}_{I^\circ}(F',G') \arrow[d] \\
\mathbf{Homtop}_J(F_J,G_J) \arrow[r] & \mathbf{Hom}_{J^\circ}(F'_{J^\circ},G_{J^\circ}),
\end{tikzcd}$$

où les foncteurs verticaux sont des foncteurs changement de base et où les foncteurs horizontaux sont respectivement dans (7.1.9.1) les foncteurs « morphisme $\mapsto$ image inverse » (7.1.7.1), et dans (7.1.9.2) les foncteurs « morphisme $\to$ image directe » (7.1.7.2).

7.2. Sites fibrés. —

7.2.1. — Un *$\mathscr{U}$-site fibré C* sur une catégorie I est une catégorie fibrée $p : C \to I$ dont les fibres sont munies de topologies faisant de celles-de des $\mathscr{U}$-sites (IV 3.0.2) telles que pour tout morphisme $f : i \to j$ de I, le foncteur image inverse $f^* : C_j \to C_i$ soit un morphisme de site C_i dans le site C_j (IV 4.9.1).

7.2.2. — Soient $p : C \to I$ et $q : D \to I$ deux $\mathscr{U}$-sites fibrés sur I. Un *morphisme de $\mathscr{U}$-sites fibrée de C dans D* est un I-foncteur (6.0) $m : D \to C$ tel que pour tout objet i de I, le foncteur $m_i : D_i \to C_i$ soit un morphisme du site C_i dans le site D_i. On désigne par $\mathrm{Morsite}_I(C,D)$ l'ensemble des morphismes de sites fibrés de C dans D. *Un foncteur continu du site fibré D dans le site fibré C* est un I-foncteur de D dans C qui induit sur les fibres des foncteurs continus (III 1). On note $\mathrm{Cont}_I(D,C)$ l'ensemble des foncteurs continus du

site fibré $\boldsymbol{D}$ dans le site fibré $\boldsymbol{C}$. On désigne par $\mathbf{Morsite}_I(C, D)$ la sous-catégorie pleine de 279
$\mathbf{Hom}_I(D, C)^\circ$ définie par l'ensemble d'objets $\mathrm{Morsite}_I(C, D) \subset \mathrm{Hom}_I(D, C)$. On désigne de même par $ont_I(D, C)$, la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Hom}_I(D, C)$ définie par le sous-ensemble d'objets $ont_I(D, C) \subset \mathrm{Hom}_I(D, C)$. On a donc deux foncteurs pleinement fidèles et injectifs sur les objets

(7.2.2.1) $$\mathbf{Morsite}_I(C, D) \hookrightarrow ont_I(D, C)^\circ \hookrightarrow \mathbf{Hom}_I(D, C)^\circ.$$

On définit, de même qu'en 7.1.7, les morphismes *cartésiens* du site fibré $\boldsymbol{C}$ dans le site fibré $\boldsymbol{D}$. On a un diagramme de sous-catégories pleines

(7.2.2.2) $$\begin{tikzcd} \mathbf{Morsite}_{\mathrm{Cart}/I}(C, D) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathbf{Hom}_{\mathrm{Cart}/I}(D, C)^\circ \arrow[d, hook] \\ \mathbf{Morsite}_I(C, D) \arrow[r, hook] & \mathbf{Hom}_I(D, C)^\circ. \end{tikzcd}$$

7.2.3. — Les morphismes de $\mathscr{U}$-sites fibrés se composent. Ceci permet de définir la catégorie ($\mathscr{V}$-$\mathscr{U}$-Site/$\boldsymbol{I}$) dans les objets sont les $\mathscr{U}$-sites dont les fibres appartiennent à un univers $\mathscr{V}$ (dont $\mathscr{U}$ est un élément). La catégorie $\mathscr{V}$-$\mathscr{U}$-site est d'ailleurs munie d'une structure de 2-catégorie et en particulier la composition des morphismes de $\mathscr{U}$-sites fibrés est fonctorielle par rapport aux morphismes entre morphismes. Pour tout foncteur $\phi : J \to I$ et tout site fibré $p : C \to I$, la catégorie $p_J : C_J \to J$ déduite de (C, p) par le changement de base $\phi : J \to I$, est munie canoniquement d'une structure de $\mathscr{U}$-site fibré sur $\boldsymbol{J}$. L'opération de changement de base est 2-fonctorielle.

7.2.4. — Soit $p : C \to I$ une catégorie fibrée dont les fibres sont munies de topologies faisant de celles-ci des $\mathscr{U}$-sites. Supposons que les limites projectives soient représentables dans les catégories fibrées. Pour que $p : C \to I$ soit un $\mathscr{U}$-site fibré il suffit que les foncteurs images inverses soient exacts à gauche et transforment familles couvrantes en familles couvrantes, et cette condition est aussi suffisante lorsque les topologies des fibres sont moins fines que la topologie canonique (IV 4.9.2). Tous les sites fibrés utilisés dans ce séminaire seront du type décrit ci-dessus. De même, soient $p : C \to I$ et $q : D \to I$ deux sites fibrés tels que les limites projectives finies dans les catégories fibres soient représentables. Un foncteur 280
cartésien $m : D \to C$ qui induit sur les catégories fibres des foncteurs exacts à gauche et qui transforme les familles couvrantes des catégories fibres en familles couvrantes est un morphisme de sites fibrés de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{D}$, la réciproque étant vraie si les topologies fibres de $\boldsymbol{C}$ sont moins fines que la topologies canonique (IV 4.9.2). Tous les morphismes de sites fibrés utilisés dans ce séminaire seront du type décrit ci-dessus.

7.2.5. — Un $\mathscr{U}$-topos fibré $p : F \to I$ est un $\mathscr{U}$-site fibré lorsqu'on munit les fibres de la topologie canonique, ce que nous ferons toujours par la suite. Soit $m : F \to G$ un morphisme de $\mathscr{U}$-topos fibrés. Le foncteur image inverse $m^* : G \to F$ (7.1.7) est un morphisme du $\mathscr{U}$-site fibré $\boldsymbol{F}$ dans le $\mathscr{U}$-site fibré $\boldsymbol{G}$. On a donc un foncteur ($\mathscr{V}$-$\mathscr{U}$- $\mathrm{Top}_{/I}$) $\to$ ($\mathscr{V}$-U- $\mathrm{Site}_{/I}$), foncteur qui n'est pas fidèle en général. Mais ce foncteur de prolonge en fait naturellement en un 2-foncteur qui induit, pour deux $\mathscr{U}$-topos fibrés $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ sur $\boldsymbol{I}$, un foncteur :

(7.2.5.1) $$\mathbf{Homtop}_I(F, G) \longrightarrow \mathbf{Morsite}_I(F, G)$$

qui est une *équivalence de catégories*, ainsi qu'il résulte immédiatement des définitions. D'ailleurs le foncteur (7.2.5.1) composé avec l'inclusion canonique $\mathbf{Morsite}_I(F,G) \hookrightarrow \mathbf{Hom}_I(G,F)^\circ$ n'est autre que le foncteur (7.1.7.1) qui, à un morphisme de topos fibrés, associe son image inverse.

7.2.6. — Soit $p : C \to I$ un $\mathscr{U}$-site fibré. Choisissons pour tout morphisme $f : i \to j$ de I un foncteur changement de base $f^* : C_i \to C_i$. En passant aux catégories de $\mathcal{U}$-faisceaux, le foncteur f^* de prolonge en un foncteur $\mathrm{Top}(f)^* : C_j^\sim \to C_i^\sim$, où $\mathrm{Top}(f) : C_i^\sim \to C_j^\sim$ est un morphisme de topos (IV 4.9.1.1), rendant commutatif à isomorphisme près le diagramme :

(7.2.6.1)
$$\begin{tikzcd} C_j \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\varepsilon_j"'] & C_i \arrow[d, "\varepsilon_i"] \\ C_j^\sim \arrow[r, "\mathrm{Top}(f)^*"] & C_i^\sim \end{tikzcd}$$

Soient

(7.2.6.2)
$$c_{f,g} : f^* g^* \longrightarrow (gf)^*$$

281 les isomorphismes canoniques (6.1.2.1) et

(7.2.6.3)
$$b_f : \mathrm{Top}(f)^* \epsilon_j \longrightarrow \epsilon_i f^*$$

les isomorphismes qui « rendent commutatifs » les diagrammes (7.2.6.1). En utilisant le fait que les foncteurs $\mathrm{Top}(f)^*$ commutent aux limites inductives, on vérifie immédiatement que pour tout couple de morphismes composables : $i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k$, il existe un et un seul isomorphisme :

(7.2.6.4)
$$\mathrm{Top}(c_{f,g}) : \mathrm{Top}(f)^* \,\mathrm{Top}(g)^* \longrightarrow \mathrm{Top}(gf)^*$$

tel qu'on ait

(7.2.6.5)
$$\epsilon_i(c_{f,g}) b_f \,\mathrm{Top}(f)^*(bg) = b_{gf} \,\mathrm{Top}(c_{f,g}).$$

De plus, les isomorphismes (7.2.6.4) satisfont automatiquement la condition de cocycles de 6.2.2.2. On peut donc construire une catégorie fibrée

(7.2.6.6)
$$p^\sim : C^{\sim/I} \longrightarrow I$$

dont les fibres sont canoniquement isomorphes aux $\mathscr{U}$-topos $C_i^\sim$ (6.1.3), et un foncteur cartésien

(7.2.6.7)
$$\epsilon_{c/I} : C \longrightarrow C^{\sim/I}$$

qui induit sur les fibres les foncteurs $\epsilon_i : C_i \to C_i^\sim$. Il résulte immédiatement des définitions que $p^\sim : C^{\sim/I} \to I$ est un $\mathscr{U}$-topos fibré sur I, que $\epsilon_{c/I}$ est un morphisme cartésien de $\mathscr{U}$-sites fibrés de $C^{\sim/I}$ dans C, et que le $\mathscr{U}$-topos fibré $C^{\sim/I} \to I$ et le foncteur cartésien $\epsilon_{C/I}$ ne dépendent pas, à isomorphisme canonique prés, des différents choix utilisés pour les construire (choix des foncteurs changement de base f^* et choix des prolongements $\mathrm{Top}(f)^*$). Le $\mathscr{U}$-topos fibré $C^{\sim/I}$ est appelé le *$\mathscr{U}$-topos fibré associé* au $\mathscr{U}$-site fibré.

7.2.6.8. — On vérifie que la formation du $\mathscr{U}$-topos fibré associé à un site fibré « commute » aux opérations de changement de catégorie base.

Proposition 7.2.7. — *Soient E un $\mathscr{U}$-topos fibré sur I et C un $\mathscr{U}$-site fibré sur I. Le foncteur $m \mapsto m^*\epsilon_{C/I}$, associant à tout morphisme de topos fibrés $m : E \to C^{\sim/I}$ le composé avec $\epsilon_{C/I}$ du foncteur image inverse associé $m^* : C^{\sim/I} \to E$, induit une équivalence de catégories préservant les objets cartésiens* 282

$$\mathbf{Homtop}_I(E, C^{\sim/I}) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Morsite}_I(E, C).$$

Lorsque dans les catégories fibres de C les limites projectives finies sont représentables, le foncteur pleinement fidèle correspondant

$$\mathbf{Homtop}_I(E, C^{\sim/I}) \longrightarrow \mathbf{Hom}_I(C, E)^\circ$$

a comme image essentielle l'ensemble des I-foncteurs $g : C \to E$ qui sont exacts à gauche fibre par fibre et qui transforment les familles couvrantes des catégories fibres en familles épimorphiques des catégories fibres correspondantes.

Cette proposition ne fait que généraliser au contexte fibré la proposition IV 4.9.4, et la démonstration donnée en IV 4.9.4 se généralise immédiatement.

7.3. Exemple. —

Exemple 7.3.1. — (*le topos fibré des morphismes d'un topos*)

Soient E un $\mathscr{U}$-topos, $\mathrm{Fl}(E)$ la catégorie des morphismes de E et $p : \mathrm{Fl}(E) \to E$ le foncteur qui associe à un morphisme son but. La catégorie $(\mathrm{Fl}(E), p)$ est un $\mathscr{U}$-topos fibré sur E. (7.1.1 et IV 5.1). La fibre en tout objet X de E est le topos $E_{/X}$. Le foncteur image inverse $f^* : E_{/Y} \to E_{/X}$ par un morphisme $f : X \to Y$ est le foncteur produit fibré. À tout foncteur $\phi : I \to E$, on peut donc associer le $\mathscr{U}$-topos fibré sur I

$$p_I : \mathrm{Fl}(E)_I \longrightarrow I, \tag{7.3.1.1}$$

obtenu par le changement de base $\phi : I \to E$, dont la fibre en tout objet i de I est $E_{/\phi(i)}$ (7.1.9). Si $\mathscr{V}$ est un univers dont E est un élément, on a, avec les notations de 7.1.8, une application

$$\mathrm{Hom}(I, E) \longrightarrow \mathrm{ob}(\mathscr{V}\text{-}\mathscr{U}\text{-top}_{/I}), \tag{7.3.1.2}$$

qui associe à tout foncteur $\phi \in \mathrm{Hom}(I, E)$ le $\mathscr{U}$-topos fibré sur I déduit de $(\mathrm{Fl}(E), p)$ par le changement de base $\phi : I \to E$. Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux foncteurs de I dans E et $m : \phi_1 \to \phi_2$ un morphisme de foncteurs. Notons $p_1 : \mathrm{Fl}(E)_1 \to I$ et $p_2 : \mathrm{Fl}(E)_2 \to I$ les $\mathscr{U}$-topos fibrés sur I déduits de $p : \mathrm{Fl}(E) \to E$ par les changements de base $\phi_1 : I \to E$ et $\phi_2 : I \to E$ respectivement. Choisissons, pour tout objet i de I, un morphisme de topos (IV 5.5.2) 283

$$\mathrm{loc}(m(i)) : E_{/\phi_1(i)} \longrightarrow E_{/\phi_2(i)}. \tag{7.3.1.3}$$

On vérifie alors facilement qu'il existe un et un seul[(vi)] morphisme cartésien de topos fibrés sur I :

$$\mathrm{loc}(m) : F1(E)_1 \longrightarrow F1(E)_2, \tag{7.3.1.4}$$

vi. l'unicité provient de ce qu'on exige, avec les notations de (IV 5.5.3), la formule : $(gf)_! = g_! f_!$.

qui induise sur les topos fibrés les morphismes $\operatorname{loc}(m(i))$. Le morphisme $\operatorname{loc}(m) : \mathrm{Fl}(E)_1 \to \mathrm{Fl}(E)_2$ est déterminé à isomorphisme canonique près par le morphisme de foncteurs $m : \phi_1 \to \phi_2$. Si $n : \phi_2 \to \phi_3$ est un morphisme de foncteurs, on a un isomorphisme

(7.3.1.5) $$c(m,n) : \operatorname{loc}(n)\operatorname{loc}(m) \simeq \operatorname{loc}(nm),$$

et les morphismes $c(m,n)$ possèdent une propriété de cocycle analogue à (6.1.2.2).

Exemple 7.3.2. — (Le site fibré des morphismes d'un site).

Soient C un $\mathcal{U}$-site où *les produits fibrés sont représentables*, $\mathrm{Fl}(C)$ la catégorie des morphismes de C et $p : \mathrm{Fl}(C) \to C$ le foncteur qui associe à un morphisme son but. La catégorie fibrée $(\mathrm{Fl}(C), p)$ est un $\mathcal{U}$-site fibré sur C lorsqu'on munit les catégories fibres des topologies induites (II 5.2). Soient $\epsilon_C : C \to C^{\sim}$ le foncteur canonique de C dans la catégorie des $\mathcal{U}$-faisceaux sur C. En notant $\mathrm{Fl}(\epsilon_C)$ l'extension naturelle de ce dernier foncteur aux catégories de morphismes, on a un diagramme commutatif de catégories et foncteurs :

(7.3.2.1)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fl}(C) \arrow[r, "\mathrm{Fl}(\varepsilon_C)"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{Fl}(C^{\sim}) \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, "\varepsilon_C"] & C^{\sim} \end{tikzcd}$$

284 d'où un foncteur cartésien entre catégories fibrée sur C :

(7.3.2.2)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fl}(C) \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & \mathrm{Fl}(C^{\sim})_C \arrow[dl, "p_{/C}"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

où $p_{/C} : \mathrm{Fl}(C^{\sim})_C \to C$ est déduite de $\mathrm{Fl}(C^{\sim}) \to C^{\sim}$ par le changement de base $\epsilon_C : C \to C^{\sim}$. Le foncteur $\mathrm{Fl}(C) \to \mathrm{Fl}(C^{\sim})_C$ de (7.3.2.2) est un morphisme du site fibré $\mathrm{Fl}(C^{\sim})_C$ dans le site fibré $\mathrm{Fl}(C)$ (7.2.2), d'où par 7.2.7 un morphisme de topos fibrés sur C :

(7.3.2.3) $$\mathrm{can} : \mathrm{Fl}(C^{\sim})_C \longrightarrow \mathrm{Fl}(C)^{\sim/C},$$

où $\mathrm{Fl}(C)^{\sim/C}$ est le topos fibré sur C associé au site fibré $\mathrm{Fl}(C) \to C$ (7.2.6). Il résulte de la définition du topos fibré associé (7.2.6) et de II 5.5 que le morphisme can de (7.3.2.3) est une C-équivalence de $\mathcal{U}$-topos fibrés sur C, i.e. il existe un morphisme $\Theta : \mathrm{Fl}(C)^{\sim/C} \to \mathrm{Fl}(C^{\sim})_C$ de $\mathcal{U}$-topos fibrés sur C tel que les composés $\Theta \circ \mathrm{can}$ et $\mathrm{can} \circ \Theta$ soient C-isomorphes à l'identité.

Soit $\phi : I \to C$ un foncteur. On en déduit par changement de base un site fibré sur I :

(7.3.2.4) $$p_I : \mathrm{Fl}(C)_I \longrightarrow I$$

et comme la formation du topos fibré associé commute au changement de base (7.2.6), on a une I-équivalence de $\mathcal{U}$-topos fibrés

(7.3.2.5) $$\mathrm{can}_I : \mathrm{Fl}(C^{\sim})_I \longrightarrow \mathrm{Fl}(C)_I^{\sim/I}$$

où $\mathrm{Fl}(C^{\sim})_I \to I$ est le $\mathcal{U}$-topos fibré obtenu par le changement de base $\epsilon_C \circ \phi : \to C^{\sim}$.

Soient enfin $\phi_1 : I \to C$ et $\phi_2 : I \to C$ deux foncteurs et $m : \phi_1 \to \phi_2$ un morphisme de foncteurs. Notons $\mathrm{Fl}(C)_1$ et $\mathrm{Fl}(C)_2$ les sites fibrés sur I déduits de $p : \mathrm{Fl}(C) \to C$ par les changements de base ϕ_1 et ϕ_2 respectivement. On construit comme en 7.3.1 un morphisme de sites fibrés sur I :

(7.3.2.6) $$\mathrm{loc}(m) : \mathrm{Fl}(C)_1 \longrightarrow \mathrm{Fl}(C)_2.$$

Notons $\mathrm{Fl}(C^\sim)_1 \to I$ et $\mathrm{Fl}(C^\sim)_2 \to I$ les $\mathscr{U}$-topos fibrés sur I obtenus par les changements 285
de base $\epsilon_C \circ \phi_1$ et $\epsilon_C \circ \phi_2$ respectivement. On a un diagramme commutatif à isomorphisme près de morphismes sur I :

(7.3.2.7)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fl}(C^\sim)_1 \arrow[r, "\mathrm{loc}(\varepsilon_C * m)"] \arrow[d] & \mathrm{Fl}(C^\sim)_2 \arrow[d] \\
\mathrm{Fl}(C)_1 \arrow[r, "\mathrm{loc}(m)"] & \mathrm{Fl}(C)_2
\end{tikzcd}$$

où les morphismes verticaux se déduisent par changement de base des morphismes de (7.3.2.2).

Exercice 7.3.3. — (*Petit site et gros site fibrés*).

Cet exercice est une suite à l'exercice IV 4.10.6 dont on utilise les hypothèses et les notations. On note $\mathbf{M}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fl}(S)$ définie par les morphismes de $\mathscr{M}$, et $p : \mathbf{M} \to S$ le foncteur qui associe à un morphisme son but.

6°) Montrer que $(\mathbf{M}, p)$ est un site fibré sur S et que, lorsque dans S les produits fibrés sont représentables, le foncteur d'inclusion $\mathbf{M} \to \mathrm{Fl}(S)$ est un morphisme cartésien du site fibré $\mathrm{Fl}(S) \to S$ dans le site fibré $\mathbf{M} \to S$.

7°) Soit $\mathbf{M}^{\sim/S} \to S$ le topos fibré associé à $\mathbf{M} \to S$. Montrer qu'on a avec les notations de 7.3.2, un morphisme canonique $g : \mathrm{Fl}(S^\sim)_{/S} \to \mathbf{M}^{\sim/S}$ de topos fibrés sur S qui induit sur chaque fibre en $X \in \mathrm{ob}(S)$ le morphisme $(\mathrm{Prol}_X, \mathrm{Res}_X)$ (IV 4.10.6 4°)). Montrer que, bien que pour tout $X \in \mathrm{ob}(S)$ le morphisme $g_X : S^\sim_{/X} \to S(X)^\sim$ admette une section (*loc. cit.*), le morphisme g n'admet pas en général de section.

