IV. Topos

A. Grothendieck et J.-L. Verdier

version : 71766d9 2024-07-30 10:46:55 +0800

Table des matières

0. Introduction

299

0.1. — Nous avons vu dans **??** diverses propriétés d'exactitude de catégories de la forme $\widetilde{\mathscr{C}}$ = catégorie des faisceaux d'ensembles sur $\mathscr{C}$, où $\mathscr{C}$ est un petit site, propriétés qu'on peut exprimer en disant qu'à beaucoup d'égards, ces catégories (que nous appellerons des *topos*) héritent des propriétés familières de la catégorie (Ens) des (petits) ensembles. D'un autre côté, l'expérience a enseigné qu'il y a lieu de considérer diverses situations en Mathématique *surtout comme un moyen technique pour construire les catégories de faisceaux* (d'ensembles) *correspondantes,* i.e. *les « topos » correspondants.* Il apparaît que toutes les notions vraiment importantes liées à un site (par exemple ses invariants cohomologiques, étudiés dans **??**, divers autres invariants « topologiques », tels ses invariants d'homotopie étudiés récemment par M. Artin et B. Mazur [1] et les notions étudiées dans le livre de J. Giraud sur la cohomologie non commutative) s'expriment en fait directement en termes du topos associé. Dans cette optique, il convient de regarder deux sites comme étant essentiellement équivalents lorsque les topos associés sont des catégories équivalentes, et de considérer que la donnée d'un site (du moins dans le cas, surtout important en pratique, où sa topologie est moins fine que sa topologie canonique) revient à celle d'un topos $\mathscr{E}$ (savoir le topos associé, formé des faisceaux d'ensembles sur le site), et d'une famille génératrice d'éléments de $\mathscr{E}$ (cf. II 4.9, et 1.2.1 ci-dessous). Ce point de vue est analogue à celui qui consiste à associer **300** un groupe à tout système de générateurs et tout système de relations entre ces générateurs, et à attacher son intérêt plutôt à la structure de ce groupe qu'au système de générateurs et relations qui ont servi à l'engendrer (considérés comme des données accessoires de la situation). D'ailleurs le « lemme de comparaison » III 4.1. fournit de nombreux exemples de couples de sites $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ non isomorphes, et même non équivalents en tant que catégories, et donnant naissance à des topos équivalents, de sorte qu'il y a lieu de considérer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ comme essentiellement équivalents.

0.2. — Dans le présent exposé, nous donnons une caractérisation des topos par des propriétés d'exactitude simples (due à J. Giraud), nous étudions la notion naturelle de morphisme de topos, inspirée par la notion d'application continue d'un espace topologique dans un autre, et nous développons dans le cadre des topos certaines constructions familières en théorie des faisceaux habituelle (faisceaux **Hom**, faisceaux produit tensoriel, supports). Enfin, nous montrons (en suivant M. Artin) comment on peut reconstituer un topos à partir d'un « ouvert » de celui-ci, du « fermé » complémentaire, et d'un certain foncteur exact à gauche qui les relie, qui, a peu de choses près, peut être choisi d'ailleurs arbitrairement.

0.3. — On a là un procédé de recollement de topos qui, appliqué à des topos provenant d'espaces topologiques ordinaires, donnera en général un topos qui ne sera plus du même type. Cela est une première indication de la stabilité remarquable de la notion de topos par diverses constructions naturelles, qui manque à la notion d'espace topologique (dont la no-
301 tion de topos est inspirée). Pour un deuxième exemple remarquable, signalons aussi celle de topos classifiant relatif à un groupe d'un topos (cf. [1] ou 5.9 ci-dessous), inspirée de la notion classique d'espace classifiant d'un groupe topologique, et la notion de « topos modulaire » associé à divers « problèmes de modules » en Géométrie Algébrique ou en Géométrie Analytique [10] [13].

D'autres topos, tel le *topos étale* d'un schéma (étudié systématiquement dans le présent Séminaire, à partir de Exp. VII) ou le *topos cristallin* d'un schéma relatif [6] s'introduisent de façon naturelle lorsqu'on veut développer pour des variétés algébriques abstraites (et plus généralement des schémas) des théories de cohomologie utilisables, qui remplacent la cohomologie de Betti classique des variétés algébriques sur le corps des complexes.

0.4. — On peut donc dire que la notion de topos, dérivé naturel du *point de vue faisceautique* en Topologie, constitue à son tout un élargissement substantiel de la notion d'espace topologique [(i)], englobant un grand nombre de situations qui autrefois n'étaient pas considérées comme relevant de l'intuition topologique. Le trait caractéristique de telles situations est qu'on y dispose d'une notion de « localisation », notion qui est formalisée précisément par la notion de site et, en dernière analyse, par celle de topos (via le topos associé au site). Comme le terme de « topos » lui-même est censé précisément le suggérer, il semble raisonnable et légitime aux auteurs du présent Séminaire de considérer que l'objet de la Topologie est l'étude des *topos* (et non des seuls espaces topologiques).

0.5. — Il nous a semblé utile d'inclure dans cet exposé général sur les topos un assez grand
302 nombre d'exemples, dont beaucoup n'ont que des rapports lointains avec le but initial que se proposait ce séminaire, (c'est-à-dire l'étude de la cohomologie étale). Le lecteur pressé,

i. Cf. [9], ou 4.1 et 4.2 plus bas, pour les relations précises entre la notion de topos et celle d'espace topologique.

intéressé exclusivement par la cohomologie étale, pourra bien entendu omettre sans inconvénients la lecture de ces exemples, ainsi d'ailleurs que de la plus grande partie du présent exposé, auquel il lui suffira de se reporter en cas de besoin.

1. Définition et caractérisation des topos

Définition 1.1. — *On appelle $\mathcal{U}$-topos, ou simplement topos si aucune confusion n'est à craindre, une catégorie E telle qu'il existe un site $C \in \mathcal{U}$ tel que E soit équivalente à la catégorie $C^{\sim}$ des $\mathcal{U}$ -faisceaux d'ensembles sur C.*

1.1.1. — Soit E un $\mathcal{U}$-topos. Nous considérons toujours E comme muni de sa topologie canonique (II 2.5), qui en fait donc un *site*, et même, en vertu de 1.1.2 d) ci-dessous, un $\mathcal{U}$-site (II 3.0.2). Sauf mention expresse du contraire, nous ne considérerons pas d'autre topologie sur E que celle qu'on vient d'expliciter.

1.1.2. — On a vu dans II 4.8, II 4.11 qu'un $\mathcal{U}$-topos E est une $\mathcal{U}$-catégorie (I 1.1) satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Les limites projectives finies sont représentables dans E.
b) Les sommes directes indexées par un élément de $\mathcal{U}$ sont représentables dans E. Elles sont disjointes et universelles (II 4.5).
c) Les relations d'équivalence dans E sont effectives universelles (I 10.10).
d) E admet une famille génératrice (II 4.9) indexée par un élément de $\mathcal{U}$.

En fait, nous allons voir que ces propriétés intrinsèques *caractérisent* les $\mathcal{U}$-topos : 303

Théorème 1.2. — (J. Giraud). *Soit E une $\mathcal{U}$-catégorie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *E est un $\mathcal{U}$-topos* (1.1).
ii) *E satisfait aux conditions* a), b), c) *et* d) de 1.1.2.
iii) *Les $\mathcal{U}$-faisceaux sur E pour la topologie canonique sont représentables, et E possède une petite famille génératrice (condition* 1.1.2 d)*).*
iv) *Il existe une catégorie $C \in \mathcal{U}$ et un foncteur pleinement fidèle $i : E \to \widehat{C}$ (où $\widehat{C}$ désigne la catégorie des $\mathcal{U}$-préfaisceaux sur C) admettant un adjoint à gauche a qui est exact à gauche.*
i′) *Il existe un site $C \in \mathcal{U}$, tel que les limites projectives soient représentables dans C et que la topologie de C soit moins fine que sa topologie canonique* (II 2.5), *tel que E soit équivalent à la catégorie $C^{\sim}$ des $\mathcal{U}$-faisceaux d'ensembles sur C.*

De plus :

Corollaire 1.2.1. — *Soit E un $\mathcal{U}$-topos, C une sous-catégorie pleine de E, qu'on munit de la topologie induite* (III 3.1) *par celle de E (1.1.1). Considérons le foncteur*

$$E \longrightarrow C^{\sim}$$

qui associe à tout $X \in$ ob *E la restriction à C du foncteur représenté par X. Ce foncteur est une équivalence de catégories si et seulement si* ob *C est une famille génératrice de E.*

L'équivalence i) $\Leftrightarrow$ iv) résulte aussitôt de II 5.5, et on a déjà rappelé plus haut qu'on a i) $\Rightarrow$ 304
ii). Comme i$'$) $\Rightarrow$ i) trivialement, il reste à prouver ii) $\Rightarrow$ iii) et iii) $\Rightarrow$ i$'$), ce qui sera fait dans 1.2.4 et 1.2.3 ci-dessous. Le corollaire s'obtient alors en remarquant que le foncteur envisagé se factorise en $E \to E^{\sim} \to C^{\sim}$, de sorte que, $E \to E^{\sim}$ étant une équivalence en vertu de (iii), la question revient à celle de déterminer quand $E^{\sim} \to C^{\sim}$ est une équivalence. On conclut alors grâce au « lemme de comparaison » III 4.1, cf. démonstration 1.2.3 ci-dessous.