7.4. La topologie totale d'un topos ou d'un site fibré. —

Définition 7.4.1. — *Soit $p : C \to I$ un $\mathscr{U}$-site fibré et pour tout $i \in \mathrm{ob}(I)$, notons $\alpha_{i!} : C_i \to C$ le foncteur d'inclusion de la catégorie fibre C_i dans C. On appelle* topologie totale *sur C la topologie la moins fine sur C qui rende continu les foncteurs $\alpha_{i!}$ pour $i \in$* ob (I) (III 3.6)*. On appelle* site total *la catégorie C munie de la topologie totale.*

Proposition 7.4.2. — *Soient $p : C \to I$ un $\mathscr{U}$-site fibré, T la topologie totale sur C et pour* 286
tout $i \in \mathrm{ob}(I)$, T_i la topologie de la fibre C_i.

1) *Soit X un objet de C au-dessus d'un objet i de I. Une famille $(X_\beta \to X)_{\beta \in B}$ est couvrante pour T si et seulement si elle est raffinée par une famille couvrante pour $T_i (Y_\gamma \to X)_{\gamma \in \Gamma}$ de C_i.*
2) *La topologie T induit sur les catégories C_i, les topologies T_i.*
3) *Pour tout $i \in \mathrm{ob}(I)$, le foncteur $\alpha_{i!} : C_i \to C$ est cocontinu.*

7.4.2.1. — La propriété 3) résulte de 1) et de III 2.1. Démontrons 1). Soit, pour tout objet X de C, $J(X)$ l'ensemble des cribles de C/X décrits dans 1). On vérifie que les $J(X)$ possèdent les propriétés $T\,1)$, $T\,2)$, $T\,3$ de II 1.1, et qu'ils définissent par suite une topologie T' sur C. La topologie T' est la moins fine des topologies sur C pour lesquelles les familles couvrantes pour les topologies T_i sont couvrantes. La topologie T' est donc moins fine que T (III 1.6). Pour montrer que $T' = T$, il suffit donc de montrer que pour tout objet i de I, le foncteur $\alpha_{i!} : C_i \to C$ est continu lorsqu'on munit C de la topologie T' ; ou encore, il suffit de montrer que la topologie induite par T' sur la catégorie C_i est la topologie T_i, ce qui démontrera en même temps la propriété 2). Soit T_i' la topologie sur C_i induite par T', et $u : R \hookrightarrow X$ un crible couvrant pour T_i'. D'après III 3.2 le morphisme $\alpha_{i!}(u) : \alpha_{i!}(R) \to \alpha_{i!}(X)$ est bicouvrant et en particulier couvrant, ce qui revient à dire, d'après la définition de T', que le crible $R \hookrightarrow X$ est couvrant pour T_i. La topologie T_i' est donc moins fine que T_i, et pour démontrer que T_i' est plus fine que T_i, il suffit, par définition de la topologie induite (III 3.1), de montrer que le foncteur $\alpha_{i!} : C_i \to C$ est continu lorsqu'on munit les catégories C_i et C des topologies T_i et T' respectivement. En résumé, pour démontrer les propriétés 1) et 2), il suffit, via III 1.2 et 1.5, de démontrer le lemme suivant :

Lemme 7.4.2.2. — *Avec les hypothèses et notations de 7.4.2 et 7.4.2.1, soient X un objet de C au-dessus de i et $R \xrightarrow{u} X$ un morphisme de $\hat{C_i}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

287 i) *Le morphisme $R \to X$ est bicouvrant pour T_i.*
ii) *Le morphisme $\alpha_{i!}(u) : \alpha_{i!}(R) \to \alpha_{i!}(X)$ est bicouvrant pour T'.*

i) $\Rightarrow$ ii) : Il est clair que si $R \to X$ est bicouvrant pour T_i, le morphisme $\alpha_{i!}(u)$ est couvrant pour T'. Il reste à montrer qu'il est bicouvrant (II 5.2). Soit Y un objet de C au-dessus d'un objet j de I, m et n $n : Y \rightrightarrows \alpha_{i!}(R)$ deux morphismes de $\hat{C}$ tels que $\alpha_{i!}(u)m = \alpha_{i!}(u)n$, et posons $f = p(\alpha_{i!}(u)m)$. Comme le foncteur $\alpha_{i!}$ commute aux limites inductives (I 5.4.3)), on a (I 3.4) :

$$\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(Y, \alpha_{i!}(R)) \simeq \varinjlim_{C_i/R} \mathrm{Hom}_C(Y, \alpha_{i!}(.)).$$

Comme pour tout objet Z de C_i, on a avec les notations de 6.1.1 :

$$\mathrm{Hom}_C(Y, Z) \simeq \coprod_{w \in \mathrm{Hom}(j,i)} \mathrm{Hom}_w(Y, Z),$$

on en déduit

$$\varinjlim_{C_i/R} \mathrm{Hom}(Y, \alpha_{i!}(.)) \simeq \coprod_{w \in \mathrm{Hom}(j,i)} \varinjlim_{C_i/R} \mathrm{Hom}_w(Y, \alpha_{i!}(.)).$$

Mais pour tout $w \in \mathrm{Hom}(j, i)$, on a un foncteur image inverse $w^* : C_i \to C_j$, et on a $\mathrm{Hom}_w(Y, \alpha_{i!}(.)) \simeq \mathrm{Hom}_{C_j}(Y, w^*(.))$. D'où en notant encore $w^* : \hat{C_i} \to \hat{C_j}$ le prolongement de w^* aux préfaisceaux (qu'on devrait noter d'après I 5.4 $(w^*)_!$) et en remarquant que le foncteur $w^* : \hat{C_i} \to \hat{C_j}$ commute aux limites inductives (I 5.4.3)), on obtient un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(Y, \alpha_{i!}(R)) = \coprod_{w \in \mathrm{Hom}(j,i)} \mathrm{Hom}_{\hat{C_j}}(Y, w^*(R)).$$

Dans cet isomorphisme, les morphismes m et $n : Y \rightrightarrows \alpha_{i!}(R)$ correspondent à deux morphismes m' et $n' : Y \rightrightarrows f^*R$ tels que $f^*(u)m' = f^*(u)n'$. Comme le foncteur image inverse est un morphisme de topos, il est en particulier continu et par suite $f^*(u)$ es bicouvrant (III 3.2). Il existe donc une famille couvrante de C_j $(Y_\delta \xrightarrow{V_\delta} Y)_\delta$ telle que pour tout δ on ait $m'v_\delta = n'v_\delta$. On en déduit que $mv_\delta = nv_\delta$ pour tout δ, et par suite que $\alpha_{i!}(u)$ est bicouvrant pour T'.

ii) ⇒ i) : Supposons que $\alpha_{i!}(R) \xrightarrow{\alpha_{i!}(u)} \alpha_{i!}(X)$ soit bicouvrant. Le foncteur $\alpha_{i!} : C_i \to C$ 288
est cocontinu (III 2.1). Par suite $\alpha_i^*\alpha_{i!}(u)$ est bicouvrant (III 2.3.2) et (II 5.3 ii)). Le foncteur $\alpha_{i!} : C_i \to C$ possède la propriété (PPF) de I 5.14. Par suite on a diagramme cartésien des $\hat{C_i}$ (I 5.14 3)) :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \alpha_i^*\alpha_{i!}(R) \arrow[d, "\alpha_i^*\alpha_{i!}(u)"] \\ X \arrow[r] & \alpha_i^*\alpha_{i!}(X). \end{tikzcd}$$

Par suite, u est bicouvrant (II 5.2).

Remarque 7.4.3. — 1) La proposition 7.4.2 peut s'énoncer et se démontrer dans un cadre un peu plus général que celui des sites fibrés, mais apparemment sans intérêt : au lieu d'un site fibré $p : C \to I$, on considère une catégorie fibrée $p : C \to I$ dont les fibres sont munies de topologies et dont les foncteurs images inverses sont continus pour ces topologies (alors que dans le cas des sites fibrés on exige de plus que ces foncteurs images inverses soient des morphismes de sites (IV 4.9)).

2) On peut démontrer que la topologie totale d'un site fibré est la topologie la plus fine rendant cocontinus les foncteurs $\alpha_{i!} : C_i \to C$ (III 2).

3) Soit $p : C \to I$ un $\mathcal{U}$-site fibré au-dessus d'une catégorie équivalent à une catégorie $\mathcal{U}$-petite. Alors le site total C est un $\mathcal{U}$-site (II 3.0.2). En effet, si pour tout objet i de I $(X_\beta)_{\beta\in B_i}$ est une petite famille topologiquement génératrice de C_i, la famille $(X_\beta)_{\beta\in\amalg_i B_i}$ est topologiquement génératrice pour C et est $\mathcal{U}$-petite. On appelle *Topos total* et on note $\mathrm{Top}(C)$ le topos des faisceaux sur le site total.

4) Soit $p : C \to I$ un $\mathcal{U}$-site fibré sur une petite catégorie. Comme le foncteur $\alpha_{i!} : C_i \to C$ est cocontinu, il donne naissance à un morphisme de topos $\alpha_i = (\alpha_i^*, \alpha^{i*})$ de $C_i^\sim$ dans $\mathrm{Top}(C)$ (IV 4.7). Comme de plus le foncteur $\alpha_{i!} : C_i \to C$ est continu, le foncteur $\alpha_i^* : \mathrm{Top}(C) \to C_i^\sim$ admet un adjoint à gauche noté encore $\alpha_{i!} : C_i^\sim \to \mathrm{Top}(C)$ qui 289
prolonge le foncteur $\alpha_{i!} : C_i \to C$ (III 1.2 iv)).

Proposition 7.4.4. — *Soit $p : C \to I$ un $\mathcal{U}$-site fibre sur une petite catégorie I.*

1) *Un préfaisceau F sur C est un faisceau pour la topologie totale si et seulement si pour tout objet i de I, le préfaisceau $F \circ \alpha_{i!} = F|C_i$ est un faisceau sur C_i.*

2) *Un foncteur m de C dans un site D est un foncteur continu du site total C dans le site D si et seulement si pour tout objet i de I le foncteur $m|C_i = m \circ \alpha_{i!} : C_i \to D$ est continu.*

Si F est un faisceau pour la topologie totale, le préfaisceau $F \circ \alpha_{i!}$ est un faisceau sur C_i car $\alpha_{i!} : C_i \to C$ est continu. Supposons que pour tout i, $F \circ \alpha_{i!}$ soit un faisceau sur C_i. Soit X un objet de C au-dessus d'un objet i de I. Pour tout crible couvrant R de C_i/X, on a $F(X) \simeq F \circ \alpha_{i!}(R)$ et par suite $F(X) \simeq F(\alpha_{i!}(R))$. Soit $R' \hookrightarrow X$ le crible de C/X

image du morphisme canonique de préfaisceaux $\alpha_{i!}(R) \to X$. Le morphisme $\alpha_{i!}(R) \to R'$ est un épimorphisme de préfaisceaux et par suite $F(R') \to F(\alpha_{i!}(R))$ est injectif. Comme $F(R') \to F(\alpha_{i!}(R))$ est aussi surjective, l'application $F(R') \to F(\alpha_{i!}(R))$ est bijective, et par suite l'application $F(X) \to F(R')$ est bijective. Comme les cribles couvrants X (7.4.2.1)), le préfaisceau F est un faisceau, car en revenant à la construction du faisceau associé (II 3) on constate que F est isomorphe à son faisceau associé (II 3.3). La deuxième assertion se déduit immédiatement de la première et de la définition de la continuité (III 1.1).

7.4.5. — Soient $p : C \to I$ un $\mathscr{U}$-site fibré sur une catégorie I équivalente à une petite catégorie et

$$f : i \longrightarrow j$$

une flèche de la catégorie d'indices I. En notant encore $f : C_i^\sim \to C_j^\sim$ le morphisme de topos déterminé par la structure de site fibré, on a (avec les notations de 7.4.3.4) un diagramme de morphismes de $\mathscr{U}$-topos

(7.4.5.1)
$$\begin{tikzcd} C_i^\sim \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Top}(C) \\ C_j \arrow[ur, "\alpha_j"'] & \end{tikzcd}$$

290 où $\mathrm{Top}(C)$ est le topos total (7.4.3.3). Le diagramme (7.4.5.1) *n'est pas commutatif en général.* Nous allons définir un morphisme canonique de morphismes de topos :

(7.4.5.2)
$$\rho_f : \alpha_i \longrightarrow \alpha_j \circ f.$$

Il suffit de définir un tel morphisme au niveau des images inverses, i.e. de définir un morphisme de foncteurs :

(7.4.5.3)
$$\beta_f^* : f^* \circ \alpha_j^* \longrightarrow \alpha_i^*,$$

où encore, en utilisant l'adjonction entre les foncteurs f^* et f_*, il suffit de définir un morphisme de foncteurs :

(7.4.5.4)
$$\gamma_f : \alpha_j^* \longrightarrow f_* \alpha_i^*.$$

Soient donc Y un objet de C_j et F un faisceau sur le site total C. On a, par définition, $\alpha_j^* F(Y) = F(\alpha_{j!}(Y))$ et $f_*\alpha_i^* F(Y) - F(\alpha_{i!} f^*(Y)))$, où dans le deuxième membre $f^* : C_j \to C_i$ désigne le foncteur image inverse pour la structure fibrée. Mais, par définition de ce foncteur image inverse, on a un morphisme cartésien canonique :

(7.4.5.5)
$$m_Y : \alpha_{i!} f^* \longrightarrow \alpha_{j!};$$

d'où, en appliquant le foncteur F, une application fonctorielle en Y;

(7.4.5.6)
$$\gamma_f(F)(Y) = F(m_Y) : \alpha_j^* F(Y) \longrightarrow f_* \alpha_i^* F(Y),$$

application définissant un morphisme de faisceaux sur C_j :

(7.4.5.7)
$$\gamma_f(F) : \alpha_j^* F \longrightarrow f_* \alpha_i^* F;$$

d'où le morphisme de foncteurs γ_f de (7.4.5.4).

291 Soient alors $f : i \to j$ et $g : j \to k$ deux morphismes composables de I. On a un

isomorphisme canonique :

$$c'_{g,f} : g_* f_* \longrightarrow (gf)_*$$

et on vérifie immédiatement la formule de compatibilité :

(7.4.5.8) $$c'_{g,f} \circ g_*(\gamma_f) \circ \gamma_g = \gamma_{gf}.$$

7.4.6. — Introduisons alors le $\mathscr{U}$-topos fibré $p^{\sim/I} : C^{\sim/I} \to I$ associé à $p : C \to I$ (7.2.6) et la catégorie fibrée sur I° correspondante $(p^{\sim/I})' : (C^{\sim/I})' \to I^\circ$ (7.1.3.2). Les considérations précédentes permettent d'associer à tout objet F de $\mathrm{Top}(C)$ une famille $F_i = (\alpha_i^* F)_{i \in \mathrm{ob}(I)}$ d'objets des $C_i^\sim$ et une famille de morphismes

$$\gamma_f F : F_j \longrightarrow f_* F_i, \quad f \in F1(I), \quad f : i \longrightarrow j,$$

cette famille de morphismes étant soumise aux conditions de compatibilités de (7.4.5.8). On a donc associé à F un I°-foncteur de la catégorie I° dans la catégorie $(C^{\sim/I})'$ i.e. un objet $\Theta_C(F)$ de la catégorie $\mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, (C^{\sim/I})')$. Comme cette construction est fonctorielle en F, on a en définitive un foncteur :

(7.4.6.1) $$\Theta_C : \mathrm{Top}(C) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, (C^{\sim/I})').$$

Proposition 7.4.7. — *Soit $C \to I$ un $\mathfrak{U}$-site fibré avec I équivalente à une petite catégorie. Le foncteur Θ_C (7.4.6.1) est une équivalence de catégories.*

Nous nous contenterons de décrire un foncteur quasi-inverse à Θ_C. Soit $\sigma \in \mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, (C^\sim)')$ i.e. un I°-foncteur $i \mapsto \sigma(i)$ de I° dans $(C^{\sim/I})'$. Pour tout objet X de C au-dessus de $p(X) = i \in \mathrm{ob}(I)$, on dispose d'un faisceau $\sigma(p(X)) \in \mathrm{ob}\, C_i^\sim$; d'où un ensemble $\sigma(p(X))(X)$. Soit $m : X \to Y$ un morphisme de C au-dessus du morphisme $f : i \to j$ de I. Le morphisme m se factorise d'une manière unique en un morphisme $m' : X \to f^*Y$ de C_i et le morphisme cartésien canonique $f(Y) \to Y$. De même le morphisme $\sigma(f)$ se factorise de manière unique en un morphisme $\gamma_f(\sigma) : \sigma(p(Y)) \to f_*\sigma(p(X))$ et le morphisme I°-cartésien canonique $f_*\sigma(p(X)) \to \sigma(p(X))$. On a donc application de $\sigma(p(Y))(Y)$ dans $\sigma(p(X))(X)$, obtenue en composant les applications : 292

$$\sigma(p(Y))(Y) \xrightarrow{\gamma_f(\sigma)(Y)} f_*(p(X))(Y) = \sigma(p(X))(f^*Y) \xrightarrow{\sigma(p(X))(m')} \sigma(p(X))(X).$$

On a donc associé à tout objet X de C un ensemble $\sigma(p(X))(X)$ et à tout morphisme $m : X \to Y$ une application $\sigma(p(X))(Y) \to \sigma(p(X))(X)$. On vérifie qu'on a bien déterminé ainsi un préfaisceau sur C, préfaisceau qui ne dépend pas du choix des foncteurs images inverses utilisés pour le construire. Il résulte de 7.4.4 que le préfaisceau $X \mapsto \sigma(p(X))(X)$ est un faisceau sur le site total C, et il est clair que ce faisceau dépend fonctoriellement de l'objet σ de $\mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, (C^{\sim/I})')$. Il est aussi clair, en revenant à la définition du foncteur Θ_C, qui le foncteur de $\mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, (C^{\sim/I})')$ dans $\mathrm{Top}(C)$ qu'on vient de construire est un foncteur quasi-inverse de Θ_C.

Remarque 7.4.8. — Il résulte en particulier de 7.4.7 que la catégorie $\mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, (C^{\sim/I})')$ est un $\mathscr{U}$-topos. Ce dernier fait peut se voir directement. On voit immédiatement, en utilisant I

9.21.10, que les conditions a), b) et c) de IV 1.1.2 sont satisfaites, et l'existence d'une petite catégorie génératrice résulte de I 9.25.

7.4.9. — Soient $p : C \to I$ et $q : D \to I$ deux $\mathscr{U}$-sites fibrés sur une petite catégorie et soit m un morphisme du site fibré C dans le site fibré D (7.2.2). Notons $m^{\sim/I} : C^{\sim/I} \to D^{\sim/I}$ le morphisme correspondant entre les $\mathscr{U}$-topos fibrés associés. Le morphisme de topos fibrés $m^{\sim/I}$ est défini à isomorphisme canonique près (7.2.7). Il lui correspond un foncteur image directe $m_*^{\sim/I} : (C^{\sim/I})' \to (D^{\sim/I})'$ (7.1.7) qui fournit, en passant aux sections sur I°, un foncteur :

$$\mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, m_*^{\sim/I}) : \mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, (C^{\sim/I})') \longrightarrow \mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, (D^{\sim/I})'). \tag{7.4.9.1}$$

Par ailleurs, le foncteur m est un foncteur continu entre les sites totaux (7.4.4) et par suite fournit, par composition, un foncteur $m_* : \mathrm{Top}(C) \to \mathrm{Top}(F)$.