1.2.3. — Démonstration de iii) $\Rightarrow$ i$'$). Soit $\mathfrak{X} = (X_i)_{i\in I}$, $I \in \mathscr{U}$, une petite famille génératrice de E. Comme E est une $\mathscr{U}$-catégorie, l'ensemble des classes d'isomorphie de diagrammes finis dans E dont les objets sont des éléments X_i est $\mathscr{U}$-petit. Par suite le plus petit ensemble $\mathfrak{X}'$ d'objets de E, contenant les limites projectives finies d'objets de $\mathfrak{X}$, est une réunion dénombrable de petits ensembles et est donc petit [i]. Posant $\mathfrak{X}^{(n+1)} = (\mathfrak{X}^{(n)})'$, et $\mathfrak{X} = \bigcup_n \mathfrak{X}^{(n)}$, on voit que, quitte à augmenter la famille de générateurs, on peut supposer que $\mathfrak{X}$ est stable par limites projectives finies. Soit $\mathscr{V}$ un univers contenant $\mathscr{U}$ tel que E soit $\mathscr{V}$-petite. Pour tout objet H de E, notons $I(H)$ l'ensemble $\amalg_{i\in I} \operatorname{Hom}(X_i, H)$. Soient H un objet de E et $H' \hookrightarrow H$ le sous-faisceau de H, pour la topologie canonique, « réunion » des images des morphismes $u : X_i \to H$, $(u,i) \in I(H)$ (II 4.1). Comme H' est un sous-faisceau d'un $\mathscr{U}$-faisceau, H' est un $\mathscr{U}$-faisceau. Il est donc représentable. Comme la famille $\mathfrak{X}$ est génératrice et que pour tout $i \in I$, l'application $\operatorname{Hom}(X_i, H') \to \operatorname{Hom}(X_i, H)$ est bijective, le morphisme $H' \hookrightarrow H$ est un isomorphisme (II 4.9). Par suite (II 5.2) la famille $(u : X_i \to H)$,
305 $(u,i) \in I(H)$, est couvrante pour la topologie canonique de E. Donc tout objet de E peut être recouvert, pour la topologie canonique de E, par des objets de $\mathfrak{X}$. Soient C la sous-catégorie pleine de E définie par les objets de $\mathfrak{X}$ et $u : C \hookrightarrow E$ le foncteur d'inclusion. La topologie $\mathscr{C}$ induite sur C par la topologie canonique de E est moins fine que la topologie canonique de C, et lorsque $\mathscr{U}$ possède un élément de cardinal infini, les limites projectives finies sont représentables dans C. Il résulte de ?? que le foncteur $F \mapsto F \circ u$ est une équivalence de E sur la catégorie des $\mathscr{U}$-faisceaux sur C pour la topologie $\mathscr{C}$, C.Q.F.D.

1.2.4. — Démonstration de ii) $\Rightarrow$ iii). La démonstration comporte quatre pas.

Soit $\mathscr{V}$ un univers contenant $\mathscr{U}$, tel que E soit un élément de $\mathscr{V}$. Soient $\widetilde{E}$ la catégorie des $\mathscr{V}$-faisceaux sur E pour la topologie canonique, et $J_E : E \to \widetilde{E}$ le foncteur canonique.

1.2.4.1. — Soit $(g_i : G_i \to H)$, $i \in I \in \mathscr{U}$, une famille épimorphique de $\widetilde{E}$. Si les G_i et les produits fibrés $G_i \times_H G_j$ sont représentables, alors le faisceau H est représentable.

En effet, la somme directe $\coprod_{i\in I} G_i$ est représentable dans $\widetilde{E}$ (II 4.1) par un faisceau représentable G (propriété b) et II 4.6). Il en est de même pour la somme directe $K = \coprod_{(i,j)\in I\times I} G_i \times_H G_j$. De plus, le diagramme $K \rightrightarrows G \to H$ est exact et K est le carré fibré de G au-dessus de H. (Cette dernière propriété est vraie dans la catégorie des préfaisceaux, donc vraie dans la catégorie des faisceaux (II 4.1.) On en déduit, d'après c) et II 4.7, que la faisceau H est représentable.

1.2.4.2. — Soit X_α, $\alpha \in A \in \mathscr{U}$, une famille de générateurs de E. Pour tout faisceau H, désignons par $I(H)$ l'ensemble $\coprod_{\alpha\in A} \operatorname{Hom}_E(X_\alpha, H)$. La famille $(u : X_\alpha \to H, (u,\alpha) \in$
306 $I(H))$ est épimorphique dans $\widetilde{E}$. Lorsque H est un $\mathscr{U}$-faisceau, $I(H)$ est un élément de $\mathscr{U}$.

i. Nous raisonnons ici sur les classes d'objets de E à isomorphisme près.

En effet, tout faisceau H étant but d'une famille épimorphique de morphismes dont les sources sont des faisceaux représentables (I 3.4 et II 4.1), il suffit de montrer la première assertion lorsque le faisceau H est représentable. Soit alors G l'image de la famille $(u : X_\alpha \to H, (u,\alpha) \in I(H))$. Le morphisme $G \to H$ est un monomorphisme. Par suite, on est dans la situation du premier pas, car $X_\alpha \times_G X_\beta$ est isomorphe à $X_\alpha \times_H X_\beta$ qui est représentable, et de plus $I(H)$ est un élément de $\mathscr{U}$. On en déduit que G est représentable. Mais X_α étant une famille génératrice, $G \to H$ est un isomorphisme. La dernière assertion est triviale par définition des $\mathscr{U}$-faisceaux.

1.2.4.3. — Tout sous-faisceau d'un faisceau représentable est représentable.

En effet, soit $G \to H$ un sous-faisceau d'un faisceau représentable. G est alors un $\mathscr{U}$-faisceau. La famille $(u : X_\alpha \to G, (u,\alpha) \in I(G))$ est donc épimorphique dans $\widetilde{E}$ et indexée par un élément de $\mathscr{U}$. De plus, les produits fibrés $X_\alpha \times_G X_\beta$ sont isomorphes aux produits fibrés $X_\alpha \times_H X_\beta$ qui sont représentables. Par suite, on est dans la situation du premier pas et G est représentable.

1.2.4.4. — Tout $\mathscr{U}$-faisceau est représentable.

En effet, en vertu du premier et du deuxième pas, il suffit de montrer que les produits fibrés $X_\alpha \times_H X_\beta$ sont représentables. Or, ces produits fibrés sont des sous-objets des produits $X_\alpha \times X_\beta$. On conclut donc par le troisième pas. Ceci achève la démonstration du théorème 1.2.