En résumé, on a un diagramme de foncteurs :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Top}(C) \arrow[r, "\theta_C"] \arrow[d, "m_*"'] & \mathbf{Hom}^\circ_I(I^\circ, (C^{\sim/I})') \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, m_*^{\sim/I})"'] \\ \mathrm{Top}(D) \arrow[r, "\theta_D"] & \mathbf{Hom}^\circ_I(I^\circ, (D^{\sim/I})') \end{tikzcd} \tag{7.4.9.2}$$

293 ***Proposition 7.4.10.*** — *Le diagramme (7.4.9.2) est commutatif à isomorphisme près. Lorsque m est cartésien, m est un morphisme du site total C dans le site total D.*

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier la commutativité à isomorphisme près du diagramme (7.4.9.2). Pour montrer que m est un morphisme entre les sites totaux, il suffit, compte tenu de 7.4.7, de montrer que le foncteur adjoint à gauche au foncteur $\mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, m_*^{\sim/I})$ est exact à gauche. Nous allons tout d'abord décrire le foncteur image inverse du morphisme $m^{\sim/I}$ (7.2.7), et pour tout objet i de I, notons $m_i^* : D_i^\sim \to C_i^\sim$ le foncteur induit par $(m^{\sim/i})^*$ sur les fibres en i. Choisissons pour tout morphisme $f : i \to j$ de I des morphismes de topos, notés dans les deux cas $(f^*, f_*) : C_i^\sim \to C_j^\sim$ et $(f^*, f_*) : D_i^\sim \to D_j^\sim$. Comme $(m^{\sim/I})^*$ est un I°-foncteur cartésien, on a, pour tout $f : i \to j$, un isomorphisme canonique

$$m_i^* f_* \longrightarrow f^* m_j^*, \tag{7.4.10.1}$$

et comme les foncteurs f^* et f_* sont adjoints, on a des morphismes canoniques (morphismes d'adjonction)

$$\begin{aligned} \phi &: \mathrm{id} \longrightarrow f_* f^* \\ \psi &: f^* f_* \longrightarrow \mathrm{id}\,. \end{aligned} \tag{7.4.10.2}$$

Considérons alors la suite de morphismes fonctoriels :

$$m_j^* f^* \xrightarrow{(1)} f_* f^* m_j^* f_* \xrightarrow{(2)} f_* m_i^* f^* f_* \xrightarrow{(3)} f_* m_i^*, \tag{7.4.10.3}$$

où le morphisme (1) est déduit de ϕ, le morphisme (2) est déduit de l'isomorphisme (7.4.10.1)) et le morphisme (3 est déduit de ψ. En composant les différents morphismes de la suite (7.4.10.3), on obtient un morphisme fonctoriel : 294

(7.4.10.4) $$\mathrm{can}_f : m_j^* f_* \longrightarrow f_* m_i^*.$$

Soit alors τ un objet de $\mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ(D^{\sim/I})')$. On a donc, pour tout objet i de I un objet $\tau(i)$ de $D_i^\sim$ et pour tout morphisme $f : i \to j$, un morphisme

(7.4.10.5) $$\gamma_f(\tau) : \tau(j) \longrightarrow f_*\tau(i),$$

où la famille des $\gamma_f(\tau)$ possède une propriété de compatibilité analogue à (7.4.5.8)). Posons alors $\sigma(i = m_i^*(\tau(i))$ et notons

(7.4.10.6) $$\gamma_f(\sigma) : \sigma(j) \longrightarrow f_*\sigma(i)$$

le morphisme composé $m_j^*\tau(j) \xrightarrow{m_j^*\gamma_f(\tau)} m_j^* f_*\tau(i) \xrightarrow{\mathrm{can}_f(\tau(i))} f_* m_i^*\tau(i)$. On vérifie que les $\gamma_f(\sigma)$ possèdent la propriété de compatibilité de (7.4.5.8) et par suite qu'on a défini ainsi un objet de $\mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, (C^{\sim/I})')$. Un « adjoint functor chasing » montre alors que le foncteur de $\mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, (D^{\sim/I})')$ dans $\mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, (C^{\sim/I})')$ qu'on vient de construire est adjoint à gauche au foncteur $\mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, m_*^{\sim/I})$. Reste à montrer que cet adjoint à gauche commute aux limites projectives finies, ce qui résulte immédiatement du fait que dans les catégories de sections les limites projectives se calculent fibre par fibre et que tous les foncteurs utilisés pour construire cet adjoint à gauche commutent aux limites projectives finies.

Corollaire 7.4.11. — *Soient $p : C \to I$ un $\mathcal{U}$-site fibré sur une petite catégorie, $p^{\sim/I} : C^{\sim/I} \to I$ le $\mathcal{U}$-topos fibré associé (7.2.6), $\epsilon_I : C \to C^{\sim/I}$ le morphisme canonique de $\mathcal{U}$-site fibré $C^{\sim/I}$ dans le $\mathcal{U}$-site fibré C. Le morphisme ϵ_I induit une équivalence $\mathrm{Top}(\epsilon_I) : \mathrm{Top}(C) \to \mathrm{Top}(C^{\sim/I})$ entre les topos totaux correspondants*

Résulte de la commutativité du diagramme (7.4.9.2) et du fait que le morphisme ϵ_I fournit une équivalence entre les $\mathcal{U}$-topos fibrés associés.

Remarque 7.4.11.1. — Il résulte de 7.4.11 que dans les questions concernant le topos total on peut remplacer les sites fibrés par les topos fibrés correspondants.

Lemme 7.4.12. — *Soient $p : C \to I$ un site fibré sur une petite catégorie I et i un objet final de I* (I 10). *Le foncteur $\alpha_{i!} : C_i^\sim \to \mathrm{Top}(C)$ (7.4.3.4) est exact et pleinement fidèle. Les couples de foncteurs $\beta_i = (\alpha_{i!}, \alpha_i^*) : \mathrm{Top}(C) \to C_i^\sim$ et $\alpha_i = (\alpha_i^*, \alpha_{i*}) : C_i^\sim \to \mathrm{Top}(C)$ sont des morphismes de topos. Le morphisme composé $\beta_i\alpha_i : C_i^\sim \to C_i^\sim$ est isomorphe au morphisme identique.* 295

Pour tout objet j de I, notons $f_j : j \to i$ l'unique morphisme de j dans i. En utilisant l'équivalence $\Theta_C : \mathrm{Top}(C) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, (C^{\sim/I})')$ (7.4.7) on voit que pour tout objet X de C_i, $\alpha_{i!(X)}$ est le section $j \to f_i^*(X)$ et que pour tout section $j \mapsto \sigma(j) \in \mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, (C^{\sim/I})')$, $\alpha_i^*(j \mapsto \sigma(j))$ est l'objet $\sigma(i)$. Par suite $\alpha_i^*\alpha_{i!}$ est isomorphe à l'identité. Donc $\alpha_{i!}$ est pleinement fidèle. Comme les foncteurs f_j^* sont exacts à gauche, le foncteur $\alpha_{i!}$ est exact à gauche. Donc β_i est un morphisme de topos, et comme $\alpha_i^*\alpha_{i!}$ est isomorphe à l'identité, le morphisme $\beta_i\alpha_i$ est isomorphie au morphisme identique.

Théorème 7.4.13.1. — *Soient $p : C \to I$ et $q : D \to I$ deux $\mathcal{U}$-sites fibrés sur une petite catégorie I et $m : D \to C$ un I-foncteur. Pour que m soit un morphisme du site fibre C dans le site fibré D (7.2.2), il suffit que m soit un morphisme du site total C dans le site total D.*

7.4.13.2. — Il faut montrer que si un I-foncteur $m : D \to C$ est un morphisme du site total C dans le site total D, le foncteur m est un morphisme du site fibré C dans le site fibré D, i.e. pour tout objet i de I, le foncteur $m_i : D_i \to C_i$ induit par m sur les fibres en i est un morphisme du site C_i dans le site D_i. La démonstration de cette dernière assertion occupe les alinéas 7.4.13.3 à 7.4.13.7.

7.4.13.3. — Montrons que pour tout objet i de I, le foncteur $m_i : D_i \to C_i$ est continu. En effet on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[r, "m_i"] \arrow[d, "\alpha_{i!}"'] & C_i \arrow[d, "\alpha_{i!}"] \\ D \arrow[r, "m"] & C \end{tikzcd}$$

296 et il suffit de montrer que pour tout crible couvrant $R \hookrightarrow X$ de C_i/X, le morphisme $m_{i!}(R) \to m_i(X)$ est bicouvrant (III 1.2 et 1.5). Mais, en vertu de la commutativité du diagramme de la page (page 133) et du fait que les foncteurs $\alpha_{i!}$ et m sont continus, le morphisme $\alpha_{i!}m_{i!}(R) \to \alpha_{i!}m_i(X)$ est bicouvrant. L'assertion résulte donc de 7.4.2.2.

7.4.13.4. — *Réduction au cas où C et D sont des $\mathcal{U}$-topos fibrés.* Comme les foncteurs m_i sont continus, ils admettent des prolongements naturels aux catégories de faisceaux que nous noterons $m_i^* : D_i^\sim \to C_i^\sim$ (III 1.2 iv)). Soient $D^{\sim/I}$ et $C^{\sim/I}$ les $\mathcal{U}$-topos fibrés associés aux sites fibrés D et C respectivement, et pour tout morphisme f de I, notons f^* les foncteurs images inverses pour les quatre catégories fibrées C, D, $C^{\sim/I}$ et $D^{\sim/I}$. Comme le foncteur m est un I-foncteur, on a pour tout $f : i \to j$ un morphisme canonique

$$f^*mj \leftarrow m_i f^*.$$

Comme les foncteurs f^*, m_i et m_j sont continus, on en déduit, en passant aux catégories de faisceaux, des isomorphismes canoniques

$$f^*m_j^* \longleftarrow m_i^* f^*.$$

Ces isomorphismes possèdent des propriétés de compatibilité, permettant de construire un foncteur cartésien $m^* : D^{\sim/I} \to C^{\sim/I}$ qui induit sur les topos fibres les foncteurs m_i^*. De plus, le diagramme

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\varepsilon_I"'] & C \arrow[d, "\varepsilon_I"] \\ D^{\sim/I} \arrow[r, "m^*"] & C^{\sim/I} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près. Comme les foncteurs ϵ_I induisent des équivalences sur les topos totaux (7.4.11) et comme m est un morphisme entre les sites totaux, le foncteur

$m^* : D^{\sim/I} \to C^{\sim/I}$ est un morphisme entre les sites totaux. On est donc ramené à démontrer l'assertion de 7.4.13.2 lorsque D et C sont des $\mathcal{U}$-topos fibrés, ce que nous supposerons désormais.

7.4.13.5. — Pour tout objet i de I, le foncteur $m_i : D_i \to C_i$ transforme l'objet final de D_i en 297
l'objet final de C_i. Notons $m : D^\sim \to C^\sim$ le prolongement naturel de m aux topos totaux (III 1.2). Utilisant les équivalences $\Theta_D : D^\sim \to \mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, D')$ (7.4.7), on vérifie immédiatement que m associe à toute section $\sigma \in \mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, D')$ la section $(i \mapsto m_i\sigma(i)) \in \mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, C')$. Comme m est un morphisme de sites, le foncteur m est exact à gauche et en particulier transforme l'objet final de $\mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, D)$ en l'objet final de $\mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, C')$. Pour tout objet i de I, notons e_i un objet final de D_i. Un objet final de $\mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, D')$ est la section $i \mapsto e_i$. Donc la section $i \mapsto m_i(e_i)$ est un objet final de $\mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, C')$ et par suite, pour tout objet i de I, $m_i(e_i)$ est un objet final de C_i.

7.4.13.6. — Réduction au cas où i est un objet final de I. Soit i un objet de I. Le foncteur $\alpha_{i!} : D_i \to D$ se factorise en

$$D_i \xrightarrow{\overline{\alpha}_{i!}} D_{/e_i} \xrightarrow{\mathrm{loc}(e_i)} D,$$

où $\overline{\alpha}_i$ est le foncteur évident et $\mathrm{loc}(e_i)$ le foncteur d'oubli. Notons $m/i : D_{/e_i} \to D_{m(e_i)}$ le foncteur qui associe à tout objet $u : X \to e_i$ de $D_{/e_i}$, l'objet $m(u) : m(X) \to m(e_i)$ de $C_{/m(e_i)}$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[r, "m_i"] \arrow[d, "\overline{\alpha}_{i!}"'] & C_i \arrow[d, "\overline{\alpha}_{i!}"] \\ D_{/e_i} \arrow[r, "m/i"] & C_{/m(e_i)} \end{tikzcd}$$

Comme e_i et $m(e_i)$ sont des objets finaux de D_i et C_i respectivement (7.4.13.5), les catégories $D_{/e_i}$ et $C_{/m(e_i)}$ sont des $\mathcal{U}$-topos fibrés sur $I_{/i}$ et le foncteur $m_{/i}$ est un $I_{/i}$-foncteur. Comme la propriété pour un foncteur d'être un morphisme de sites se localise (IV 4.9), le foncteur $m_{/i}$ est un morphisme du site total $C_{/m(e_i)}$ dans le site total $D_{/(e_i)}$. On est donc ramené à démontrer que m_i est un morphisme de topos lorsque i est un objet final de I, ce que nous supposerons désormais. 298

7.4.13.7. — Fin de la démonstration. Notons $\alpha_{i!} : D_i \to D^\sim$, $m^\sim : D^\sim \to C^\sim$, $\alpha_{i!} : C_i \to C^\sim$, les prolongements naturels aux catégories de faisceaux des foncteurs $\alpha_{i!}$ et m. On a un diagramme commutatif à isomorphisme près :

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[r, "m_i"] \arrow[d, "\alpha_{i!}"'] & C_i \arrow[d, "\alpha_{i!}"] \\ D^\sim \arrow[r, "m^\sim"] & C. \end{tikzcd}$$

Comme i est un objet final, le foncteur $\alpha_i^*\alpha_{i!} : C_i \to C_i$ est isomorphe à l'identité (7.4.12) et par suite m_i est isomorphe à $\alpha_i^* m^\sim \alpha_{i!}$. De plus les foncteurs α_i^*, $m^\sim$ et α_i^* sont exacts à gauche (7.4.12). Par suite m_i est exact à gauche et est donc un morphisme de site C_i dans le site D_i.

Exercice 7.4.14. — Soient $X = (X_i)_{i\in I}$ un topos fibré sur I et T un topos. Montrer que les catégories $\mathbf{Homtop}(X_i, T)$ sont les fibres d'une catégorie fibrée qu'on notera $\mathbf{Homtop}_I(X, T \times I)$. Montrer que la catégorie des sections sur I de $\mathbf{Homtop}_I(X, T \times I)$ est canoniquement équivalente à $\mathbf{Homtop}_I(\mathrm{Top}(X), T)$ où $\mathrm{Top}(X)$ est le topos total de X.

Exercice 7.4.15. — Soit $X = (X_i)_{i\in I}$ un topos fibré sur I. Définir un morphisme cartésien m de X dans le topos fibré constant de fibre (Ens). Montrer que le topos total du topos fibré constant de fibre (Ens) est canoniquement équivalent à $I\hat{}$. En déduire un morphisme de topos

$$\mathrm{Top}(m) : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow I\hat{}\,.$$

Soit $F = (F_i)_{i\in I}$ (où $F_i = F|X_i$) un objet de $\mathrm{Top}(X)$ (7.4.7). Montrer que

$$\mathrm{Top}(m)(F) = (i \mapsto \Gamma(X_i, F_i)).$$

Déduire de 7.4.12 que si F est abélien injectif, F_i est abélien injectif pour tout $i \in \mathrm{ob}\, I$. En déduire que

$$R^q\,\mathrm{Top}(m)(F) = (i \mapsto H^q(X_i, F_i)).$$

299 Montrer que la suite spectrale de Cartan-Leray du morphisme m (V 5) est :

$$H^{p+q}(\mathrm{Top}(X), F) \Leftarrow \varprojlim_I{}^{(p)} H^q(X_i, F|X_i).$$

8. Limites projectives de topos fibrés

8.1. Généralités. —

Définition 8.1.1. — *Soient $\mathcal{U}$ un univers et $p : F \to I$ un $\mathcal{U}$-topos fibré. Un couple (C, m) constitué par un $\mathcal{U}$-topos C et un morphisme cartésien $m : C \times I \to F$ de $\mathcal{U}$-topos fibrés sur I est appelé une limite projective du topos fibré F si pour tout $\mathcal{U}$-topos D, le foncteur*

$$\mathbf{Homtop}(D, C) \longrightarrow \mathbf{Homtop}_{\mathrm{cart}/I}(D \times I, F) \tag{8.1.1.1}$$

obtenu en composant le foncteur de changement de base

$$\mathbf{Homtop}(D, C) \longrightarrow \mathbf{Homtop}_I(D \times I, C \times I)$$

et le foncteur de composition avec m (7.1.8), es une équivalence de catégories. (cf. 8.1.3.3 pour une formulation plus « géométrique »).

8.1.2. — On utilise les notations de 8.1.1. Soient D un $\mathscr{U}$-topos et $m_I : D \times I \to F$ un morphisme de $\mathscr{U}$-topos fibrés. En traduisant la définition 8.1.1, on constate aussitôt qu'il existe un morphisme de topos $n : D \to C$, et un isomorphisme de morphismes de topos fibrés sur I, $\gamma : m_1 \xrightarrow{\sim} m_\circ(n \times \mathrm{id}_I)$, rendant commutatif le diagramme :

(8.1.2.1)
$$\begin{tikzcd}
D \times I \arrow[rr, "m_1"] \arrow[d, "m\times\mathrm{id}_I"'] \arrow[drr, phantom, "\gamma"] & & F \\
C \times I \arrow[urr, "m_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

De plus, si (n', γ') est un autre couple possédant la propriété ci-dessus, il existe un *unique* isomorphisme $\eta : n \xrightarrow{\sim} n'$ tel que

(8.1.2.2)
$$\gamma \circ m(n \times \mathrm{id}) = \gamma'.$$

De là résulte que, si (D, m_1) est une limite projective de F, n est une équivalence de $\mathscr{U}$-topos 300
(IV 3.4) et que la donnée supplémentaire de l'isomorphisme γ faisant commuter le diagramme (8.1.2.1) détermine le couple (n, γ) isomorphisme canonique près. L'existence de la limite projective sera démontrée en 8.2.3 lorsque I est cofiltrante.

8.1.3. — On note

$$\varprojlim_I \mathrm{top}\ F \text{ ou } \varprojlim_I \mathrm{top}\ F_i \text{ ou encore } \underleftarrow{F}$$

une limite projective du topos fibré F, $\mu : (\varprojlim_I \mathrm{top}\ F) \times I \to F$ le morphisme canonique, et pour tout objet i de I on note

$$\mu_i : \underleftarrow{F} \simeq \underleftarrow{F} \times i \longrightarrow F_i$$

le morphisme de topos induit par μ sur les fibres en i.

Choisissons un biscindage de F (7.1.4) i.e. pour tout $f : i \to j$ un morphisme de topos $f\cdot = (f^*, f_*) : F_i \to F_j$ tel que f^* soit un foncteur image inverse pour la structure fibrée. On a alors, pour tout couple $i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k$ de morphismes composables de I, un isomorphisme de morphismes de topos (7.1.3)

$$c_{f,g} : g.f. \simeq (gf). \quad .$$

Comme μ est un morphisme cartésien de topos fibrés, on a pour tout morphisme $f : i \to j$ de I, un isomorphisme de morphismes de topos (7.1.6)

(8.1.3.1)
$$b_f : f.\mu_i \xrightarrow{\sim} \mu_j,$$

et la famille des b_f satisfait à des relations analogues aux relations (7.1.6.2)

8.1.3.2. — Soient D un $\mathscr{U}$-topos, $m : D \times I \to F$ un morphisme de topos fibrés, $m_i : D = D \times \{i\} \to F_i$ les morphismes induits par m sur les fibres et pour tout $f : i \to j$:

$$b'_f : f.m_i \xrightarrow{\sim} m_j,$$

l'isomorphisme de transition. Il résulte de 8.1.2 qu'il existe un morphisme de topos $n : D \to$
301 $\underleftarrow{F}$ et une famille d'isomorphismes :

$$\gamma_i : m_i \xrightarrow{\sim} \mu_i n \quad i \in \operatorname{ob} I,$$

tels que pour tout $f : i \to j$ on ait :

$$b_f \circ f.(\gamma_i) = \gamma_j \circ b'_f.$$

De plus, le morphisme n et la famille des γ_i, $i \in ob(I)$ sont déterminés à isomorphisme unique près (8.1.2).

Réciproquement lorsqu'on se donne un topos $\underleftarrow{F}$, des morphismes $\mu_i : \underleftarrow{F} \to F_i$ et des isomorphismes b_f (8.1.3.1.), satisfaisant aux conditions de compatibilités usuelles, et lorsque toutes ces données possèdent la propriété universelle décrite ci-dessus, il existe un unique morphisme $\mu : \underleftarrow{F} \times I \to F$ de topos fibrés qui donnent naissance aux μ_i et aux b_f et $(\underleftarrow{F}, \mu)$ est une limite projective du topos fibré F.

8.1.3.3. — Soit $\mathscr{V}$ un univers tel que $\mathcal{U} \in \mathscr{V}$. Les considérations ci-dessus permettent donc d'interpréter les limites projectives de topos fibrés comme des « limites projectives », au sens des 2-catégories, des pseudo-foncteurs à valeurs dans la 2-catégorie des $\mathscr{U}$-topos fibrés éléments de $\mathscr{V}$ déduits de la structure fibrée en choisissant les morphismes $f.$. Toutefois le lecteur prendra garde de ne pas confondre cette notion de « limite projective » au sens des 2-catégories (avec isomorphisme de commutation) avec la notion stricte (ou naïve) de limite projective (commutation stricte de diagrammes). Même lorsque la notion stricte a un sens (lorsque le pseudo-foncteur est un vrai foncteur) les notions de « limite projective » généralisée et de limite projective stricte ne coïncident pas en général.