Remarque 1.3. — Bien entendu, pour un $\mathscr{U}$-topos donné E, il n'y a pas en général de façon 307
privilégiée de le représenter à équivalence près sous la forme $C^{\sim}$, avec C un *petit* site ; ou, ce qui revient essentiellement au même en vertu de 1.2.1 lorsque l'on se borne aux C dont la topologie est moins fine que la topologie canonique, il n'y a pas de *petite* famille génératrice privilégiée dans E. Lorsqu'on cesse d'imposer à C la condition que C soit petit, il y a par contre (en vertu de 1.2 iii)) un choix tout à fait canonique d'un $\mathscr{U}$-site C tel que E soit équivalent à $C^{\sim}$, à savoir E lui-même ! Ceci est une des raisons techniques pour lesquelles il n'est pas commode en pratique de travailler seulement avec des petits sites : en fait, les sites les plus importants de tous, savoir les $\mathscr{U}$-topos, ne sont pas petits ! De plus, les sites générateurs de topos qui s'introduisent dans de nombreuses questions en géométrie algébrique (voire en topologie, cf. 2.5) ne sont pas non plus petits ; exemples : le site étale d'un schéma (VII.1).

Proposition 1.4. — *Soient E un $\mathscr{U}$-topos, E' une catégorie (pas nécessairement une $\mathscr{U}$-catégorie), F un préfaisceau sur E à valeurs dans E'. Pour que F soit un faisceau à valeurs dans E'* (II 6.1), *il faut et il suffit que F transforme $\mathscr{U}$-limites inductives dans E en limites projectives dans E'.*

Soit $\mathscr{V}$ un univers contenant $\mathscr{U}$ et tel que E' soit une $\mathscr{V}$-catégorie. Composant F avec les foncteurs $\mathrm{Hom}(X', -) : E' \to \mathscr{V}\text{-}\mathrm{Ens}$ définis pas les objets X' de E', on est ramené au cas où $E' = \mathscr{V}\text{-}\mathrm{Ens}$, où $\mathscr{V}$ est un univers. Supposons que F transforme $\mathscr{U}$-limites inductives en limites projectives, alors il résulte aussitôt des définitions que F est un faisceau, puisque une famille couvrante $X_i \to X$ dans $\mathscr{E}$, par définition de la topologie canonique $\mathscr{E}$, permet de 308
considérer X comme une limite inductive du diagramme $\left(X_i \times_X X_j \begin{array}{l} \nearrow X_i \\ \searrow X_j \end{array} \right)$. Supposons que F soit un faisceau, et prouvons qu'il transforme $\mathscr{U}$-limites inductives en limites projectives.

Si $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$, on peut supposer $\mathscr{V} = \mathscr{U}$ et il suffit d'appliquer le critère 1.2 iii). Pour traiter le cas général, il faut travailler un peu plus. Soient C une sous-catégorie pleine de E engendrée par une famille génératrice indexée par un élément de $\mathscr{U}$, et $u : C \to E$ le foncteur d'inclusion. Munissons C de la topologie induite par la topologie canonique de E (III 3.5). Notons $C^{\sim}_{\mathscr{U}}$, $C^{\sim}_{\mathscr{V}}$ les catégories de faisceaux sur C, $E^{\sim}_{\mathscr{V}}$ la catégorie des V-faisceaux sur E pour la topologie canonique, $J_E : E \to E^{\sim}_{\mathscr{V}}$ le foncteur canonique, $i_{\mathscr{U},\mathscr{V}} : C^{\sim}_{\mathscr{U}} \to C^{\sim}_{\mathscr{V}}$ le foncteur d'inclusion. Le diagramme :

(∗)
$$\begin{tikzcd} C^{\sim}_{\underline{U}} \arrow[r, "i_{\underline{U},\underline{V}}"] & C^{\sim}_{\underline{V}} \\ E \arrow[u] \arrow[r, "J_E"] & E^{\sim}_{\underline{V}} \arrow[u] \end{tikzcd} \quad ,$$

où les flèches verticales sont induites par le foncteur $F \mapsto F \circ u$, est commutatif. Il résulte de la construction explicite du foncteur faisceau associé (II 3) et de II 4.1 que le foncteur $i_{\mathscr{U},\mathscr{V}}$ commute aux $\mathscr{U}$-limites inductives. De plus, il résulte de III 5.1 et de 1.5 que les flèches verticales de (∗) sont des équivalences de catégories. Par suite $J_E : E \to E^{\sim}_{\mathscr{V}}$ commute aux $\mathscr{U}$-limites inductives. Pour tout objet X de E, on a :

$$F(X) \simeq \operatorname{Hom}_{E^{\sim}_{\mathscr{V}}}(J_E(X), F).$$

309 Donc F transforme les $\mathscr{U}$-limites inductives de E en limites projectives.

Corollaire 1.5. — *Soient E un $\mathscr{U}$-topos, E' une $\mathscr{U}$-catégorie, $f : E \to E'$ un foncteur. Pour que f admette un adjoint à droite, il faut et il suffit que f commute aux $\mathscr{U}$-limites inductives.*

C'est une conséquence immédiate de 1.4 pour le cas $E' = \mathscr{U}$-Ens.

Corollaire 1.6. — *Soient E, E' deux $\mathscr{U}$-topos, $f : E \to E'$ un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *f commute aux $\mathscr{U}$-limites inductives.*
ii) *f admet un adjoint à droite.*
iii) *f est continu* (III 1.1).