8.1.4. — Soient $p : F \to I$ et $q : G \to I$ deux $\mathscr{U}$-topos fibrés et $m : F \to G$ un morphisme de topos fibrés. Supposons que les topos fibrés F et G possèdent des limites projectives (8.1.1). Il résulte alors immédiatement de la définition 8.1.1 qu'il existe un morphisme de topos :

(8.1.4.1) $$\underleftarrow{m} : \underleftarrow{F} \longrightarrow \underleftarrow{G},$$

et un isomorphisme de morphismes de topos fibrés $\gamma : m \circ \mu \xrightarrow{\sim} \mu \circ \underleftarrow{m} \times \mathrm{id}_I$, rendant
302 commutatif le diagramme

(8.1.4.2)
$$\begin{tikzcd} \underleftarrow{F} \times I \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\underleftarrow{m} \times \mathrm{id}_I"'] \arrow[dr, phantom, "\gamma"] & F \arrow[d, "m"] \\ \underleftarrow{G} \times I \arrow[r, "\mu"'] & G \end{tikzcd} .$$

De plus, si $(\underleftarrow{m}', \gamma')$ est un autre couple possédant la propriété ci-dessus il existe un *unique* isomorphisme $n : \underleftarrow{m} \xrightarrow{\sim} \underleftarrow{m}'$ de morphismes de topos tel que

$$\gamma \circ \mu(\eta \times \mathrm{id}) = \gamma'.$$

8.1.5. — Soient $p : F \to I$ un $\mathcal{U}$-topos fibrés élément de $\mathcal{V}$, $\phi : I' \to I$ un foncteur élément de $\mathcal{V}$, $p_\phi : F_\phi \to I'$ le $\mathcal{U}$-topos fibré déduit de (F, p) par le changement de base ϕ (7.1.9). Soit $(\underleftarrow{F}, \mu)$ une limite projective de F. On obtient par changement de base un morphisme de topos fibrés sur I' :

$$\mu' : \underleftarrow{F} \times I' \longrightarrow F.$$

Soit $(\underleftarrow{F_\phi}, \mu_\phi)$ une limite projective de F_ϕ. On a alors, par la propriété universelle de la limite projective (8.1.2) un morphisme de topos

$$m_\phi : \underleftarrow{F} \longrightarrow \underleftarrow{F_\phi},$$

et un isomorphisme de morphismes de topos fibrés sur I' :

$$\gamma : \mu' \xrightarrow{\sim} \mu_\phi \circ (m_\phi \times \mathrm{id}_{I'}).$$

Le couple (m_ϕ, γ) est déterminé à isomorphisme unique prés.

8.1.6. — Soient $p : F \to I$ un $\mathcal{U}$-site fibré sur une petite catégorie I, $F^{\sim/I} \to I$ le $\mathcal{U}$-topos fibre associé (7.2.6) et D un U-topos. On a tout d'abord un foncteur

(8.1.6.1) $$\mathbf{Homtop}_{\mathrm{cart}/I}(D \times I, F^{\sim/I}) \longrightarrow \mathbf{Morsite}_{\mathrm{cart}/I}(D \times I, F),$$

qui associe à tout m le foncteur composé de m^* avec $\epsilon_{F/I}$ (7.2.7). De plus, par définition de la catégorie $\mathbf{Morsite}_{\mathrm{cart}/I}(D \times I, F)$ (7.2.2.2), on a un foncteur

(8.1.6.2) $$\mathbf{Morsite}_{\mathrm{cart}/I}(D \times I, F) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/I}(F, D \times I)^\circ.$$

Enfin, par définition de la limite inductive (6.3), on a un foncteur 303

(8.1.6.3) $$\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/I}(F, D \times I)^\circ \longrightarrow \mathbf{Hom}(\varinjlim_{I^\circ} F, D)^\circ.$$

Notons

(8.1.6.4) $$\Theta : \mathbf{Homtop}_{\mathrm{cart}/I}(D \times I, F^{\sim/I}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\varinjlim_{I^\circ} F, D)^\circ$$

le foncteur composé de ces trois derniers foncteurs et

(8.1.6.5) $$\Pi : F \longrightarrow \varinjlim_{I^\circ},$$

le foncteur canonique.

Proposition 8.1.7. — *Le foncteur Θ est pleinement fidèle. Son image essentielle est l'ensemble des foncteurs $m : \varinjlim_{I^\circ} F \to D$ tel que le foncteur*

$$(m \circ \Pi, p) : F \longrightarrow D \times I$$

soit un morphisme du site total $D \times I$ dans le site total F.

Il résulte de 7.2.7 que le foncteur (8.1.6.1) es une équivalence de catégories, de 7.2.2 que le foncteur (8.1.6.2) est pleinement fidèle et de 6.3 que le foncteur (8.1.6.4) est une équivalence de catégories. Par suite Θ est pleinement fidèle. Un foncteur $m : \varinjlim_{I^\circ} F \to D$ est isomorphie à l'image par $\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/I}(F, D \times I)^\circ \to \mathbf{Hom}(\varinjlim_{I^\circ} F, D)^\circ$ du foncteur $(m \circ \Pi, p)$, et un tel foncteur est dans l'image essentielle de (8.1.6.2) si et seulement s'il est un morphisme du site total $D \times I$ dans le site total F (7.4.13.1) ; d'où la proposition.

8.2. Construction de la limite projective lorsque la catégorie d'indice est cofiltrante.—

Lemme 8.2.1. — *Soient I et I' deux catégories cofiltrantes* (I 8.1) *et $\phi : I' \to I$ un foncteur tel que $\phi^\circ : I'^\circ \to I^\circ$ soit cofinal* (I 8.1). *Soient de plus $p : F \to I$ un $\mathcal{U}$-topos fibré, D un $\mathcal{U}$-topos, $m : D\times I \to F$ un morphisme cartésien de topos fibré, $m' : D\times I' \to F$ le morphisme de topos fibrés déduit de m par le changement de base ϕ (7.1.9). Le couple (D, m) est une limite projective de F si et seulement si (D, m') est une limite projective de F'.*

304 La démonstration n'est qu'une vérification de routine assez longue. Elle est laissée au lecteur patient, qui pourra utiliser le point de vue des limites projectives de pseudo-foncteurs (8.1.3.3).

Lemme 8.2.2. — *Soient $p : F \to I$ un $\mathcal{U}$-site fibré sur une petite catégorie cofiltrante, $\underleftarrow{F}$ la Limite inductive de la catégorie fibrée F (6.3.9), $\pi : F \to \underleftarrow{F}$ le foncteur canonique. Munissons $\underleftarrow{F}$ de la topologie la moins fine rendant continu le foncteur π* (III 1)*. Soit D un $\mathcal{U}$-site et $n : \underleftarrow{F} \to D$ un foncteur. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *n est un morphisme de sites $D \to \underleftarrow{F}$.*
ii) *$n \circ \pi$ est un morphisme de sites (où F est muni de la topologie totale).*
iii) *$(n \circ \pi, p) : F \to D \times I$ est un morphisme du site total $D \times I$ dans le site total F.*
iv) *Pour tout objet i de I, le foncteur composé $F_j \xrightarrow{\alpha_{i!}} F \xrightarrow{n\circ\pi} D$ est un morphisme de sites.*

On a i) = ii) d'après (6.6) et iii) = iv) d'après (7.4.13). Montrons que iii) = ii). Il suffit pour cela de montrer que le foncteur première projection $\mathrm{pr}_1 : D \times I \to D$ est un morphisme de sites. Notons $D^{\simeq}$ le topos des faisceaux sur D. Il résulte de (7.4.7) que $(D\times I)^\sim$ est équivalent au topos $\mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, D^\sim \times I^\circ) = \mathbf{Hom}(I^\circ, D^\sim)$. De plus, on constate immédiatement que le prolongement naturel de $\mathrm{pr}_1 : D \times I \to D$ aux faisceaux (III 1.2) est le foncteur de $\mathbf{Hom}(I^\circ, D^\sim)$ dans $D^\sim$ qui associe au foncteur $i \to \sigma(i)$ $\mathrm{Hom}(I^\circ, D^\sim)$ l'objet $\varinjlim_{I^\circ} \sigma(i)$. Comme I° est filtrante, les limites inductives suivant I° sont exacts (II 4) et par suite pr_1 est un morphisme de sites (IV 4.9). Il reste à démontrer que ii = iv). Traitons tout d'abord le cas où D est un $\mathcal{U}$-topos et F un $\mathcal{U}$-topos fibré sur I. Soit i un objet de I. En raisonnant comme dans 7.4.13.6, on voit que le foncteur $\alpha_{i!} : F_i \to F$ se factorise en un morphisme $\overline{\alpha}_{i!} : F_i \to F/\alpha_{i!}(e_i)$ et le foncteur de localisation $F/\alpha_{i!}(e_i) \to F$, où e_i est un objet final de F_i. Il suffit donc de montrer que le foncteur composé $f/\alpha_{i!}(e_i) \xrightarrow{n\circ\pi} D$ est un morphisme de sites. Mais on a un diagramme commutatif à isomorphisme près :

$$\begin{tikzcd}
F/\alpha_{i!}(e_i) \arrow[r, "n\circ\pi/\alpha_{i!}(e_i)"] \arrow[d] & D/n\circ\pi\alpha_{i!}(e_i) \arrow[d] \\
F \arrow[r, "n\circ\pi"] & D
\end{tikzcd}$$

305 Comme la propriété d'être un morphisme se localise (IV 5.10), il suffit de montrer que $n \circ \pi \circ \alpha_{i!}(e_i)$ est un objet final de D. Pour tout morphisme $f : j \to k$ de I, il existe un et un seul morphisme $e_f : \alpha_{j!}(e_j) \to \alpha_{k!}(e_k)$ au-dessus de f et ce morphisme est cartésien. On a donc une section cartésienne $j \mapsto \alpha_{j!}(e_j)$ de F sur I. Par suite le morphisme canonique

$n \circ \pi \circ \alpha_{i!}(e_i) \to \varinjlim_I n \circ \pi \circ \alpha_{j!}(e_j)$ est un isomorphisme, car π transforme les morphismes cartésiens en isomorphismes. Par ailleurs $\varinjlim_I \alpha_{j!}(e_j)$, où la limite inductive est prise dans $F^{\hat{}}$, est un objet final de $F^{\hat{}}$. Comme $n \circ \pi$ est un morphisme, il transforme l'objet final de $F^{\sim}$ en un objet final de D. Par suite $\varinjlim_I n \circ \pi \circ \alpha_{j!}(e_j)$ est un objet final de D, ce qui achève le démonstration dans ce cas. Dans le cas général, le foncteur $(n\pi, p) : F \to D \times I$ est cartésien et continu (7.4.4). De plus, le foncteur $n \circ \pi$ est le foncteur composé

$$F \xrightarrow{(n\pi,p)} D \times I \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} D.$$

En passant aux $\mathcal{U}$-topos fibrés associés, on obtient un diagramme commutatif à isomorphisme près :

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "(n\pi,p)"] \arrow[d, "\varepsilon_{F/I}"'] & D \times I \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\varepsilon_D \times \mathrm{id}"] & D \arrow[d, "\varepsilon_D"] \\
F^{\sim/I} \arrow[r, "(n\pi,p)^{\sim/I}"] & D^{\sim} \times I \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] & D^{\sim}
\end{tikzcd}.$$

Comme $(n\pi, p)^{\sim/I}$ est cartésienne, il est du type $(n'\pi', p')$ où $p' : F^{\sim/I} \to I$ et $\pi' : F^{\sim/I} \to \varinjlim_{I^\circ} F_i^{\sim}$ sont les foncteurs canoniques. On a donc $\mathrm{pr}_{1\circ}(n\pi, p)^{\sim/I} = n'$. Comme les foncteurs $\epsilon_{F/I}, \epsilon_D$ induisent une équivalence sur les topos de faisceaux (7.4.11), les foncteurs n et n' donnent des foncteurs isomorphes en passant aux faisceaux associés (III 1.2) et par suite n' est un morphisme de sites. D'après ce qui précède, le foncteur $(n\pi, p)^{\sim/I}$ induit sur les fibres 306
des morphismes de topos. C'est donc un morphisme de site total F dans le site total $D^{\sim} \times I$ (7.4.13). Comme les foncteurs $\epsilon_{F/I}, \epsilon_D \times \mathrm{id}$ induisent des équivalences sur les topos totaux (7.4.11), le foncteur $(n\pi, p)$ est un morphisme de sites fibrés (7.4.13), d'où l'assertion.

Théorème 8.2.3. — *Soient $p : F \to I$ un $\mathcal{U}$-site fibré sur une catégorie cofiltrante essentiellement petite* (I 8.1).

1) *Notons $\underrightarrow{F}$ le site dont la catégorie sous-jacente est la limite inductive de la catégorie fibrée $F \to I$* (6.3) *et dont la topologie est la topologie la moins fine rendant continu le foncteur canonique $\pi : F \to \underrightarrow{F}$. Alors $\underrightarrow{F}$ est un $\mathcal{U}$-site et*

$$(\pi, p) : F \longrightarrow \underrightarrow{F} \times I$$

est un morphisme du site fibré $\underrightarrow{F} \times I$ dans le site fibré F.

2) *Soit $\mu : \underrightarrow{F}^{\sim} \times I \to F^{\sim}/I$ le morphisme de $\mathcal{U}$-topos fibrés déduit de (π, p) en passant aux $\mathcal{U}$-topos fibrés associés. Le couple $(\underrightarrow{F}^{\sim}, \mu)$ est une limite projective de $F^{\sim/I}$.*

Remarque 8.2.4. — 1) Vu les notations introduites en 8.1.3, on peut poser

$$\varprojlim_I \mathrm{top}\, F^{\sim} = \underrightarrow{F}^{\sim}$$

2) Il résulte de 7.4.4 que la topologie sur $\underrightarrow{F}$ est aussi la topologie la moins fine rendant continue la famille des foncteurs $\pi_j : F_j \to F \xrightarrow{\pi} \underrightarrow{F}$, $j \in \mathrm{ob}\, I$.

Définition 8.2.5. — *Le site $\underrightarrow{F}$ introduit dans 8.2.3 est appelé le site limite projective du site fibré F.*

A titre d'exercice, le lecteur pourra comme en 8.2.1 définir la notion de limite projective d'un site fibré et vérifier que le site $\underrightarrow{F}$ est bien une limite projective du site F. La deuxième assertion du théorème peut donc se paraphraser ainsi : Le topos des faisceaux sur le site limite projective est équivalent à la limite projective du topos fibré associé.

307 *8.2.6. Démonstration du théorème : Réduction au cas d'une petite catégorie d'indices.* — Nous nous bornerons à donner des indications. Soit I' une sous-catégorie pleine de I telle que I'° soit cofinale dans I°. Notons $F' \to I'$ la catégorie fibrée déduite de F par le changement de base $I' \to I$, $\pi' : F' \to \underrightarrow{F}'$ le foncteur canonique. On constate tout d'abord que les catégories $\underrightarrow{F}$ et $\underrightarrow{F}'$ sont équivalentes et que la topologie sur $\underrightarrow{F}'$ déduite de la topologie de $\underrightarrow{F}$ par cette équivalence est la topologie la moins fine rendant continue le foncteur $\pi' : F' \to \underrightarrow{F}'$. L'assertion 1) du théorème en résulte alors lorsqu'elle est démontrée dans le cas où I est petite. L'assertion 2) dans le cas général de déduit alors de l'assertion 2) dans le cas où I est petite par le lemme 8.2.1.

8.2.7. Fin de la démonstration de théorème. — La première assertion résulte du lemme 8.2.2 appliqué au cas où $D = \underrightarrow{F}$ et $n = \mathrm{id}$. Soit D un $\mathscr{U}$-topos. On a un diagramme commutatif à isomorphisme près :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Homtop}(D,(\underrightarrow{F})^{\sim}) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "(3)"'] & \mathbf{Morsite}(D,\underrightarrow{F}) \arrow[r, hook, "(2)"] \arrow[d, "(3)"'] & \mathbf{Hom}(\underrightarrow{F},D)^{\circ} \arrow[dd, "(5)"'] \\
\mathbf{Homtop}_{\mathrm{Cart}/I}(D\times I,(\underrightarrow{F})^{\sim}\times I) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "(4)"'] & \mathbf{Morsite}_{\mathrm{Cart}/I}(D\times I,(\underrightarrow{F})\times I) \arrow[d] & \\
\mathbf{Homtop}_{\mathrm{Cart}/I}(D\times I,F^{\sim/I}) \arrow[r, "(1)"] & \mathbf{Morsite}_{\mathrm{Cart}/I}(D\times I,F) \arrow[r, hook, "(2)"] & \mathbf{Hom}_{\mathrm{Cart}/I}(F,D\times I)^{\circ},
\end{tikzcd}$$

où les foncteurs du type (1) sont des équivalences (IV 4.9.4 et 7.2.7), les foncteurs du type (2) sont pleinement fidèles (IV 4.9.1 et 7.2.2), les foncteurs du type (3) sont des foncteurs de changement de base, les foncteurs du type (4) sont des foncteurs de composition (avec μ, resp. (π, p)) et le foncteur (5) est l'équivalence déduite de la propriété universelle de la limite inductive (6.3). Pour montrer que le foncteur $\mathbf{Homtop}(D, (\underrightarrow{F})^{\sim}) \xrightarrow{(4)\circ(3)} \mathbf{Homtop}_{/I}(D \times I, F^{\sim/I})$ est une équivalence, il suffit de montrer que le foncteur

$$\mathbf{Morsite}(D, \underrightarrow{F}) \xrightarrow{(4)\circ(3)} \mathbf{Morsite}_{/I}(D \times I, F)$$

308 est une équivalence de catégories ou encore il suffit de montrer que les deux foncteurs pleinement fidèles

$$\mathbf{Morsite}(D, \underrightarrow{F}) \xrightarrow{(5)\circ(2)} \mathbf{Homcart}_{I}(F, D \times I)^{\circ}$$

$$\mathbf{Morsite}_{/I}(D \times I, F) \xrightarrow{(2)} \mathbf{Homcart}_{I}(F, D \times I)^{\circ}$$

ont mêmes images essentielles, ce qui résulte immédiatement du lemme 8.2.2.

8.2.8. — Soient $p : F \to I$ un $\mathscr{U}$-topos fibré sur une catégorie I, $(\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i, \mu)$ une limite projective de F. On a donc un morphisme cartésien de $\mathscr{U}$-topos fibrés sur I :

$$\mu \underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i \times I \longrightarrow F,$$

d'où, en passant aux catégories fibrées aux I° par les foncteurs images directes (7.1.3), un foncteur cartésien :

$$\mu_* : \underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i \times I^\circ \longrightarrow F'$$

qui est le foncteur image directe par μ (7.1.7). On a donc, par définition de la limite projective d'une catégorie fibrée (6.10), un foncteur canonique

(8.2.8.1) $$\Theta : \underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i \longrightarrow \underleftarrow{\lim}_{I, f_*} F_i = \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/I^\circ}(I^\circ, F').$$

Théorème 8.2.9. — *On utilise les notations de 8.2.8, et on suppose que I est une catégorie cofiltrante essentiellement petite. Alors le foncteur Θ est une équivalence de catégories. Supposons I petite. Posons $\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i = (\underrightarrow{F})^\sim$ (ce qui est licite d'après 8.2.3 et 8.2.4) et interprétons la catégorie $\mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, F')$ comme la catégorie des faisceaux sur le site total F (7.4.7). Alors le foncteur composé*

$$(\underrightarrow{F})^\sim = \underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i \xrightarrow{\Theta} \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/I^\circ}(I^\circ, F') \hookrightarrow \mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, F') \approxeq F^\sim,$$

n'est autre que le foncteur image directe par le morphisme de sites défini par le foncteur

$$\pi : F \longrightarrow \underrightarrow{F}.$$

8.2.10. — Quelques commentaires avant la démonstration du théorème 8.2.9. À part la so- 309
lution du problème d'existence des limites projectives dans le cas où la catégories d'indices est cofiltrante, solution qui curieusement n'est pas triviale dans cette théorie, les théorèmes 8.2.3 et 8.2.9 apportent deux informations supplémentaires essentielles pour le maniement dans la pratique des topos limites projectives. Tout d'abord le théorème 8.2.3 interprète le topos limite projective comme le topos des faisceaux sur un site dont la catégorie sous-jacente est la catégorie limite inductive des catégories F_i suivant le système des foncteurs images inverses. Dans les applications, on saura interpréter concrètement cette catégorie et sa topologie. D'autre part, le théorème 8.2.9 affirme qu'un faisceau de la limite projective est connu lorsque'on connaît le système de ses images directes dans le topos F_i (qui fournit une section cartésienne sur I° de la catégorie $(F^{\sim/I})'$). Ce théorème affirme de plus que réciproquement lorsqu'on se donne pour tout objet i de I un faisceau X_i sur F_i et pour tout morphisme $f : i \to j$ de I un isomorphisme $X_j \simeq f_* X_i$, ces isomorphismes étant soumis à des conditions de compatibilité, il existe essentiellement un seul faisceau de la limite projective qui donne naissance par images directes au système des X_i.

8.2.11. — L'assertion 2) de 8.2.3 et la première assertion de 8.2.9 peuvent être résumées dans la formule frappante :

(8.2.11.1) $$\varprojlim_{I, f_*} F_i^{\sim} \approxeq \operatorname{limtop}_{\overleftarrow{I, f.}} F_i^{\sim} \approxeq (\varinjlim_{I^\circ, f_*} F_i)^{\sim}.$$

8.2.12. — *Démonstration du théorème* 8.2.9 Pour démontrer la première assertion, on se ramène au cas où la catégorie I est petite en utilisant 8.2.1 et un lemme analogue sur les limites projectives de catégories fibrées. Nous laissons les détails au lecteur. Supposons désormais que I est une petite catégorie. On site que le foncteur

$$\pi\ :\ F \longrightarrow \varinjlim_{I^\circ} F_i$$

est un morphisme de sites (8.2.2). Le foncteur image directe

$$\pi_*\ :\ (\varinjlim_{I^\circ} F_i)^{\sim} \longrightarrow F^{\sim}$$

310 qu'il définit sur les topos est alors pleinement fidèle, et son image essentielle est l'ensemble des faisceaux sur F qui transforment les morphismes cartésiens de F en isomorphismes (6.6). Or il est immédiat que ces faisceaux correspondent dans l'équivalence $F^{\sim} \simeq \mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, F')$ aux sections cartésiennes de F' sur I° (7.4.7). De plus, pour tout $j \in \mathrm{ob}(I)$, notons $\alpha_{j!}\ :\ F_j \to F$ le foncteur d'inclusion qui donne naissance aux trois foncteurs $(\alpha_{j!}, \alpha_j^*, \alpha_{j*}) : F_j \substack{\longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow} F$ (7.4.3). Il résulte de la définition de l'équivalence $F' \simeq \mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, F)$ (7.4.7) qu'à un faisceau X sur $\varinjlim_{I^\circ} F_i$ correspond par le foncteur $(\varinjlim_{I^\circ} F_i)^{\sim} \xrightarrow{\pi_*} F \simeq \mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, F')$ la section cartésienne $j \mapsto \alpha_j^* \pi_*(X)$. Or il résulte de la description du foncteur $\mu\ :\ (\varinjlim_{I^\circ} F_i)^{\sim} \times I \to F$ donnée dans 8.2.3 que pour tout objet j de I, le foncteur $\mu_{j_*}\ :\ (\varinjlim_{I^\circ} F_i)^{\sim} \to F_j$ image directe par le morphisme $\mu_j\ :\ (\varinjlim_{I^\circ} F_i)^{\sim} \to F_j$ déduit de μ par passage aux fibres en j, n'est autre que le foncteur $\alpha_j^* \pi_*$. Par suite le foncteur $(\varinjlim_{I^\circ} F_i)^{\sim} \xrightarrow{\pi_*} F \simeq \mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, F')$ n'est autre que le foncteur $(\varinjlim_{I^\circ} F_i)^{\sim} \xrightarrow{\Theta} \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/I^\circ}(I^\circ, F') \hookrightarrow \mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, F')$, d'où le théorème.

8.3. Topologie du site limite projective : Cas des topos cohérents. —

8.3.1. — Dans ce numéro, $p\ :\ F \to I$ est un $\mathscr{U}$-site fibré sur une catégorie cofiltrante essentiellement petite, dont les foncteurs images inverses $f^*\ :\ F_i \to F_j$ commutent aux produits fibrés. On se donne de plus, pour tout objet X d'une catégorie fibre F_i, un ensemble $\mathrm{Cov}(X)$ de familles couvrantes pour la topologie de F_i qui possèdent les propriétés (PTO) et (PT1) de II 1.3 et qui engendrant la topologie de F_i. Enfin on suppose que pour tout $f\ :\ i \to j$, tout $Y \in \mathrm{ob}\, F_j$, et toute famille $(Y_\alpha \to Y)_{\alpha \in A}$ de $\mathrm{Cov}(Y)$, la famille $(f^*(Y_*) \to f^*(Y))_{\alpha \in A}$ appartient à $\mathrm{Cov}(f^*(Y))$. Ces conditions sur $\mathrm{Cov}(X)$ sont vérifiées par exemple si on prend
311 $\mathrm{Cov}(X) = \{$toutes les familles couvrantes de X dans $F_i\}$. On se propose d'étudier dans ce numéro le site limite projective de F sous des hypothèses de finitude convenables (8.3.13).

8.3.2. — Soient $\pi : F \to \underrightarrow{F}$ le foncteur canonique et Y un objet de $\underrightarrow{F}$. Désignons par $\mathrm{Cov}(Y)$ l'ensemble des familles $(Y_\alpha \xrightarrow{n_\alpha} Y)_{\alpha\in A}$ du type suivant :

Il existe un $i \in I$, un objet X de F_i, une famille $(X_\alpha \xrightarrow{n'_\alpha} X)_{\alpha\in A} \in \mathrm{Cov}(X)$, un isomorphisme $\phi : \pi(X) \simeq Y$ et une famille d'isomorphismes $\phi_\alpha : \pi(X_\alpha \simeq Y_\alpha)$, $\alpha \in A$, tels que pour tout $\alpha \in A$ on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\pi(X_\alpha) \arrow[rr, dash, "\overset{\phi_\alpha}{\sim}"] \arrow[d, "\pi(n'_\alpha)"] & & Y_\alpha \arrow[d, "n_\alpha"] \\
\pi(X) \arrow[rr, dash, "\overset{\phi}{\sim}"] & & Y.
\end{tikzcd}$$

Proposition 8.3.3. — 1) *L'ensemble des familles* $\in \mathrm{Cov}(Y)$, $Y \in \mathrm{ob}\, \underrightarrow{F}$, *engendre la topologie du site limite projective (8.2.5).*

2) *La famille* $Y \mapsto \mathrm{Cov}(Y)$, $Y \in \mathrm{ob}\, \underrightarrow{F}$, *possède les propriétés* (PTO) *et* (PT1) *de* II 1.3.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 8.3.4. — *Soient i un objet de I, $n : X' \to X$ un morphisme quarrable de F_i tel que pour tout $f : j \to i$, $f^*(n)$ soit quarrable. Alors $\pi(n)$ est quarrable. Les foncteurs :*

$$\pi_j : F_j \hookrightarrow F \xrightarrow{\pi} \underrightarrow{F}, \quad j \in \mathrm{ob}\, I,$$

commutent aux produits fibrés.

Rappelons que tout objet Y de $\underrightarrow{F}$ est égal à un objet $\pi(Z)$, $Z \in \mathrm{ob}\, F$, et que tout morphisme $m : Y \to \pi(X)$ est de la forme :

$$\pi(Z) \xrightarrow{\pi(s)^{-1}} \pi(Z') \xrightarrow{\pi(m')} \pi(X),$$

où s est un morphisme cartésien de F. Par suite, pour montrer que $\pi(n)$ est quarrable, il suffit 312
de montrer que le produit fibré de tout diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \pi(X') \arrow[d, "\pi(u)"] \\
\pi(Z') \arrow[r, "\pi(m')"] & \pi(X)
\end{tikzcd}$$

est représentable. Mais le morphisme $m' : Z' \to X$ se factorise en $Z' \xrightarrow{m''} X'' \xrightarrow{s'} X$, où $p(m'')$ est l'identité de $p(Z') = j$ et où s' est cartésien au-dessus de $p(s') = f$. Posons

$X''' = f^*(X')$, $n' = f^*(n)$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X''' \arrow[r, "s''"] \arrow[d, "n'"] & X' \arrow[d, "n"] \\
X'' \arrow[r, "s'"] & X,
\end{tikzcd}$$

d'où un diagramme commutatif dans $\underset{\to}{F}$:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi(X''\,') \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\pi(u')"] & \pi(X') \arrow[d, "\pi(n)"] \\
\pi(Z') \arrow[r, dash, "\pi(m')"] & \pi(X'') \arrow[r, "\sim"] & \pi(X)
\end{tikzcd}$$

où n' est un morphisme quarrable de F_j. Pour montrer que $\pi(n)$ est quarrable, il suffit donc de montrer que le produit $\pi(Z') \times_{\pi(X'')} \pi(X''')$ est représentable, et par suite il suffit de montrer que $\pi_j : F_j \hookrightarrow F \to \underset{\to}{F}$ commute aux produits fibrés.

Soient

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien de F_j et W un objet de F au-dessus de $k \in \operatorname{ob} I$. On a (6.5) :

$$\mathbf{Hom}(\pi(W), \pi(Y')) \simeq \varinjlim_{\substack{l \xrightarrow{f} j \\ l \xrightarrow{g} k}} \mathbf{Hom}_{F_\ell}(g^*(W), f^*(Y'))$$

313 Mais comme $f^* : F_j \to F_\ell$ commute aux produits fibrés, on a

$$\operatorname{Hom}(g^*(W), f^*(Y')) \simeq \operatorname{Hom}(g^*(W), f^*(Y)) \times_{\operatorname{Hom}(g^*(W), f^*(X))} \operatorname{Hom}(g^*(W), f^*(X')).$$

Utilisant alors la commutation des limites filtrantes aux produits fibrés (I 2) et la formule (6.5) on obtient un isomorphisme :

$$\operatorname{Hom}(\pi(W), \pi(Y')) \simeq \operatorname{Hom}(\pi(W), \pi(Y)) \times_{\operatorname{Hom}(\pi(W), \pi(X))} \operatorname{Hom}(\pi(W), \pi(X')),$$

ce qui montre que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\pi(Y') \arrow[r] \arrow[d] & \pi(X') \arrow[d] \\
\pi(Y) \arrow[r] & \pi(X)
\end{tikzcd}$$

est cartésien dans $\underline{F}$.

8.3.5. — *Démonstration de* 8.3.3. Démontrons d'abord la deuxième assertion. Il résulte de 8.3.4 que les familles de $\mathrm{Cov}(Y)$, $Y \in \underline{F}$, sont composées de morphismes quarrables, d'où la propriété (PTO). Pour montrer que ces familles possèdent la propriété (PT1) (stabilité par changement de base), on est ramené, en procédant à une suite de réductions comme dans la démonstration de 8.3.3, à démontrer l'assertion suivante :

Pour tout $i \in \mathrm{ob}\, I$, tout $Y \in \mathrm{ob}\, F_i$, tout $(Y_\alpha \to Y)_{\alpha \in A} \in \mathrm{Cov}(Y)$, et tout morphisme $u : Z \to Y$ de F_i, la famille $(\pi(Z) \times_{\pi(Y)} \pi(Y) \to \pi(Z)_{\alpha \in A}$ appartient à $\mathrm{Cov}((Z))$.

Cette dernière assertion résulte du fait que les $\pi_i : F_i \hookrightarrow F \xrightarrow{\pi} \underline{F}$ commutent aux produits fibrés (8.3.3) et que les familles $X \mapsto \mathrm{Cov}(X)$ de F_i sont stables par changement de base. Démontrons la première assertion. Il est clair que les familles qui appartiennent aux $\mathrm{Cov}(Y)$, $Y \in \underline{F}$, sont couvrantes pour la topologie T la moins fine rendant continu le foncteur π (III 1). Donc la topologie T' engendrée par ces familles est moins fine que T. Pour montrer qu'elle est plus fine que T (et par suite égale à T), il suffit de montrer que tout faisceau M pour T' 314
est tel que $M \circ \pi$ est un faisceau sur F, ou encore (8.2.4) que $M \circ \pi_i$ est un faisceau sur F_i pour tout i ob I. Or, comme les foncteurs $\pi_i : F_i \to \underline{F}$ commutent aux produits fibrés (8.3.4), M est un faisceau pour T' si et seulement si (II 2.3 et I 2.12) pour tout $i \in \mathrm{ob}\, I$, pour tout $Y \in \mathrm{ob}\, F_i$, pour tout $(Y_\alpha \to Y)_{\alpha \in A} \in \mathrm{Cov}(Y)$, la suite d'ensembles

$$M(\pi_i(Y)) \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} M(\pi_i(Y_\alpha)) \rightrightarrows \prod_{(\alpha,\beta) \in A \times A} M(\pi_i(Y_\alpha \times_Y Y_\beta))$$

est exacte, i.e. (*loc. cit.*) si et seulement si pour $i \in \mathrm{ob}\, I$, $M \circ \pi_i$ est un faisceau sur F_i.

Proposition 8.3.6. — *On utilise les notations et hypothèses de* 8.3.1 *et* 8.3.2. *Si pour tout* $i \in \mathrm{ob}\, I$, $X \mapsto \mathrm{Cov}(X)$ *est une prétopologie sur* F_i (II 1.3) *et si pour tout* $X \in \mathrm{ob}\, F_i$, *les familles couvrantes de* $\mathrm{Cov}(X)$ *sont finies, alors pour tout* $Y \in \underline{F}$, *les familles couvrantes de* $\mathrm{Cov}(Y)$ *sont finies et* $Y \mapsto \mathrm{Cov}(Y)$ *est une prétopologie sur* $\underline{F}$.

8.3.7. — La seule chose à démontrer est que les familles $Y \mapsto \mathrm{Cov}(Y)$ possèdent la propriété (PT2) de (II 1.3) (stabilité par composition). Soit $i \in \mathrm{ob}\, I$, Y un objet de F_i, $(Y_\alpha \to Y)_{\alpha \in A} \in \mathrm{Cov}(Y)$. Soient de plus i_α, $\alpha \in A$, une famille d'objets de I, pour tout α, Z_α un objet de F_i et $(Z_{\alpha\beta} \xrightarrow{n_{\alpha\beta}} Z_\alpha)_{\alpha\beta \in B_\alpha}$ une famille de $\mathrm{Cov}(Z_\alpha)$. Enfin donnons nous pour tout $\alpha \in A$, un isomorphisme $\phi : \pi(Z_\alpha) \xrightarrow{\sim} \pi(Y_\alpha)$. En revenant à la définition des familles de $\mathrm{Cov}(X)$, $X \in \mathrm{ob}\, \underline{F}$ (8.3.2), on voit qu'il s'agit de démontrer que la famille

$$(\pi(Z_{\alpha\beta}) \xrightarrow{\pi(n_\alpha) \circ \phi_\alpha \circ \pi(n_{\alpha\beta})} \pi(Y))_{\alpha\beta \in \coprod_A B_\alpha}$$

appartient à $\mathrm{Cov}(\pi(Y))$ ce que nous ferons après cinq réductions.

8.3.8. — Réduction au cas où pour tout $\alpha \in A$, on a $\phi_\alpha = \pi(m_\alpha)$, $m_\alpha : Z_\alpha \to Y_\alpha$. Pour tout $\alpha \in A$, on a $\phi_\alpha = \pi(m_\alpha)\pi(s_\alpha)^{-1}$ (6.5) où s_α est un morphisme cartésien au-dessus de $f_\alpha : i'_\alpha \to i_\alpha$. On a donc des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
Z_{\alpha\beta} \arrow[d, "n_{\alpha\beta}"'] & f^*(Z_{\alpha\beta}) \arrow[l, "s_{\alpha\beta}"'] \arrow[d, "f_\alpha^*(n_{\alpha\beta})"] \\
Z_\alpha & f_\alpha^*(Z_\alpha) \arrow[l, "s_\alpha"']
\end{tikzcd}, \qquad \alpha\beta \in \coprod_A B_\alpha,$$

315 qui fournissant des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\pi(Z_{\alpha\beta}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\pi(n_{\alpha\beta})"] & \pi(f_\alpha^*(Z_{\alpha\beta})) \arrow[d, "\pi(f_\alpha^*(m_{\alpha\beta}))"] & \\
\pi(Z_\alpha) \arrow[r, "\pi(S_\alpha)^{-1}", "\sim"'] & \pi(f_\alpha^*(Z_\alpha)) \arrow[r, "\pi(m_\alpha)"] & \pi(Y_\alpha)
\end{tikzcd}, \qquad \alpha\beta \in \coprod_A B_\alpha.$$

Comme les familles $(f_\alpha^*(Z_{\alpha\beta}) \xrightarrow{f^*(n_\alpha)} f^*(Z_\alpha))$ appartiennent à $\mathrm{Cov}(f_\alpha^*(Z_\alpha))$, on peut se ramener au cas où pour tout α, on a $\phi_\alpha = \pi(m_\alpha)$.

8.3.9. — Réduction au cas où, pour tout $\alpha \in A$, $i_\alpha = j$ et $p(m_\alpha) = k : j \to i$. Posons $g_\alpha = p(m_\alpha)$. Comme I est cofiltrante et comme A est fini, il existe un objet j de I et des morphismes $h_\alpha : j \to i_\alpha$ tels que pour tout couple (α, α') on ait $g_\alpha h_\alpha = g_{\alpha'} h_{\alpha'} = k$. En utilisant les foncteurs images inverses h_α^* comme en 8.3.8, on se ramène au cas décrit.

8.3.10. — Réduction au cas où $i = j$ et $k : j \to i$ est l'identité. On a, pour tout α, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Z_\alpha \arrow[r, "m'_\alpha"] & k^*(Y_\alpha) \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[d, "k^*(n_\alpha)"'] & Y_\alpha \arrow[d, "n_\alpha"] \\
& k^*(Y) \arrow[r, "t"] & Y
\end{tikzcd},$$

où les morphismes t et t_α, $\alpha \in A$, sont cartésiens, où m'_α est au-dessus de l'identité de j et où
316 $t_\alpha \circ m'_\alpha = m_\alpha$. En remplaçant la famille $(Y_\alpha \to Y)\alpha \in A$ par la famille $(k^*(Y_\alpha) \to k^*(Y))_{\alpha \in A} \in \mathrm{Cov}(k^*(Y_\alpha))$, et les morphismes m_α par les morphismes m'_α, on est ramené au cas décrit.

Lemme 8.3.11. — *Soient j un objet de I et $m : X' \to X$ un morphisme de F_j tel que $\pi(m)$ soit un isomorphisme. Il existe un morphisme $\ell : j' \to j$ tel que $\ell^*(m)$ soit un isomorphisme.*

Montrons qu'il existe un morphisme $f : i \to j$ et un morphisme $q : f^*(X) \to f^*(X')$ tels que $f^*(m)q = \mathrm{id}_{f^*(X)}$ et tels que $\pi(q)$ soit un isomorphisme. En effet, il existe un isomorphisme $n : \pi(X) \to \pi(X')$ tel que $\pi(m) \circ n = \mathrm{id}_{\pi(X)}$. Il existe donc (6.5) deux morphismes $X \xleftarrow{s_1} Y_1 \xrightarrow{q_1} X'$, où s_1 est cartésien, tels que $n = \pi(q_1)\pi(s_1)^{-1}$. On a donc $\pi(m) \circ \pi(q_1) = \pi(s_1)$. Les morphismes mq_1 et s_1 de Y_1 dans X ont même image dans $\underline{F}$. Par suite (cf. la description des morphismes dans la limite inductive (6.5)), il existe un morphisme cartésien $s_2 : Y_2 \to Y_1$ tel que $mq_1s_2 = s_1s_2$. Posons $q_1s_2 = q_2$ et notons s_3 le morphisme cartésien s_1s_2. On a donc $mq_2 = s_3$. Le morphisme $q_2 : Y_2 \to X'$ se factorise de manière essentiellement unique en $Y_2 \xrightarrow{q} Y_3 \xrightarrow{s_4} X'$ où s_4 est cartésien et où q est au-dessus de l'identité de $p(Y_2)$. On a donc un diagramme commutatif

(8.3.11.1)
$$\begin{tikzcd} Y_3 \arrow[d, "s_4"'] & Y_2 \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "s_3"] \\ X' \arrow[r, "m"] & X.. \end{tikzcd}$$

Posons $p(s_4) = p(s_3) = f : i \to j$. On a $f^*(X') \simeq Y_3$, $f^*(X') \simeq Y_2$, et $f^*(m) : Y_2 \to Y_3$ rend commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} Y_3 \arrow[r, "f^*(m)"] \arrow[d, "s_4"'] & Y_2 \arrow[d, "s_3"] \\ X' \arrow[r, "m"] & X. \end{tikzcd}$$

On a donc $s_3 = s_3(f^*(m) \circ q)$; comme s_3 est cartésien et comme $f^*(m) \circ q$ est au-dessus de 317
l'identité de $p(Y_2)$, on a $f^*(m) \circ q = \mathrm{id}_{Y_2}$. De plus, il résulte de la commutativité du diagramme (8.3.11.1) que $\pi(q)$ est un isomorphisme.

Appliquons alors le résultat précédent au morphisme $q : f^*(X) \to f^*(X')$: il existe un morphisme $f' : j' \to i$ et un morphisme $q' : f'^*(X') \to f'^*(X)$, tels que $f'^*(q)q' = \mathrm{id}_{f'^*(f'^*(X'))}$. Mais en posant $\ell^* = ff'$; on a un isomorphisme $f'^*f^* \simeq \ell^*$. On a donc un morphisme $f'^*(q) : \ell^*(X) \to \ell^*(X')$ et un isomorphisme $f'^*f^* \simeq \ell^*$. On a donc un morphisme $f'^*(q) : \ell^*(X) \to \ell^*(X')$ et un morphisme $q' : \ell^*(X') \to \ell^*(X)$, tels que $\ell^*(m)f'^*(q) = \mathrm{id}_{\ell^*(X)}$ et $f'^*(q)q' = \mathrm{id}_{\ell^*(X')}$. Par suite $\ell^*(m)$ est un isomorphisme.