L'équivalence i) ⇔ ii) a été vue dans 1.5. Pour prouver i) ⇔ iii), appliquons la définition des foncteurs continus, en choisissant un univers $\mathscr{V}$ tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{V}$ (donc E, E' sont des sites $\mathscr{V}$-petits). Il faut exprimer que pour tout $\mathscr{V}$-faisceau F sur E', le composé $F \circ f$ est un faisceau sur E, c'est-à-dire (1.4) qu'il transforme $\mathscr{U}$-limites inductives en limites projectives. Il suffit pour ceci que l'on ait i), puisque en vertu de 1.4 F lui-même transforme $\mathscr{U}$-limites inductives en limites projectives ; c'est aussi nécessaire comme on voit en prenant pour F un foncteur représentable.

Corollaire 1.7. — *Avec les notations de 1.6, pour que f soit le foncteur image inverse u^* pour un morphisme de topos (3.1) $u : E' \to E$, il faut et il suffit que f soit exact à gauche et transforme familles épimorphiques en familles épimorphiques.*

310 La nécessité est triviale par définition (NB tout foncteur exact à droite transforme épimorphisme en épimorphisme). La suffisance résulte de III 1.6, qui implique que f est continu sous les conditions indiquées, donc commute aux $\mathscr{U}$-limites inductives en vertu de 1.6.

Remarque 1.8. — Avec les notations de 1.5, on peut montrer que f admet un adjoint à gauche si et seulement si il commute aux $\mathscr{U}$-limites projectives. En d'autres termes, un foncteur *covariant* $E \to (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$ est représentable si et seulement si il commute aux $\mathscr{U}$-limites projectives [i]. Nous indiquons seulement le principe de la démonstration, qui se fait en deux étapes :

a) Des arguments standards [5, n° 195, § 3] montrent que si F commute aux $\varprojlim$, il est proreprésentable par un système projectif strict $(T_i)_{i\in I}$, où I est un ensemble ordonné filtrant, *pas nécessairement petit.* On peut supposer que si $i > j$, alors $T_i \to T_j$ n'est pas un isomorphisme, et sous cette hypothèse, F est représentable si et seulement si I est petit (ce qui implique en fait que la système projectif est essentiellement constant).
b) Pour prouver que I est petit, sachant que pour tout objet X de E, l'ensemble $F(X) = \varinjlim_i \mathrm{Hom}(T_i, X)$ l'est, il suffit de disposer d'une *petite famille cogénératrice* $(X_j)_{j\in J}$ (i.e. qui est génératrice pour la catégorie opposée E°). Or on montre que dans un $\mathscr{U}$-topos E existe toujours une petite famille cogénératrice.
c) Pour prouver ce dernier point, on note par des arguments standards [Toh] que tout objet X de E admet un monomorphisme dans un objet « injectif » ; puis que pour toute famille génératrice (L_α) de E, si on plonge ainsi chaque L_α dans un objet injectif I_α, 311
la famille (I_α) est cogénératrice.

2. Exemples de topos

2.0. — Nous avons réuni dans le présent numéro un assez grand nombre d'exemples typiques de topos, que le lecteur aura déjà eu l'occasion de rencontrer par ailleurs, et qui sont destinés à lui faciliter l'accès au « yoga » des topos. Pour d'autres exemples (tirés de la géométrie algébrique) de topologies sur des sites, donnant lieu à autant de topos, il pourra consulter SGA 3 IV 6, et (pour le topos étale) l'exposé VII du présent séminaire. Comme nous ne référerons guère par la suite au présent numéro que pour des questions de notations ou de terminologie, nous laissons au lecteur le soin de faire à titre d'exercice la vérification des énoncés dont nous avons assorti ces exemples pour son instruction générale. Tous les exemples du présent numéro seront précisés dans 4, où on examinera leur dépendance fonctorielle par rapport aux données, et dans les numéros suivants à titre d'illustration des notions générales relatives aux topos.

2.1. Topos associé à un espace topologique. — Soient X un petit espace topologique, $\mathrm{Ouv}(X)$ la catégorie des ouverts de X, munie de la topologie canonique (III 1.9.1). Nous désignerons par $\mathrm{Top}(X)$ le topos des $\mathscr{U}$-faisceaux sur $\mathrm{Ouv}(X)$. Ce topos est équivalent à la catégorie des espaces topologiques étalés au-dessus de X, en associant à tout tel espace X'

i. Un énoncé plus général se trouve dans I 8.12.8, I 8.12.9, l'esquisse de démonstration qui suit a) à c) correspondant à la démonstration donnée dans *loc. cit.*

sur X le faisceau $U \mapsto \Gamma(X'/U) = \mathrm{Hom}_X(U, X')$ sur Ouv(X) [TF][(1)]. On ne pourra pas
312 s'empêcher de noter parfois, par abus de langage, par la même lettre X le topos Top(X) défini par l'espace topologique X.

C'est évidemment l'exemple précédent qui a servi principalement de guide et de support intuitif pour le développement de la théorie des topos. On fera attention cependant que les topos déduits des espaces topologiques sont de nature très particulière, dû au fait notamment qu'ils ont été décrits par des sites $C =$ Ouv(X) où *tous les morphismes sont des monomorphismes* (donc dont la catégorie sous-jacente se réduit à un ensemble préordonné). De ceci résulte en particulier que les faisceaux représentés par les objets de C sont des sous-faisceaux du faisceau final, et par suite que *les sous-faisceaux du faisceau final forment une famille génératrice du topos envisagé.* Cette propriété n'est pas partagée par la plupart des topos qui s'introduisent de façon naturelle en géométrie algébrique ou en algèbre, cf. exemples plus bas. Elle est à peu de choses près caractéristique des topos de la forme Top(X) (cf. 7.1.9 plus bas).