8.3.12. — Fin de la démonstration. Comme I est cofiltrante et A fini, il résulte de 8.3.11 qu'il existe un foncteur image inverse ℓ^* qui transforme tous les morphismes m_α, $\alpha \in A$, en isomorphismes. On se ramène donc au cas où les m_α sont des isomorphismes. Mais alors les familles couvrantes $(Z_{\alpha\beta} \to Z)_{\alpha\beta \in B_\alpha}$ sont déduites par le changement de base $m_\alpha : Z_\alpha \to Y_\alpha$ de familles couvrantes $(Y_{\alpha\beta} \to Y_\alpha)_{\alpha\beta \in B_\alpha} \in \mathrm{Cov}(Y_\alpha)$. On est donc ramené au cas où $Z_\alpha = Y_\alpha$ et $\Phi_\alpha = \mathrm{id}_{\pi(Y_\alpha)}$. Mais dans ce cas la famille $(Y_{\alpha\beta} \xrightarrow{n_\alpha \circ n_{\alpha\beta}} Y)_{\alpha\beta \in \coprod_A B_\alpha}$ appartient à $\mathrm{Cov}(Y)$ (propriété (PT2)). Donc son image par π appartient à $\mathrm{Cov}(\pi(Y))$ (8.3.2).

Théorème 8.3.13. — *Soient $p : F \to I$ un $\mathscr{U}$-topos fibré sur une catégorie cofiltrante essentiellement petite. Si pour tout objet i de I le topos fibre F_i est cohérent (2.3) et si pour tout morphisme $f : i \to j$, le morphisme de topos $f\cdot = (f^*, f_*) : F_i \to F_j$ est cohérent (3.1), alors le topos $\underset{\overleftarrow{I}}{\text{limtop}}\, F_i$ est cohérent et pour tout objet i de I, le morphisme canonique de topos*

$$\mu_i : \underset{\overleftarrow{I}}{\text{limtop}}\, F_i \longrightarrow F_i$$

est cohérent.

De plus, en notant F_{coh} la sus-catégorie pleine de F définie par les objets de F qui sont cohérents dans leur fibre (1.13), la catégorie F_{coh} est fibrée sur I et $\underrightarrow{F}_{\text{coh}}$ est canoniquement équivalente à la catégorie des objets cohérents de $\underset{\overleftarrow{I}}{\text{limtop}}\, F_i$

318 Pour tout $i \in \text{ob}\, I$, notons $(F_i)_{\text{coh}}$ le $\mathscr{U}$-site (muni de le topologie induite) des objets cohérents de F_i (1.13). Comme F_i est cohérent, F_i est le topos des faisceaux sur $(F_i)_{\text{coh}}$. Pour tout morphisme $f : i \to j$, les morphismes $f\cdot = (f^*, f_*)$ sont cohérents et par suite $f^*(F_j)_{\text{coh}} \subset (F_i)_{\text{coh}}$. On a donc un $\mathscr{U}$-site fibré $p_{\text{coh}} : F_{\text{coh}} \to I$, dont les sites fibres sont les sites $(F_i)_{\text{coh}}$ et dont le topos fibré associé est équivalent à $p : F \to I$. Par suite on a (8.2.3) :

$$\underset{\overleftarrow{I,f.}}{\text{limtop}}\, F_i \approxeq (\underrightarrow{F}_{\text{coh}})^{\sim} \tag{8.3.13.1}$$

Comme les topos F_i sont cohérents, les produits finis et les produits fibrés sont représentables dans $(F_i)_{\text{coh}}$ (2.2). De plus les foncteurs $f^* : (F_i)_{\text{coh}} \to (F_j)_{\text{coh}}$ sont exacts à gauche. Enfin, comme les objets de $(F_i)_{\text{coh}}$ sont quasi-compacts, les familles couvrantes finies forment une prétopologie. Il résulte alors de (8.3.4) que les produits finis et les produits fibrés sont représentables dans $\underset{\longleftarrow I^{\circ},F}{\lim}(F_i)_{\text{coh}}$ (remords au lemme 8.3.4. : Montrer que les foncteurs canoniques $(F_i)_{\text{coh}} \to \underrightarrow{F}_{\text{coh}}$ transforment l'objet final en l'objet final) et de (8.3.6) que les objet de $\underrightarrow{F}_{\text{coh}}$ sont quasi-compacts. Par suite (2.4.5), $\underset{\overleftarrow{I}}{\text{limtop}}\,(F_i)$ est cohérent. Enfin les morphismes canoniques $\mu_i : \underset{\overleftarrow{I}}{\text{limtop}}\,(F_i) \to F_i$ se déduisent, par passage aux topos des faisceaux, des morphismes de sites (8.2.3) :

$$(F_i)_{\text{coh}} \longrightarrow \underrightarrow{F}_{\text{coh}}$$

donc (3.3) les morphismes μ_i sont cohérents.

Démontrons la dernière assertion. On a (8.3.13.1)

$$\underset{\overleftarrow{\mathscr{I}}}{\text{limtop}}\,(F_i) \simeq (\underrightarrow{F}_{\text{coh}})^{\sim}.$$

Soit X un objet cohérent de $(F_{\text{coh}})^{\sim}$. Comme X est quasi-compact, il existe une famille couvrante finie $(Y_\alpha \to X)$ où $Y_\alpha \in \text{ob}\, \underrightarrow{F}_{\text{coh}}$ (1.1). Quitte à prendre un indice $i \in \text{ob}\, I$ assez petit, on peut supposer que les Y_α sont les images par $\mu_i : F_{i\text{coh}} \to \underrightarrow{F}_{\text{coh}}$ d'une famille Y'_α d'où, en prenant la somme directe des Y'_α (1.15), on voit qu'il existe un indice $i \in \text{ob}\, I$, un $Y' \in F_{i\text{coh}}$ et un morphisme surjectif $\mu_i(Y') \to X$. La relation d'équivalence $R = \mu_i(Y') \times_X \mu_i(Y')$
319 est alors un objet cohérent car $(\underrightarrow{F}_{\text{coh}})^{\sim}$ est un topos cohérent (2.2). Montrons tout d'abord que R est un objet de $\underrightarrow{F}_{\text{coh}}$. Par définition R est un sous-objet de $\mu_i(Y' \times Y')$ et comme R est cohérent, on peut, quitte à changer l'indice i, trouver une flèche $m : Z \to (Y' \times Y')$

de $F_{i\text{coh}}$ telle que $\operatorname{Im}(\mu_i(m)) = R$. Il en résulte que, F_i étant cohérent, $\operatorname{Im}(m)$ est cohérent dans F_i (1.17.1) et par suite appartient à $F_{i\text{coh}}$. Il existe donc un indice i et un diagramme $R \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} Y'$ de $F_{i\text{coh}}$ tel que $\mu_i(R) \underset{\mu_i(p_2)}{\overset{\mu_i(p_1)}{\rightrightarrows}} \mu_i(Y')$ soit une relation d'équivalence et tel que $X = \mu_i(Y')/\mu_i(R)$. Posons $X_i = \operatorname{coker}(p_1, p_2)$ et $R' = Y' \times_{X'_i} Y'$. On a un morphisme canonique dans $F_i : u : R \to R'$. De plus $\mu_i^*(u)$ est un isomorphisme. Donc, quitte à changer l'indice i, on peut supposer que $R = R'$, i.e. que R est une relation d'équivalence. Mais alors X_i appartient à $F_{i\text{coh}}$ (1.17.1) et par suite $X = \mu_i(X_i)$ appartient à $\underrightarrow{F}_{\text{coh}}$.

Corollaire 8.3.14. — *Soient I une catégorie cofiltrante essentiellement petite, $p : F \to I$ et $q : G \to I$ deux $\mathcal{U}$-topos fibrés sur I tels que pour tout objet i de I les topos F_i et G_i soient cohérents et tels que pour tout morphisme $f : i \to j$ les morphismes $f. : F_i \to F_j$ et $G_i \to G_j$ soient cohérents. Soit de plus $m : F \to G$ un morphisme cartésien de $\mathcal{U}$-topos fibrés tels que pour tout $i \in \operatorname{ob}(I)$, $m_i : F_i \to G_i$ soit cohérent. Alors le morphisme $\underleftarrow{m}$ déduit de m par passage à la limite projective est cohérent.*

Pour tout objet i de I, le morphisme m_i induit un foncteur $m^*_{i,\text{coh}} : G_{i,\text{coh}} \to F_{i,\text{coh}}$, d'où un foncteur cartésien $m^*_{\text{coh}} = G_{\text{coh}} \to F_{\text{coh}}$ qui est un morphisme du site fibré F_{coh} dans le site fibré G_{coh} (7.4.13). Le foncteur $\varinjlim_{I^\circ} m^*_{\text{coh}} : \varinjlim_{I^\circ} G_{\text{coh}} \to \varinjlim_{I^\circ} F_{\text{coh}}$ est un morphisme de sites qui fournit en passant aux topos correspondants le morphisme $\underleftarrow{m}$. L'assertion résulte alors de 8.3.13 et de 3.3.

Exercice 8.3.15. — Avec les notations de 8.3.13, montrer que si les F_i, $i \in I$, sont algébriques (2.3) et si les morphismes $f. : F_i \to F_j$, $f \in \operatorname{Fl}(I)$, sont cohérents, $\underset{\overleftarrow{I}}{\operatorname{limtop}}\, F_i$ est 320
algébrique et que $(\underset{\overleftarrow{I}}{\operatorname{limtop}}\, F_i)_{\text{coh}} \xrightarrow{\sim} \underrightarrow{F}_{\text{coh}}$.

8.4. Exemple : Topos locaux. —

8.4.1. — Soit $X = (X_i)_{i \in I}$ un topos fibré sur une catégorie I. On en déduit un topos fibré sur la catégorie $\operatorname{Pro}(I)$ (I 8.10) par la formule

$$X_\alpha = \underset{\overleftarrow{I_\alpha}}{\operatorname{limtop}}\, X_{i\alpha} \tag{8.4.1.1}$$

pour tout pro-objet $\alpha = (i_\alpha)$ de I (pour voir ceci on pourra généraliser aux pseudo foncteurs l'exercice I 8.2.8).

8.4.2. — Soient E un topos et $p : \operatorname{Fl}(E) \to E$ le topos fibré considéré dans 7.3.1. En prolongeant comme en 8.4.1, on obtient un topos fibré $\overline{\operatorname{Fl}(E)} \to \operatorname{Pro}(E)$. La catégorie $\operatorname{Point}(E)$ s'envoie par un foncteur pleinement fidèle dans $\operatorname{Pro}(E)$ (IV 6.8.5), d'où, par changement de base (7.1.9), un topos fibré $\operatorname{Loc}(E) \to \operatorname{Point}(E)$. La fibre $\operatorname{Loc}_p(E)$ en un point p de E est appelée le *topos localisé de E en le point p*. Ce topos dépend, d'après ce qui précède, de façon covariant du point p. On a, par définition,

$$\operatorname{Loc}_p(E) = \underset{\overleftarrow{X \in \operatorname{Vois}(p)}}{\operatorname{limtop}}\, E_{/X}, \tag{8.4.2.1}$$

où $\operatorname{Vois}(p)$ est la catégorie des voisinages de p (IV 6.8).

8.4.3. — Soit $m : p' \to p$ un morphisme de Point(E) (IV 6). On en déduit, pour tout $X \in$ Vois(p) un point p'_X de $E_{/X}$, d'où, par la propriété universelle de $\underleftarrow{\lim}\mathrm{top}$ 8.1 un point $\theta_p(m)$ de $\mathrm{Loc}_p(E)$. On définit ainsi un foncteur

$$\theta_p : \mathrm{Point}(E)_{/p} \longrightarrow \mathrm{Point}(\mathrm{Loc}_p(E)), \tag{8.4.3.1}$$

dont on constate immédiatement que c'est une équivalence de catégories. Par suite Point($\mathrm{Loc}_p(E)$) est canoniquement équivalent à la catégorie des générisations de p (IV 7.1.8). On a de plus une équivalence canonique de topos :

$$\mathrm{can}\cdot : \mathrm{Loc}_{\theta(m)}(\mathrm{Loc}_p(E)) \longrightarrow \mathrm{Loc}_{p'}(E),$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif à isomorphisme près

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Loc}_{\theta(m)}(\mathrm{Loc}_p(E)) \arrow[rr, "\mathrm{can}\,\cdot"] \arrow[dr, "\phi"'] & & \mathrm{Loc}_{p'}(E) \arrow[dl, "m"] \\
& \mathrm{Loc}_p(E) &
\end{tikzcd}$$

321 où ϕ est le morphisme canonique (8.4.2.1).

8.4.4. — Les topos localisés ne semblent présenter un intérêt que dans le cas des topos provenant de la géométrie algébrique ou tout au moins que dans le cas des topos possédant des propriétés de finitude convenables. Ainsi, lorsque E est le topos des faisceaux sur un espace topologique séparé, on constate immédiatement (à l'aide par exemple de 8.2.9) que les topos localisés sont des topos ponctuels. Par ailleurs dans ce cas, la catégorie Point(E) est discrète et la situation décrite en 8.4.2 est triviale. En revanche, soient $E = \mathrm{Top}(X)$ le topos des faisceaux pour la topologie de Zariski sur un schéma X, x in point de X, O_x l'anneau local de X en x, $Y = \mathrm{spec}(O_x)$. On constate que

$$\mathrm{Loc}_x(E) = \mathrm{Top}(Y).$$

Pour d'autres exemples provenant de la topologie étale, nous renvoyons à l'exposé VIII du présent séminaire.

8.4.5. — Lorsque E est localement cohérent (2.3), les topos localisés $\mathrm{Loc}_p(E)$ sont cohérents (on peut dans (8.4.2.1) se borner aux $X \in$ Vois(p) qui sont algébriques et cohérents et appliquer alors 8.3.13). Pour tout morphisme de points $m : p' \to p$, le morphisme de topos $m\cdot : \mathrm{Loc}_{p'}(E) \to \mathrm{Loc}_p(E)$ est cohérent (8.3.14).

8.4.6. — On appelle *topos local* un topos X tel que le foncteur $\Gamma(X, -)$ = « section sur X » (IV 4.3) soit un foncteur fibre (IV 6). Le point correspondant à ce foncteur fibre est appelé le *centre* du topos local. Lorsque E est localement cohérent, les topos localisés sont des topos locaux (1.2.3, 8.5.2 et 8.5.7). Le centre de $\mathrm{Loc}_p(E)$ est canoniquement isomorphe à $\theta_p(\mathrm{id}_p)$ (8.4.3.1)). L'image du centre de $\mathrm{Loc}_p(E$ dans E est isomorphe à p. Le topos localisé
322 $\mathrm{Loc}_p(E)$ muni du morphisme canonique $\mathrm{Loc}_p(E) \to E$ est la solution du problème universel (2-universel !) qui consiste à envoyer des topos locaux dans E de façon à envoyer le centre « sur » p.

8.4.7. — A propos des topos locaux, il se pose un certain nombre de problèmes que les rédacteurs n'ont pas abordés. Ainsi, si X est un topos local, l'objet final e de X possède un ouvert maximal $U \neq e$. Le complémentaire Y de U est un topos local qui ne possède pas d'ouvert non trivial. Un tel topos est-il ponctuel ? Soit U un topos et $X = (U, \Phi : U \to (\mathrm{Ens}))$ en topos obtenu par recollement. Quelles sont les conditions sur le foncteur de recollement Φ pour que X soit un topos local ?

8.5. Structure des faisceaux d'une limite projective filtrante de topos. —

8.5.1. — Dans ce numéro, $F = (F_i)_{i \in I}$ est un $\mathscr{U}$-topos fibré sur une petite catégorie cofiltrante I. On choisit un biscindage (7.1.4) de F, i.e. pour tout $f \in \mathrm{Fl}(I) : i \to j$ on choisit des morphismes des topos $f_. : F_i \to F_j$ tels que $f^* : F_j \to F_i$ soit le foncteur image inverse pour la structure fibrée. On a alors des isomorphismes canoniques $c_{f,g}$ possédant une propriété de cocycles (7.1.3). On note $\underleftarrow{F}$ la limite projective du topos fibré F (8.2.3) et pour tout $i \in \mathrm{ob}\, I$, on note

$$\mu_i : \underleftarrow{F} \longrightarrow F_i, \tag{8.5.1.1}$$

le morphisme canonique (8.1.3). On note $\mathrm{Top}(F)$ le topos total de F (7.4.3,3). D'après 8.2.9, le foncteur canonique $F \to \underrightarrow{F}$ définit un morphisme de topos

$$Q : \underleftarrow{F} \longrightarrow \mathrm{Top}(F). \tag{8.5.1.2}$$

Le topos F s'identifie à $\mathbf{Hom}_{\mathrm{Cart}/I^\circ}(I^\circ, F')$ (8.2.9) et le topos $\mathrm{Top}(F)$ s'identifie à $\mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, F')$ (7.4.7). Ces identifications faites, le morphisme Q n'est autre que le morphisme de plongement de $\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/I^\circ}(I^\circ, F')$ dans $\mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, F')$ (8.2.9) et pour tout objet M de F, on a

$$Q_*(M) = (i \longrightarrow \mu_{i*}(M)). \tag{8.5.1.3}$$

D'après 7.4.3.4, on a pour tout $i \in \mathrm{ob}\, I$, un morphisme de topos

$$\alpha_i : F_i \longrightarrow \mathrm{Top}(F). \tag{8.5.1.4}$$

Le diagramme 323

$$\begin{tikzcd} \underleftarrow{F} \arrow[rr, "\mu_i"] \arrow[dr, "Q"'] & & F_i \arrow[dl, "\alpha_i"] \\ & \mathrm{Top}(F) & \end{tikzcd} \tag{8.5.1.5}$$

n'est pas commutatif en général (même à isomorphisme près). Mais on a, par définition des morphismes en présence, un isomorphisme canonique

$$\alpha_i^* Q_* \simeq \mu_{i*}. \tag{8.5.1.6}$$

Lorsque i est un *objet final* de I, α_i est un plongement admettant une rétraction β_i : $\mathrm{Top}(F) \to F_i$ (7.4.12) et le diagramme

(8.5.1.7)
$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\mu_i"] \arrow[dr, "Q"'] & & F_i \arrow[dl, "\beta_i"] \\ & \mathrm{Top}(X) & \end{tikzcd} ,$$

est commutatif à isomorphisme canonique près.

Proposition 8.5.2. — *Soit $j \mapsto M_j$ un objet de* $\mathrm{Top}(F)$. *Il existe un isomorphisme fonctoriel*

(8.5.2.1)
$$Q^*(j \mapsto M_j) \simeq \varinjlim_{I^\circ} \mu^j_* M_j .$$

Un objet de $\mathrm{Top}(F)$ (7.1.3) consiste en la donnée d'une application $j \mapsto M_j$, $M_j \in \mathrm{ob}\, F_j$, et en la donnée, pour tout morphisme $f : i \to j$, d'un morphisme

(8.5.2.2)
$$\beta_f : M_j \longrightarrow f_* M_i$$

ou de manière équivalence par adjonction, d'un morphisme

(8.5.2.3)
$$\beta'_f : f^* M_j \longrightarrow M_i,$$

les morphismes β'_f étant soumis à la condition que pour tout couple de morphismes composables $i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k$, le diagramme ci-après soit commutatif :

(8.5.2.4)
$$\begin{tikzcd} f^* g^* M_k \arrow[r, "f^*\beta'_g"] \arrow[d, dash, "c^*{g,f}"'] & f^* M_j \arrow[d, "\beta'_f"] \\ (gf)^* M_k \arrow[r, "\beta'_{gf}"] & M_i \end{tikzcd}$$

324 Rappelons de plus (8.1.3.1.) que pour tout morphisme $f : i \to j$, on a un isomorphisme $b_f : f.\mu_i \xrightarrow{\sim} \mu_j$, et que pour tout couple de morphismes composables $i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k$, on a un diagramme commutatif :

(8.5.2.5)
$$\begin{tikzcd} g{\cdot}f{\cdot}\mu_i \arrow[r, "c_{g,f}"] \arrow[d, "g{\cdot}(b_f)"] & (gf){\cdot}\mu_i \arrow[d, "b_{gf}"] \\ g{\cdot}\mu_j \arrow[r, "b_g"] & \mu_k \end{tikzcd}$$

Soit alors $f : i \to j$ un morphisme de I. Notons

(8.5.2.6)
$$t_f : \mu_j^*(M_j) \longrightarrow \mu_i^*(M_i)$$

le morphisme composé $\mu_j^*(M_j) \xrightarrow{b_f^*} \mu_j^*(f^*(M_j)) \xrightarrow{\mu_i^*(\beta_f')} \mu_i^*(M_i)$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la commutativité des diagrammes (8.5.2.4)) et ((8.5.2.5) entraîne que pour tout couple de morphismes composables $i \to j \to k$, on a

$$t_f t_g = t_{gf}. \tag{8.5.2.7}$$

Par suite on a défini un foncteur $I^\circ \to \underleftarrow{F}$ dont on peut considérer la limite inductive $\varinjlim_{I^\circ} \mu_i^*(M_i)$. Soit alors N un objet de $\underleftarrow{F}$. On a

$$\mathrm{Hom}(\varinjlim_{I^\circ} \mu_i^*(M_i), N) \simeq \varprojlim_{I^\circ} \mathrm{Hom}(\mu_i^*(M_i), N), \tag{8.5.2.8}$$

d'où, par adjonction, un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(\varinjlim_{I^\circ} \mu_i^*(M_i), N) \simeq \varprojlim_{I^\circ} \mathrm{Hom}_{F_i}(M_i, \mu_{i*}(N)). \tag{8.5.2.9}$$

On se propose d'interpréter le deuxième membre de (8.5.2.9). Pour cela, notons, pour tout 325
morphisme $f : i \to j$, par

$$d_f : \mathrm{Hom}_{F_i}(M_i), \mu_{i*}(N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{F_j}(M_j, \mu_{j*}(N)).$$

le morphisme de transition du système projectif qui figure dans (8.5.2.9)). Il résulte de la définition des morphismes t_f ((8.5.2.6) que l'application d_f associe à un morphisme

$$u_i : M_i \longrightarrow \mu_{i*}(N)$$

le morphisme

$$d_F(u_i) : M_j \longrightarrow \mu_{j*}(N),$$

obtenu en composant les morphismes

$$M_j \xrightarrow{\beta_f} f_*(M_i) \xrightarrow{f_*(u_i)} f_*\mu_{i*}(N) \xrightarrow{b_f} \mu_{j*}(N).$$

Par suite un élément du deuxième membre de (8.5.2.9) s'interprète comme une famille de morphismes $u_i : M_i \to \mu_{i*}(N)$, $i \in \mathrm{ob}\, I$, telle que pour tout $f : i \to j$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} M_j \arrow[r] \arrow[d, "u_j"'] & f_*(M_i) \arrow[d, "f_*(u_i)"] \\ \mu_{j*}(N) \arrow[r, "\sim"] & f_*\mu_{i*}(N) \end{tikzcd}$$

soit commutatif, c'est-à dire comme un morphisme de la section $(i \mapsto M_i) \in \mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, F')$ dans la section $Q_*(N)$. On a donc un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}(\varinjlim_{I^\circ} \mu_{i*}(M_i), N)) \simeq \mathrm{Hom}((i \mapsto M_i), Q_*(N));$$

d'où la proposition par adjonction.