On vérifie facilement que l'application Ouv$(X) \to$ Top(X), qui associe à tout ouvert de X le faisceau qu'il représente, est une *bijection* de Ouv(X) avec l'ensemble des sous-objets de l'objet final de Top(X), cette bijection étant même un isomorphisme pour les structures d'ordre naturelles, i.e. induisant un isomorphisme des catégories correspondantes. Cela suggère qu'il doit être possible de reconstituer à homéomorphisme près l'espace topologique X, lorsqu'on connaît Top(X) à équivalence près. Nous verrons plus bas (4.2) qu'il en est bien ainsi, moyennant une légère restriction sur X.

313

2.2. Topos ponctuel ou final, et topos vide ou initial. — Lorsque X est un espace topologique réduit à un seul point, le foncteur

$$F \longrightarrow F(X) : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens}$$

est une équivalence de catégories. Ceci montre en particulier que la *catégorie* $\mathscr{U}$-Ens est un *$\mathscr{U}$-topos.* Nous avons vu sur des exemples dans Exp. II que cet $\mathscr{U}$-topos est typique du point de vue propriétés d'exactitude, en ce que la vérification de beaucoup de propriétés (notamment des propriétés d'exactitude) des topos généraux se ramène à ce topos particulier. L'interprétation que nous en donnons ici en termes de l'espace topologique ponctuel justifie l'abus de langage consistant à appeler *topos ponctuel* un topos équivalent à la catégorie $\mathscr{U}$-Ens (bien que, en tant que catégorie, il ne soit pas du tout équivalent à la catégorie ponctuelle !). C'est la terminologie qui correspond à l'intuition géométrique correcte du rôle joué par ces topos. On appelle parfois, par abus de langage également, *topos final* un topos ponctuel, cf. 4.3 ; on dira « *le* topos final » pour le topos ($\mathscr{U}$-Ens).

Lorsque X est réduit à l'espace topologique vide, donc Ouv(X) à la catégorie ponctuelle, alors un préfaisceau F sur Ouv(X) est un faisceau si et seulement si sa valeur en l'unique objet ϕ de Ouv(X) est un ensemble réduit à un point. Il s'ensuit que Top$(\varnothing)$ est isomorphe à la catégorie des $\mathscr{U}$-ensembles réduits à un point, catégorie qui est équivalente à la catégorie ponctuelle. De ceci on conclut en particulier que la catégorie ponctuelle (ainsi que toute
314 $\mathscr{U}$-catégorie équivalente à celle-ci) est un $\mathscr{U}$-topos. On l'appelle parfois, par abus de langage,

1. N.D.E. : Ici [TF] indique la référence [8]

le *topos vide* ou *topos initial* (cf. 4.4) ; on prendra garde qu'il n'est pas équivalent à la catégorie vide.

2.3. Topos associé à un espace à opérateurs. — Soient X un espace topologique, G un groupe discret opérant sur X par homéomorphismes. On a défini alors dans [Toh][2] 5.1 la catégorie des *G-faisceaux sur X*, ou comme nous dirons aussi, des faisceaux sur (X, G) ; ce sont les faisceaux (d'ensembles) sur X, *munis* d'opérations de G compatibles avec celles de G sur X. On constate aussitôt, à l'aide du critère de Giraud 1.2 iii), que cette catégorie est un topos (NB $\mathscr{U}$ est sous-entendu dans tout ceci), qu'on notera simplement $\mathrm{Top}(X, G)$. Lorsque G est réduit au groupe unité, on retrouve l'exemple 2.1 ; lorsque X est réduit à l'espace ponctuel, on trouve le topos des ensembles sur lesquels G opère à gauche (ou *G-ensembles*), appelé aussi *topos classifiant du groupe discret G*, et noté B_G. On vérifie facilement que le seul sous-objet de l'objet final e du topos B_G est e ou le faisceau vide ϕ, en particulier, si G n'est pas réduit au groupe unité, les sous-objets de l'objet final du topos classifiant B_G ne forment pas une famille génératrice de B_G. Donc B_G n'est pas équivalent alors à un topos du type $\mathrm{Top}(X)$ envisagé dans 2.1.

La notion de G-faisceau était introduite dans *loc. cit.* pour développer la théorie cohomologique des G-faisceaux abéliens. Interprétant ces derniers comme les faisceaux abéliens du topos (X, G), ladite théorie se trouve incluse dans celle de Exp. V, développée dans le cadre des topos généraux.

On peut se proposer plus généralement d'attacher un topos approprié à un espace topologique X, muni d'un groupe topologique G (pas nécessairement discret) d'automorphismes, qui donnerait naissance à une théorie cohomologique adéquate. De même dans le contexte des variétés différentiables, ou analytiques réelles ou complexes, ou des schémas. C'est effectivement possible, cf. 2.5 ci-dessous. 315

2.4. Topos classifiant d'un Groupe. — Soit E un topos, et G un Groupe de E. Soit (E, G) la catégorie des objets de E sur lesquels G opère. On voit aussitôt, grâce au critère de Giraud, que c'est un topos. On l'appelle *topos classifiant* du Groupe G, et on le note B_G. Lorsque E est le topos ponctuel (2.2) i.e. lorsque G est un groupe ordinaire, on retrouve le topos classifiant de 2.3.