Proposition 8.5.3. — *Si pour tout $f : i \to j \in \mathrm{Fl}(I)$ les foncteurs $f_* : F_i \to F_j$ commutent aux petites limites inductives filtrantes, on a, pour tout section $(i \mapsto M_i) \in \mathrm{Hom}_I^\circ(I^\circ, F')$:*

$$Q_* Q^*(i \mapsto M_i) \simeq i \mapsto \varinjlim_{f : j \to i} f_* M_j. \tag{8.5.3.1}$$

326 Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter en termes des β_f (8.5.2.2) et des $c_{f,g}$ (8.5.1) les morphismes de transition des systèmes inductifs $(f : j \to i) \mapsto f_*(M_j)$ et les morphismes de transition de la section $i \mapsto \varinjlim_{f : j \to i} f_* M_i$. Comme les foncteurs f_* commutent aux limites inductives filtrantes, la section $i \mapsto \varinjlim_{f : j \to i} f_* M_j$ est cartésienne. De plus on a un morphisme naturel u de $(i \mapsto M_i)$ dans la section $(i \mapsto \varinjlim_{f : j \to i} f_* M_j)$, et il est clair que tout morphisme de $(i \mapsto M_i)$ dans une section cartésienne se factorise d'une manière unique par u, d'où l'isomorphisme (8.5.3.1).

Corollaire 8.5.4. — *Sous les hypothèses de 8.5.3 le foncteur Q_* commute aux petites limites inductives filtrantes.*

Soit $\alpha \mapsto N^\alpha$ un petit système inductif filtrant de $\underleftarrow{F}$. Posons $M^\alpha = Q_*(N^\alpha)$, de sorte que M^α est une section $i \mapsto M_i^\alpha$. On a $N^\alpha \simeq Q^* Q_*(N^\alpha)$ et comme Q^* commute aux limites inductives, on a $\varinjlim_\alpha N^\alpha \simeq Q^*(\varinjlim_\alpha M^\alpha)$. Les limites inductives dans $\mathrm{Top}(F) = \mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, F')$ se calculent fibre par fibre. On a donc $\varinjlim_\alpha M \simeq (i \mapsto \varinjlim_\alpha M_i^\alpha)$. En vertu de (8.5.3.1), on a

$$Q_*(\varinjlim_\alpha N^\alpha) \simeq Q_* Q^*(\varinjlim_\alpha M^\alpha) \simeq i \mapsto \varinjlim_{f : j \to i} f_*(\varinjlim_\alpha M_j^\alpha).$$

Comme les foncteurs f_* commutent aux limites inductives filtrantes, il vient :

$$Q_*(\varinjlim_\alpha N^\alpha) \simeq i \mapsto \varinjlim_{f : j \to i} \varinjlim_\alpha f_*(M_j^\alpha) \simeq i \mapsto \varinjlim_\alpha \varinjlim_{f : j \to i} f_*(M_j^\alpha) \simeq \varinjlim_\alpha Q_*(N^\alpha).$$

Corollaire 8.5.5. — *Si les foncteurs $f_* : F_i \to F_j$ commutent aux petites limites inductives filtrantes, on a, pour tout objet i de I et pour tout $M_i \in \mathrm{ob}\, F_i$*

$$\mu_{i*} \mu_i^*(M_i) \simeq \varinjlim_{f : j \to i} f_* f^*(M_i). \tag{8.5.5.1}$$

Quitte à faire le changement de base $I/i \to I$, on peut supposer que i est un objet final de I
327 (8.2.1). Le morphisme $\mu_i : \underleftarrow{F} \to F_i$ est alors le morphisme composé des morphismes (8.2.9) et (7.4.12) :

$$Q : \underleftarrow{F} \longrightarrow F^\sim,$$
$$\beta_i : (\alpha_{i!}, \alpha_i^*) : F^\sim \longrightarrow F_i.$$

On a donc $\mu_i^*(M_i) \simeq Q^* \beta_i^*(M_i)$, où $\beta_i^*(M_i)$ est la section $(f : i \to j) \mapsto f^*(M_i)$ dont les morphismes de transition sont déduits des $c_{f,g}$. L'assertion résulte alors de 8.5.3.

Corollaire 8.5.6. — *Sous les hypothèses de 8.5.5, les foncteurs*

$$\mu_{i*} : \underleftarrow{F} \longrightarrow F_i$$

commutent aux limites inductives filtrantes.

Le foncteur μ_{i*} est composé du foncteur Q_* qui commute aux limites inductives filtrantes, et du foncteur « restriction à la fibre en i », qui commute aux limites inductives.

Corollaire 8.5.7. — *Sous les hypothèses de 8.5.3, soient i un objet de I et X un objet de F_i tel que le foncteur* $\mathrm{Hom}(X,-)$ *sur F_i commute aux limites inductives filtrantes. Alors le foncteur* $\mathrm{Hom}(\mu_i^*(X),-)$ *commute aux limites inductives filtrantes et pour tout objet M_i de F_i on a*

$$\mathrm{Hom}(\mu_i^*(X),\mu_i^*(M_i)) \simeq \varinjlim_{f:j\to i} \mathrm{Hom}(f^*(X),f^*(M_i)). \tag{8.5.7.1}$$

Pour tout objet $(j \mapsto M_j)$ de $\mathrm{Top}(F)$ on a

$$\mathrm{Hom}(\mu_i^*(X),Q^*(j\mapsto M_j)) \simeq \varinjlim_{f:j\to i} \mathrm{Hom}(f^*(X),M_j). \tag{8.5.7.2}$$

Le foncteur $\mathrm{Hom}(\mu_i^*(X),-)$ est isomorphe au foncteur $\mathrm{Hom}(X,\mu_{i*}(-))$ et ce dernier commute aux limites inductives filtrantes (8.5.4). D'après (8.5.5.1), on a

$$\mathrm{Hom}(\mu_i^*(X),\mu_i^*(M_i)) \simeq \mathrm{Hom}(X,\mu_{i*},\mu_i^*(M_i)) \simeq \mathrm{Hom}(X,\varinjlim_{f:j\to i} f_*f^*(M_i)),$$

d'où la formule (8.5.7.1)). De même, d'après ((8.5.3.1), on a

$$\mathrm{Hom}(\mu_i^*(X),Q^*(j\mapsto M_j)) \simeq \mathrm{Hom}(X,\mu_{i*}Q^*(j\mapsto M_j)) \simeq \mathrm{Hom}(X,\varinjlim_{f:j\to i} f_*(M_j)),$$

d'où la formule (8.5.7.2). 328

Proposition 8.5.8. — *Soient $G \to I$ un $\mathscr{U}$-topos fibré et $m : F \to G$ un morphisme cartésien de topos fibrés (7.1.15). On utilise pour G les notations introduites en 8.1.1. Soit $\underleftarrow{m} : \underleftarrow{F} \to \underleftarrow{G}$ le morphisme déduit de m par passage à la limite projective (8.1.4). Le diagramme de topos et de morphismes de topos :*

$$\begin{tikzcd} \underleftarrow{F} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "\underleftarrow{m}"] & \mathrm{Top}(F) \arrow[d, "m^{\sim}"] \\ \underleftarrow{G} \arrow[r, "Q"] & \mathrm{Top}(G) \end{tikzcd} \tag{8.5.8.1}$$

est commutatif à isomorphisme près. Pour tout objet N de $\underleftarrow{F}$, on a

$$\underleftarrow{m}_*(N) \simeq \varinjlim_{I^\circ} \mu_j^* m_{j*}\mu_{j*}(N). \tag{8.5.8.2}$$

La commutativité du diagramme (8.5.8.1) résulte immédiatement des définitions (8.2.8 et 8.5.1). On a $\underleftarrow{m}_*(N) \simeq Q^*Q_*\underleftarrow{m}_*(N)$ et, en vertu de la commutativité de (8.5.8.1)), $\underleftarrow{m}_*(N \simeq Q^*m_*^{\sim}Q_*(N)$. Par suite, on a un isomorphisme $\underleftarrow{m}_*(N) \simeq Q^*m_*^{\sim}(j \mapsto \mu_{j*}(N))$. Le foncteur $m_*^{\sim}$ n'est autre que le foncteur $\mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ,m_*)$ (7.4.10), et par suite on a un isomorphisme canonique $\underleftarrow{m}_*(N) \simeq Q^*(j \mapsto m_{j*}\mu_{j*}(N))$. La formule (8.5.8.2) résulte alors de 8.5.2.

Proposition 8.5.9. — *Avec les hypothèses et notations de 8.5.8, on suppose de plus que pour tout objet i de I, le foncteur $m_{i*} : F_i \to G_i$ commute aux limites inductives filtrantes et que pour tout morphisme $f : i \to j$ de I le foncteur $f_* : F_i \to F_j$ commute aux limites inductives* *filtrantes. Alors le foncteur* $\underleftarrow{m}_* : \underleftarrow{F} \to \underleftarrow{G}$ *commute aux limites inductives filtrantes, et pour tout objet* $(i \mapsto M_i)$ *de* $\mathrm{Top}(\overleftarrow{F})$ *on a un isomorphisme canonique :*

(8.5.9.1) $$\underleftarrow{m}_* Q^*(i \mapsto M_i) \simeq \varinjlim_{I^\circ} \mu_j^* m_{j*}(M_j).$$

329 La première assertion résulte de (8.5.8.2)) et de (8.5.6. D'après (8.5.8.2)) et ((8.5.3.1), on a un isomorphisme fonctoriel :

$$\underleftarrow{m}_* Q^*(i \mapsto M_i) \simeq \varinjlim_{i} \mu_i^* m_{i*}(\varinjlim_{f:j\to i} f_*(M_j)).$$

En utilisant la commutation des m_{i*} aux limites inductives filtrantes et les isomorphismes $m_{i*} f_* \simeq f_* m_{j*}$ (7.1.6), on obtient :

$$\underleftarrow{m}_* Q^*(i \mapsto M_i) \simeq \varinjlim_{i} \mu_i^* (\varinjlim_{f:j\to i} f_* m_{j*}(M_j)).$$

Comme les foncteurs μ_i^* commutent aux limites inductives, il vient :

$$\underleftarrow{m}_* Q^*(i \mapsto M_i) \simeq \varinjlim_{i} \varinjlim_{f:j\to i} \mu_i^* f_* m_{j*}(M_j).$$

Ce dernier objet peut être interprété comme une limite inductive sur la catégorie $\mathrm{Fl}(I)^\circ$ où $\mathrm{Fl}(I)$ est la catégorie des morphismes de I. Soit alors $\phi : I \to \mathrm{Fl}(I)$ le foncteur qui associe à tout objet i de I le morphisme identique de I. Le foncteur $\phi^\circ : I^\circ \to \mathrm{Fl}(I^\circ)$ est cofinal et par suite (I 8.1) on a un isomorphisme canonique

$$\underleftarrow{m}_* Q^*(i \mapsto M_i) \simeq \varinjlim_{I^\circ} \mu_j^* m_{j*}(M_j).$$

Corollaire 8.5.10. — *Sous les conditions de 8.5.9, pour tout objet i de I et tout objet M_i de F_i, on a un isomorphisme canonique*

(8.5.10.1) $$\underleftarrow{m}_* \mu_i^*(M_i) \simeq \varinjlim_{f:j\to i} \mu_j^* m_{j*} f^*(M_i).$$

La démonstration est analogue à celle du corollaire 8.5.5.

Remarque 8.5.11. — Rappelons que le foncteur image directe par un morphisme cohérent entre topos cohérents commute aux limites inductives filtrantes (5.1). Par suite les propositions 8.5.3 à 8.5.7 et 8.5.9, 8.5.10 s'appliquent lorsque les topos fibrés envisagés sont cohérents et les morphismes de topos fibrés envisagés sont cohérents.

8.6. $\mathscr{U}$-topos fibrés annelés. —

8.6.1. — On dit qu'un $\mathcal{U}$-topos fibré est *annelé* s'il est muni d'un faisceau d'anneaux sur
330 le site total (7.4.1). Soit $p : F \to I$ un $\mathcal{U}$-topos fibré. Choisissons un biscindage (7.1.4). Il résulte de 7.4.7 que se donner un faisceau d'anneaux sur F revient à se donner, pour tout objet i de I, un anneau A_i de F_i, et pour tout morphisme $f : i \to j$, un morphisme $\phi_f : A_j \to f_* A_i$, la famille des ϕ_f étant soumise à des conditions de compatibilité explicitées dans *loc. cit.*. Les morphismes de topos $f. : F_i \to F_j$ sont donc des morphismes de topos annelés (respectivement par A_i et A_j) (IV 11), et la structure annelé sur F et le choix des morphismes $f.$ fournit un pseudo-foncteur de I dans la 2-catégorie des topos annelés. Réciproquement, lorsqu'on se donne un tel pseudo-foncteur, on peut reconstruire un $\mathcal{U}$-topos fibré annelé qui lui donne naissance.

8.6.2. — On peut comme en 8.1, définir la notion de limite projective d'un $\mathcal{U}$-topos annelé $(F_i, A_i, i \in I)$. Nous supposerons que cette généralisation immédiate a été faite et nous appliquerons librement à cette situation le langage introduit dans 8.1. Lorsqu'elle existe, cette limite projective est un $\mathcal{U}$-topos annelé (H, B), et on a pour tout objet i de I des morphismes de topos annelés $\mu_i : (H, B) \to (F_i, A_i)$. Si le topos fibré F (non annelé) admet une limite projective $\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i$, et si le système inductif d'anneaux $i \mapsto \mu_i^*(A_i)$ admet une limite inductive $\varinjlim_{I^\circ} \mu_i^* A_i$ dans la catégorie des anneaux de $\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i$ (ce qui est toujours le cas si I est petite) alors le topos annelé $\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i, \varinjlim_{I^\circ} \mu_i^* A_i)$ est de façon évidente une limite projective du topos fibré annelé considéré.

8.6.3. — Les formules du numéro 8.5. établies pour les faisceaux d'ensembles sont valables pour les faisceaux abéliens. Elles sont aussi valables pour les faisceaux de modules, à condition d'interpréter les foncteurs images inverses qui y figurent comme des foncteurs images inverses au sens des faisceaux de modules (IV 1.1). Nous en laissons la vérification au lecteur.

8.6.4. — Soit $(p : F \to I, A)$ un $\mathcal{U}$-topos fibré annelé sur une catégorie cofiltrante. On dit que $(p : F \to I, A)$ est $\mathcal{U}$-topos fibré annelé plat à droite (resp. à gauche) si pour tout morphisme $f : i \to j$, le morphisme $f. : (F_i, A_i) \to (F_j, A_j)$ est un morphisme plat à droite (resp. à gauche) de topos annelés (V 1.8). Supposons I essentiellement petite. Alors le morphisme de topos annelé $Q : (\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i, (\varinjlim_{I^\circ} \mu_i^*(A_i)) \to (\mathrm{Hom}_{I^\circ}(I^\circ, F'), A)$ (8.5.1) 331
est plat à droite (resp. à gauche), comme il résulte de la définition et de 8.5.2, et ceci est valable sans hypothèses de platitude sur les morphismes de transition $f.$. Si on suppose de plus que $(p : F \to I, A)$ est un $\mathcal{U}$-topos fibré annelé plat à droite (resp. à gauche), les morphismes $\mu_i : (\underleftarrow{\mathrm{limtop}}_{I} F_i, (\varinjlim_{I^\circ} \mu_i^* A_i) \to (F_i, A_i)$ sont plats à droite (resp. à gauche). Ceci résulte de ce que l'image inverse d'un module plat est plat (V 1.7.1), et de ce qu'une limite inductive filtrante de Modules plats est un Module plat. On démontre par les mêmes arguments le fait suivant : Si $m : (F_i, A_i, i \in I) \to (G_i, A_i, i \in I)$ est un morphisme cartésien de $\mathcal{U}$-topos fibrés annelés sur une catégorie cofiltrante essentiellement petite et si pour tout objet $i \in \mathrm{ob}(I)$, le morphisme m_i est plat à droite (resp. à gauche), alors le morphisme $\underset{\sim}{m}$ déduit de m par passage à la limite projective est plat à droite (resp. à gauche).

8.7. Cohomologie des faisceaux d'une limite projective de topos. —

8.7.1. — Dans ce numéro, I désigne une petite catégorie cofiltrante, $(p : F \to I, A)$ et $(q : G \to I, B)$ deux $\mathcal{U}$-topos fibrés annelés, $m : (p : F \to I, A) \to (q : G \to I, B)$ un morphisme de U-topos fibrés annelés. On suppose que pour tout morphisme $f : i \to j$ de I, les foncteurs dérivés $R^n f_*$, $n \in \mathbf{N}$, du foncteur $f_* : \mathrm{Mod}(F_i, A_i) \to \mathrm{Mod}(F_j, A_j)$ pour les modules, commutent aux limites inductives filtrantes, et que pour tout objet $i \in I$, les foncteurs dérivés $R^n m_{i*}$ du foncteur $m_{i*} : (F_i, A_i) \to (G_i, B_j)$ pour les modules[(vii)] commutent aux limites inductives filtrantes. Rappelons que ces hypothèses sont satisfaites lorsque les catégories F_i, G_i $(i \in \mathrm{ob}(I))$ sont *cohérentes* et lorsque les morphismes $f. : F_i \to F_j$, $(f : i \to j \in F1(I))$ et $m_i : F_i \to G_i$, $(i \in I)$ sont *cohérents* (5.2). On utilise les notations de 8.5.1. De plus on note $\underline{A}$ (resp. $\underline{B}$) le faisceau $\varinjlim \mu_i^*(A_i)$ (resp. $\varinjlim \mu_i^*(B_i)$). Enfin pour les Modules, on utilise la notation μ_i^{-1} pour désigner l'image inverse au sens des faisceaux abéliens en réservant la notation μ_i^* pour l'image inverse au sens des Modules (IV 11).

332 ***Lemme 8.7.2.*** — *Soit $j \mapsto M_j$ un A-Module injectif de* $\mathrm{Top}(F)$*. Alors $Q^*(j \mapsto M_j)$ est un A-Module acyclique pour $\underleftarrow{m}_*$ et pour tout $i \in \mathrm{ob}(I)$, M_i est flasque.*

Soient $i \in \mathrm{ob}(I)$ et e_i un objet final de F_i. Le U-topos fibré $F_{/e_i} \to I_{/i}$ est déduit de $F \to I$ par le changement de base $I_{/i} \to I$. Le faisceau $j \to M_j$ étant injectif est flasque (V 4.6). Sa restriction au topos localisé $F_{/e_i}$ est flasque (V 4.12). Le foncteur de restriction de $F_{/e_i}$ à F_i est un foncteur image directe par un morphisme de topos (7.4.12). Par suite, il transforme les Modules flasques en Modules flasques (V 5.2). Donc M_i est flasque.

Démontrons la première assertion du lemme. Posons $N' = Q^*(j \mapsto M_j)$. D'après (8.5.3.1)), on a, pour tout $i \in \mathrm{ob}(I$

$$\mu_{i*}(N') = \mu_{i*} Q^*(j \mapsto M_j) \simeq \varinjlim_{f : j \to i} f_*(M_j).$$

En utilisant l'hypothèse (8.7.1), on voit que le faisceau N' possède la propriété suivante :

(P) Pour tout objet $i \in \mathrm{ob}(I)$, $\mu_{i*}(N')$ est m_{i*}-acyclique, et pour tout morphisme $f : i \to j$ de I, $\mu_{i*}(N')$ est f_*-acyclique.