La terminologie adoptée ici se justifie, du fait que le topos B_G joue un rôle universel pour la classification des « torseurs » (ou fibrés principaux homogènes) sous G, ou plus généralement sous les $G_{E'} = f^*(G)$, où E' est un topos « au-dessus de E » i.e. muni d'un morphisme $f : E' \to E$ (cf. 3.1 ci-dessous). Ce rôle, explicité dans [3 Chap V] ou dans 5.9 plus bas, montre que B_G joue, dans le contexte des topos, le même rôle que les classiques espaces classifiants des groupes topologiques en théorie homotopique des espaces topologiques. Ces derniers peuvent être regardés (cf. 2.5) comme une version affaiblie des premiers, obtenue en ne retenant du topos classifiant que le seul « type d'homotopie » dudit topos, en un sens convenable qu'il n'y a pas lieu de préciser ici.

2. N.D.E. : Ici [Toh] indique la référence [4].

2.5. « Gros site » et « gros topos » d'un espace topologique. Topos classifiant d'un
316 groupe topologique. — [2]

Soit $U-\mathrm{Esp}$ ou simplement (Esp) la catégorie des espaces topologiques $\in \mathscr{U}$. On sait que dans (Esp) les limites projectives finies sont représentables. Considérons sur (Esp) la prétopologie (**??**) pour laquelle $\mathrm{Cov}(X)$ est l'ensemble des familles surjectives d'immersions ouvertes $u_i : X_i \to X$. Nous considérerons (Esp) comme un site à l'aide de la topologie engendrée par la prétopologie précédente. Pour tout objet X de (Esp), considérons la catégorie

$$(\mathrm{Esp})_{/X}$$

des objets de (Esp) au-dessus de X, i.e. des espaces topologiques au-dessus de X, comme un site, grâce à la topologie induite par celle de (Esp) via le foncteur d'oubli $(\mathrm{Esp})_{/X} \to (\mathrm{Esp})$ (III 5.2 4)). Ce site est appelé le *gros site* associé à X. On fera attention qu'il n'est pas $\in \mathscr{U}$; ce n'est pas non plus un $\mathscr{U}$-site au sens de II 3.0.2, donc des précautions sont nécessaires pour lui appliquer les résultats habituels. Pour pallier cet inconvénient, on peut choisir un univers $\mathscr{V}$ tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{V}$, de sorte que $(\mathrm{Esp})_{/X}$ devient un $\mathscr{V}$-site, et on peut travailler avec le $\mathscr{V}$-topos associé $(\mathrm{Esp})_{/X}$, qui pourra être noté $\mathrm{TOP}(X)$ et sera appelé le *gros topos de* X. Si on répugne à agrandir $\mathscr{U}$, on peut choisir un cardinal c majorant les cardinaux de X et de tous les espaces topologiques qu'on compte faire intervenir dans les raisonnements (le plus souvent, $\mathrm{Sup}(\mathrm{card}\, X, \mathrm{card}\, \mathbb{R})$ sera suffisant !), et on remplace $(\mathrm{Esp})_{/X}$ par la sous-catégorie $(\mathrm{Esp})'_{/X}$ formée des X' sur X tels que $\mathrm{card}\, X' \leq c$, munie de la topologie induite, et on
317 note $\mathrm{TOP}(X)$ le topos des faisceaux sur ce site. Pour fixer les idées, supposons que ce soit la première définition qui ait été adoptée.

L'avantage du gros topos de X sur le petit, c'est que le site qui le définit contient $(\mathrm{Esp})_{/X}$ comme sous-catégorie pleine ; comme la topologie de ce site est manifestement moins fine que la canonique, on voit que le foncteur canonique de $(\mathrm{Esp})_{/X}$ dans $\mathrm{TOP}(X)$, associant à tout espace X' sur X le faisceau qu'il représente, est *pleinement fidèle*. Par suite, *un espace X' sur X est connu à X-isomorphisme près quand on connaît le faisceau* ($\in \mathrm{Top}(X)$) *qu'il définit* ; donc la notion de faisceau sur (le gros site de) X peut être considéré comme une *généralisation* de celle d'espace topologique au-dessus de X, à l'aide de laquelle toutes les constructions de la théorie des faisceaux prennent un sens pour les espaces topologiques sur X.

Ainsi, lorsque G est un objet-groupe de la catégorie $(\mathrm{Esp})_{/X}$ des espaces topologiques au-dessus de X, on peut lui associer le topos classifiant B_G (2.4), d'où des groupes de cohomologie classifiante, des groupes d'homotopie classifiante etc. (définis comme les invariants correspondants du $\mathscr{V}$-topos B_G). En particulier, lorsque X est un espace ponctuel, G s'identifie à un groupe topologique ordinaire. On peut vérifier, moyennant les conditions locales habituelles assurant que la cohomologie singulière des produits cartésiens G^n coïncide avec la cohomologie au sens des faisceaux (pour des coefficients constants, disons), par exemple si G est localement contractible, que la cohomologie du topos classifiant de G est canoniquement isomorphe à celle de l'espace classifiant de G au sens des topologues.