Il suffit de montrer que tout objet N' qui possède la propriété (P) est $\underleftarrow{m}_*$-acyclique. Comme les injectifs possèdent la propriété (P), il suffit de vérifier les deux propriétés suivantes (V 0.4) : Pour tout suite exacte $0 \to N' \to N'' \to 0$, où N' et N possèdent la propriété (P), (a) N'' possède la propriété (P) et (b) $m_*(N) \to m_*(N'')$ est un épimorphisme. La vérification de (a) est triviale. Vérifions (b). Posons $K = \mathrm{coker}(Q_*(N') \to Q_*(N))$ de sorte que K est la section $(i \mapsto K_i = \mathrm{coker}(\mu_{i*}(N') \to \mu_{i*}(N)))$. Pour tout $f : i \to j$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & f_*\mu_{i*}(N') \arrow[r] & f_*\mu_{i*}(N) \arrow[r] & f_*(K_i) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mu_{j*}(N') \arrow[r] \arrow[u] & \mu_{j*}(N) \arrow[r] \arrow[u] & K_j \arrow[r] \arrow[u] & 0.
\end{tikzcd}$$

333 Comme $\mu_{i*}(N')$ est f_*-acyclique, la suite horizontale du haut est exacte. Comme $i \mapsto$

vii. Pour fixer les idées nous prendrons les modules à gauche.

$\mu_{i*}(N')$ et $i \mapsto \mu_{i*}(N)$ sont des sections cartésiennes, les deux premiers morphismes verticaux sont des isomorphismes. Par suite le morphisme canonique $K_j \to f_*(K_i)$ est un isomorphisme et $i \mapsto K_i$ est une section cartésienne. Donc K est de la forme $Q_*(K')$, et les morphismes canoniques $Q_*(N) \to K$ et $K \to Q_*(N'')$ sont de la forme $Q_*(u)$ et $Q_*(v)$ respectivement, car Q_* est pleinement fidèle. Comme Q^* est exact et comme Q^*Q_* est isomorphe à l'identité, v est un isomorphisme et par suite $Q_*(v)$ est un isomorphisme. La suite $0 \to Q_*(N') \to Q_*(N) \to Q_*(N'') \to 0$ est donc exacte et par suite, pour tout objet i de I, la suite $0 \to \mu_{i*}(N) \to \mu_{i*}(N') \to \mu_{i*}(N'') \to 0$ est exacte. Comme $\mu_{i*}(N')$ est m_{i*}-acyclique, la suite $0 \to m_{i*}\mu_{i*}(N') \to m_{i*}\mu_{i*}(N) \to m_{i*}\mu_{i*}(N'') \to 0$ est exacts. De plus on a un isomorphisme $\underleftarrow{m}_* \simeq \varinjlim_{I^\circ} \mu_j^{-1} m_{j*}\mu_{j*}$ (8.5.8.2). Le foncteur μ_j^{-1} est exact et les limites inductives filtrantes sont exactes. Donc la suite $0 \to \underleftarrow{m}_*(N') \to \underleftarrow{m}_*(N) \to \underleftarrow{m}_*(N'') \to 0$ est exacte.

Théorème 8.7.3. — *Les notations et hypothèses sont celles de 8.7.1. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, le foncteur dérivé $R^n\underleftarrow{m}_*$ commute aux limites inductives filtrantes, et on a un isomorphisme fonctoriel pour tout $\underleftarrow{A}$-Module $j \mapsto M_j$:*

(8.7.3.1)
$$R^n m_* Q^*(j \longrightarrow M_j) \sim \varinjlim_{I^\circ} \mu_j^* R^n m_{j*}(M_j).$$

On a $Q^{-1}(A) = \underline{A}$, et par suite l'image réciproque pour les Modules est isomorphe à l'image réciproque pour les faisceaux abéliens. On en déduit par 8.5.8.2 que pour toute section $j \mapsto M_j$, on a un isomorphisme canonique $\varinjlim_{I^\circ} \mu_j^{-1}(M_j) \simeq \varinjlim_{I^\circ} \mu_j^*(M_j)$. De plus, sous les hypothèses de 8.7.1, on a un isomorphisme canonique (8.5.9.1) $\underleftarrow{m}_* Q^*(j \mapsto M_j) \simeq \varinjlim_{I^\circ} \mu_j^{-1} m_{j*}(M_j)$. Comme pour tout injectif $j \mapsto M_j$, les M_j sont flasques et $Q^*(j \to M_j)$ est acyclique pour $\underleftarrow{m}_*$ (8.7.2), on a un isomorphisme $R^n\underleftarrow{m}_*(Q^*(j \mapsto M_j)) \simeq \varinjlim_{I^\circ} \mu_j^{-1} R^n m_{j*}(M_j)$, d'où la formule (8.7.3.1) en utilisant ce qui précède. La première assertion résulte immédiatement de la formule (8.7.3.1).

Corollaire 8.7.4. — *On a des isomorphismes fonctoriels pour $n \in \mathbf{Z}$:* 334

(8.7.4.1)
$$R^n \underleftarrow{m}_*(N) \simeq \varinjlim_{I^\circ} \mu_j^* R^n m_{j*}\mu_{j*}(N)).$$

En effet N est isomorphe à $Q^*(j \mapsto \mu_{j*}(N))$.

Corollaire 8.7.5. — *Pour tout objet i de I, pour entier n et tout A_i-Module M_i, on a un isomorphisme fonctoriel*

(8.7.5.1)
$$R^n \underleftarrow{m}_* \mu_i^*(M_i) \simeq \varinjlim_{f:j\to i} \mu_j^* R^n m_{j*} f^*(M_i).$$

Quitte à faire le changement de base $I_{/i} \to I$, on peut supposer que i est un objet final de I (8.2.1). L'objet $\mu_i^*(M_i)$ est alors isomorphe à $Q^*(f : j \to i) \mapsto f^*(M_i))$ (cf. 8.5.5).

Corollaire 8.7.6. — *Soit i un objet de I et n un entier. On a un isomorphisme fonctoriel en la section $j \mapsto M_j$:*

(8.7.6.1)
$$R^n m_{i*} Q^*(j \mapsto M_j) \simeq \varinjlim_{f : j \to i} R^n f_*(M_j).$$

On a un isomorphisme en le $\underrightarrow{A}$-Module N :

(8.7.6.2)
$$R^n \mu_{i*}(N) \simeq \varinjlim_{f : j \to i} R^n f_* \mu_{j*}(N)).$$

On a un isomorphisme fonctoriel en le A_i-Module M_i :

(8.7.6.3)
$$R^n \mu_{i*} \mu_i^*(M_i) \simeq \varinjlim_{f : j \to i} R^n f_* f_*(M_i)).$$

Les foncteurs $R^n \mu_{i*}$ commutent aux limites inductives filtrantes.

En faisant le changement de base $I_{/i} \to I$ on se ramène au cas où i est un objet final de I. Les formules (8.7.6.1)) et ((8.7.6.2) sont alors des cas particuliers des formules (8.7.3.1)), ((8.7.4.1) et (8.7.5.1), respectivement obtenus en prenant pour G le topos fibré constant de fibre F_i et pour morphisme m le morphisme $(f_\cdot, f \in \mathrm{ob}(I_{/i}))$. La dernière assertion résulte de (8.7.6.2) compte tenu de (8.5.4).

335 ***Corollaire 8.7.7.*** — *Soient i un objet de I, X un objet de F_i tel que les foncteurs $H^n(X, -)$, $n \in$ **N**, commutent aux limites inductives filtrantes. On a pour tout n un isomorphisme canonique fonctoriel en le A_i-Module M_i :*

(8.7.7.1)
$$H^n(\mu_i^*(X), \mu_i^*(M_i)) \simeq \varinjlim_{f : j \to i} H^n(f^*(X), f^*(M_i))$$

et les foncteurs $H^n(\mu_i^*(X), -)$ commutent aux limites inductives filtrantes. En particulier si les foncteurs $H^n(F_i, -)$ commutent aux limites inductives filtrantes, les foncteurs $H^n(\underleftarrow{F}, -)$ commutent aux limites inductives filtrantes, et on a des isomorphismes canoniques, fonctoriels en les A_i-Modules M_i

(8.7.7.2)
$$H^n(\underleftarrow{F}, \mu_i^*(M_i)) \simeq \varinjlim_{f : j \to i} H^n(F_j, f^*(M_i)).$$

Il résulte de (V 5.3) qu'on a deux suites spectrales

$$'E_2^{p,q} = \varinjlim_{f : j \to i} H^p(X, R^q f_* f^*(M_i)) \Rightarrow \varinjlim_{f : j \to i} H^{p+q}(f^*(X), f^*(M_i))$$
$$''E_2^{p,q} = H^p(X, R^q \mu_{i*} \mu_i^*(M_i)) \Rightarrow H^{p+q}(\mu_i^*(X), \mu_i^*(M_i)),$$

et de (8.5.7.1) qu'on a un morphisme entre ces deux suites spectrales. Comme les $H^{p+q}(X, -)$ commutent aux limites inductives filtrantes, il résulte de (8.7.6.2) que ce morphisme de suites spectrales est un isomorphisme au niveau des $E_2^{p,q}$. Par suite il induit un isomorphisme sur les aboutissements, d'où (8.7.7.1). Pour tout $\underrightarrow{A}$-Module N, on a une suite spectrale (V 5.3).

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q \mu_{i*}(N)) \Rightarrow H^{p+q}(\mu_i^*(X), N).$$

La condition aux limites inductives filtrantes des foncteurs $H^n(\mu_i^*(X, -))$ résulte alors des propriétés analogues des foncteurs $H^n(X, -)$ et $R^n \mu_{i*}$ (8.7.6).

Remarque 8.7.8. — Lorsque les topos F_j, $j \in \mathrm{ob}(I)$ sont cohérents et lorsque les morphismes de transition sont cohérents, l'hypothèse faite sur X (resp. F_i) dans 8.6.7 est satisfaite lorsque X (resp. F_i) est cohérent (5.2). On sait d'ailleurs que dans ce cas $\mu_i^*(X)$ (resp. $\underleftarrow{F}$) est cohérent (8.3.13).

Corollaire 8.7.9. — *Soient i un objet I, M_i un A_i-Module à gauche, L_i un A_i-Module à droite possédant la résolution du type :* 336

$$P_{i,k} \longrightarrow P_{i,k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{i,0} \longrightarrow L_i \longrightarrow 0$$

où, pour tout entier k, $P_{i,k}$ est isomorphe à une somme directe finie d'objets de la forme $A_{i|X}$ (IV 11.3.3)*, où X vérifie les hypothèses de 8.7.7. Si, outre les hypothèses de 8.7.1, le topos fibré F est plat à droite (8.6), on a des isomorphismes canoniques, pour $n \leq k$-1 :*

$$\mathrm{Ext}^n_{\underleftarrow{A}}(\underleftarrow{F}, \mu_i^*(L_i), \mu_i^*(M_i)) \simeq \varinjlim_{f:j\to i} \mathrm{Ext}^n_{A_j}(F_j, f^*(L_i), f^*(M_i)). \tag{8.7.9.1}$$

Notons $P_{i,\cdot}$ la résolution de L_i. Comme F est plat à droite, pour tout $f : j \to i$, $f^*(P_{i,\cdot})$ est une résolution de $f^*(L_i)$ et $\mu_i^*(P_{i,\cdot})$ est une résolution de $\mu_i^*(L_i)$ (8.6). Ces résolutions permettent de construite deux suites spectrales qui convergent respectivement vers les deux membres de (8.7.9.1), et un morphisme entre ces deux suites spectrales. Au niveau des $E_1^{p,q}$ ce morphisme est un isomorphisme (8.7.7.1). Il induit donc un isomorphisme sur les aboutissements.

9. Appendice. Critère d'existence de points

par P. Deligne

Proposition 9.0. — *Tout topos localement cohérent S a assez de points.*

La question étant locale sur S, on peut supposer le topos S défini par un site $\mathcal{S}$, dans lequel est limites projectives finies sont représentables et tel que tout recouvrement $f_i : U_i \to U$ admette un sous-recouvrement fini. Il suffit de prouver que si $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ n'est pas un monomorphisme, alors, il existe un point x de $\mathcal{S}$ tel que f_x ne soit pas injectif. Par hypothèse, il existe $u \in \mathrm{ob}\,\mathcal{S}$ et s, $s' \in \mathcal{F}(U)$ tels que $s \neq s'$ et $f(s) = f(s')$. Remplaçant $\mathcal{S}$ par $\mathcal{S}/U$, on se ramène au

Lemme 9.1. — *Si s et s' sont deux sections globales distinctes d'un faisceau $\mathfrak{F}$ sur un site $\mathcal{S}$ vérifiant les hypothèses précédentes, alors, il existe un point x de $\mathcal{S}$ tel que $s_x \neq s'_x$.* 337

Soit $P = (U_i)_{i\in I}$ un système projectif dans $\mathcal{S}$, indexé par un ensemble ordonné filtrant I. Pour tout faisceau $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{S}$, on pose $P(\mathcal{H}) = \varinjlim \mathcal{H}(U_i)$, et pour tout $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$, on pose $P(V) = \varinjlim \mathrm{Hom}(U_i, V)$. Les foncteurs $P(\mathcal{H})$ et $P(V)$ commutent aux produits fibrés. Si le foncteur $P(V)$ transforme les recouvrements en familles surjectives de fonctions, c'est un morphisme de sites du topos ponctuel dans $\mathcal{S}$, et $P(\mathcal{H})$ est le foncteur fibre correspondant.

Si $P = (U_i)_{i\in I}$ et $Q = (V_j)_{j\in J}$ sont deux systèmes projectifs dans $\mathcal{S}$, on dit que Q raffine P si I est une partie de J munie de l'ordre induit et si P est la restriction de Q à J. On dispose alors de morphismes de foncteurs de $P(\mathcal{H})$ dans $Q(\mathcal{H})$ et de $P(V)$ dans $Q(V)$.

Quel que soit P comme plus haut, on notera $\mathcal{S}_p$ et $\mathcal{S}'_p$ les images dans $P(\mathcal{F})$ de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$. Le lemme 9.1 résulte du lemme suivant, dans lequel on prend pour P le système projectif indexé par $\{0\}$ et réduit à l'objet final de $\mathcal{S}$.

Lemme 9.2. — *Quel que soit P comme plus haut vérifiant $\mathcal{S}_p \neq \mathcal{S}'_p$, il existe Q raffinant P, vérifiant $\mathcal{S}_q \neq \mathcal{S}'_p$, et tel que, quels que soient le recouvrement $f_i : V_i \to V$ et $f \in Q(V)$, f soit dans l'image d'un des $Q(V_i)$.*

On prouvera tout d'abord :

Lemme 9.3. — *Soient $P = (U_i)_{i\in I}$ vérifiant les hypothèses du lemme 9.2, $f_i : V_i \to V$ un recouvrement fini dans $\mathcal{S}$, et $f \in P(V)$. Il existe Q raffinant P, vérifiant $\mathcal{S}_Q \neq \mathcal{S}'_Q$ et tel que l'image de f dans $Q(V)$ soit dans l'image de l'un des (V_i).*

Il existe $i_\circ \in I$ et $f' \in \mathrm{Hom}(U_{i_\circ}, V)$ qui définissent f. Pour $i \geq i_\circ$, posons $U_{i,k} = U_i \times_V V_k$, ce produit fibré étant défini par f'. On sait que (V_k) est un recouvrement de V, donc que $U_{i,k}$ est un recouvrement de U_i ; la flèche suivante sera injective (pour $i > i_\circ$) :

$$\mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_k \mathcal{F}(U_{i,k})$$

338 Passant à la limite, compte tenu de ce que les produits *finis* commutent aux limites inductives filtrantes, on voit que

$$P(\mathcal{F}) \longrightarrow \prod_k \varinjlim \mathcal{F}(U_{i,k})$$

est injectif, donc qu'il existe k tel que $\mathcal{S}_p$ et $\mathcal{S}'_p$ aient des images distinctes dans $\varinjlim_{i>i_\circ} \mathcal{F}(U_{i,k})$. Soit alors $I_\circ = \{i | i \geq i_\circ \text{ et } i \in I\}$, et $J = I \coprod I_\circ$. On ordonne J en disant que $j' \leq j''$ si les images de j' et j'' dans I satisfont à $j' \leq j''$ et si on n'a pas $j' \in I_\circ$, $j'' \in I$. Les U_i et $U_{i,k}$ sont indexés par J, et forment un raffinement Q de P, tel que $\mathcal{S}_Q \neq \mathcal{S}'_Q$, et que l'image de f dans $Q(V)$ soit dans l'image de $Q(V_k)$.

Lemme 9.4. — *Soit $P = (U_i)_{i\in I}$ vérifiant les hypothèses du lemme 9.2. Il existe Q raffinant P, tel que $\mathcal{S}_Q \neq \mathcal{S}'_Q$, et tel que pour tout recouvrement fini (V_k) d'un ouvert V de S, et tout $f \in P(V)$, l'image de f dans $Q(V)$ soit dans l'image de l'un des $Q(V_k)$.*

Soit E l'ensemble des triples formés d'un ouvert V de S, d'un recouvrement fini (V_k) de V et de $f \in P(V)$. Soient $\leq$ un bon ordre sur E et $\overline{E}$ l'ensemble déduit de E par adjonction d'un plus grand élément, noté ∞. On va définir par récurrence transfinie sur $e \in \overline{E}$ des raffinements Q_e de P, vérifiant $\mathcal{S}_{Q_e} \neq \mathcal{S}'_{Q_e}$ et tels que

(i) si $e' \leq e$, alors Q_e raffine $Q_{e'}$.

(ii) si $e = (V, (V_k), f)$, alors l'image de f sans $Q_e(V)$ se trouve dans l'images de l'un des $Q_e(V_k)$.

Supposons les $Q_{e'}$ déjà définis pour $e' < e$. Si e est le premier élément de E, posons $Q'_e = P$. Si e a un prédécesseur $e-1$, posons $Q'_e = Q_{e-1}$. Sinon, soit Q'_e le système projectif d'ensemble d'indices $\cup_{e'<e} I_{e'}$ qui raffine les $Q_{e'}$ pour $e' < e$. Dans ce cas, on a

$$Q'_e(\mathcal{F}) = \varinjlim_{e'<e} Q_{e'}(\mathcal{F})$$

339 de sorte que, dans tous les cas, Q'_e raffine les $Q_{e'}$ pour $e' < e$ et vérifie $\mathcal{S}_{Q'_q} \neq \mathcal{S}'_{Q'_e}$.

On obtient le système projectif Q_e requis en appliquant le lemme 9.3 à $Q_{e'}$ et à $e = (V, (V_k), f)$ (resp. en prenant $Q_e = Q'_e$ si $e = \infty$).

Le système projectif Q_∞ vérifie le lemme 9.4.

Le lemme 9.4. permet de définir, par récurrence sur n, une suite $Q_n = (U_i)_{i \in I_n}$ de systèmes projectifs dans $\mathcal{S}$ telle que

(i) $Q_\circ = P$
(ii) Q_{n+1} raffine Q_n
(iii) $\mathcal{S}_{Q_n} \neq \mathcal{S}'_{Q^n}$
(iv) Quels que soient le recouvrement $f_k : V_k \to V$ et $f \in Q_n(V)$, l'image de f dans $Q_{n+1}(V)$ se trouve dans l'image de l'un des $Q_{n+1}(V_k)$.

Le système projectif Q, d'ensemble d'indices la réunion des I_n, qui prolonge les différents Q_n, vérifie alors le lemme 9.2. La démonstration montre de plus que :

Corollaire 9.5. — *Soit $\mathcal{S}$ un site, dans lequel les produits fibrés sont représentables et tel que tout recouvrement dans $\mathcal{S}$ admette un sous-recouvrement fini. Soit e le cardinal* sup($)_\circ$, card(Fl $\mathcal{S}$)). *Alors il existe un ensemble très dense de points de $\mathcal{S}$, tel que*

(i) $\mathrm{card}(X) \leq 2^c$
(ii) *si $x \in X$ et $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$, alors* $\mathrm{card}(U_x) \leq c$.

Références

340

[1] P.Gabriel et M.Zisman : Homotopy Theory and Calculus of Fraction, Ergebnisse der Mathematik, Bd 35.

[2] J. Giraud : Méthode de la descente. Mémoire de la S.M.F.

[3] A. Grothendieck et J. Dieudonne : Eléments de Géométrie Algébrique I, 2ème édition.

[4] A. Grothendieck et J. Dieudonne : Eléments de Géométrie Algébrique IV I, I.H.E.S. n°

[5] SGA . 1 VI, par A. Grothendieck, I.H.E.S.

[6] SGA . 3 IV 6.3 par M. Demazure, Lecture Notes n°, Springer Verlag.

[7] A. Grothendieck : Sur quelques points d'algèbres homologiques, Tohoku Math. J.