318 L'introduction des topos classifiants (via les « gros sites ») a sur les espaces classifiants

2. L'introduction de ces sites et topos est due à M. Giraud, qui a mis également en évidence leurs avantages sur le « petit » site traditionnel.

l'avantage de fournir une théorie plus riche, puisqu'ils fournissent notamment des invariants cohomologiques utiles pour des coefficients plus généraux que les coefficients constants ou localement constants. De plus, la définition envisagée ici s'adapte de façon évidente aux autres contextes habituels : variétés différentiables, variétés ou espaces analytiques (réelles ou complexes, au choix), schémas. Ce point de vue permet notamment de faire le lien entre l'étude des classes caractéristiques du point de vue traditionnel et du point de vue « arithmétique », en considérant les « groupes classiques » comme provenant de schémas définis sur l'anneau des entiers ; cf. [7] pour des indications dans ce sens. De même, les résultats généraux de J. Giraud [3] sur la classification des extensions de Groupes, développés dans le cadre très général et très souple des topos, peuvent grâce aux « gros topos » se spécialiser en des résultats sur la classification d'extensions de groupes topologiques, ou de groupes de Lie réels ou complexes, qui ne semblaient guère connus des topologues que dans le cas des extensions à noyau abélien [11].

2.6. Topos de la forme $\widehat{C}$. — Soit C une petite catégorie. Alors la catégorie $\widehat{C}$ des U-préfaisceaux sur C est évidemment un $\mathscr{U}$-topos, puisqu'elle est de la forme $C^{\sim}$, où on munit C de la topologie chaotique. Nous donnerons plus bas quelques détails sur les relations entre C et $\widehat{C}$. Notons seulement ici qu'un topos E équivalent à un topos de la forme $\widehat{C}$ est de nature assez spéciale, du fait qu'*il admet une petite famille génératrice (X_i) formée d'objets connexes projectifs,* i.e. d'objets X tels que le foncteur $Y \mapsto \operatorname{Hom}(X, Y)$ transforme 319
épimorphismes en épimorphismes et sommes en sommes : il suffit en effet de prendre dans $\widehat{C}$ la famille génératrice formée des foncteurs représentés par les $X \in \operatorname{ob} C$. Notons d'ailleurs que si dans un topos E on a une famille couvrante $X_i \to X$, avec des X_i qui sont projectifs et connexes, alors toute autre famille couvrante de X est majorée (I 4.3.2, I 4.3.3) par la précédente. Par suite, dans un topos E de la forme $\widehat{C}$ tout objet X admet une famille couvrante majorant toutes les autres. Un topos de la forme $\operatorname{Top}(X)$ (2.1), avec X un espace topologique dont les points sont fermés, n'a la propriété précédente que si X est discret.

Lorsque la catégorie C a un seul objet, C s'identifie à un monoïde G. Un préfaisceau sur C s'identifie alors à un ensemble sur lequel G opère *à droite* (puisque c'est un foncteur $G^{\circ} \to (\mathrm{Ens})$), et $\widehat{C}$ est le topos des ensembles à monoïde d'opérateurs à droite, qu'on pourra aussi noter $B_{G^{\circ}}$, compte tenu de 2.3 : c'est le *topos des ensembles à monoïde d'opérateurs G° (le monoïde opposé à G).* Lorsque G est un groupe, utilisant l'isomorphisme $g \mapsto g^{-1}$ de G sur G°, on retrouve le topos classifiant B_G de 2.3.

2.7. Topos classifiant d'un pro-groupe. —

2.7.1. — Soit $\mathscr{G} = (G_i)_{i \in I}$ un système projectif de groupes, avec G_i, $I \in \mathscr{U}$. On suppose le système projectif *strict.* i.e. les morphismes de transition $G_j \to G_i$ surjectifs. Si E est un ensemble, on appelle *opération de $\mathscr{G}$ sur E* (à gauche, disons) la structure suivante : a) une famille $(E_i)_{i \in I}$ de parties de E, de réunion E ; b) pour tout $i \in I$, une opération du groupe G_i sur l'ensemble E_i ; on suppose de plus ces données soumises à la condition suivante : 320
pour $j \geq i$, E_i est le sous-ensemble de E_j formé des éléments fixes sous le groupe noyau de $G_j \to G_i$. On dit aussi que $\mathscr{G}$ *opère sur* E (à gauche) si on s'est donnée une opération de G sur E (à gauche). Les ensembles $\in \mathscr{U}$ munis d'une opération de $\mathscr{G}$ forment une catégorie de façon évidente. On constate aussitôt, grâce au critère de Giraud, que cette catégorie est

un $\mathscr{U}$-topos. On le note $B_{\mathscr{G}}$ et on l'appelle *topos classifiant de* $\mathscr{G}$. Lorsque I admet un objet initial $i_\circ$, posant $G = G_{i_\circ}$, on retrouve le topos classifiant de 2.3.

2.7.2. — Un autre exemple important est celui où les groupe G_i sont finis, de sorte que

$$G = \varprojlim G_i$$

est un groupe topologique compact totalement discontinu, ou *groupe profini.* Une opération de $\mathscr{G}$ sur E revient alors à une opération de G sur E qui est continue, ou ce qui revient au même, telle que le stabilisateur de tout point de E est un sous-groupe ouvert de G. Le topos classifiant $B_{\mathscr{G}}$ sera aussi noté B_G, où, bien entendu, G doit être considéré comme muni de sa topologie profinie.

2.7.3. — Il est facile de vérifier, utilisant les remarques de 2.6, que le topos $B_{\mathscr{G}}$ défini par un système projectif strict $\mathscr{G} = (G_i)_{i\in I}$ de groupes n'est équivalent à un topos de la forme $\widehat{C}$ que si ce système projectif est essentiellement constant ; dans le cas d'un groupe profini, cela signifie que ce groupe est en fait fini.

2.7.4. — L'interprétation géométrique suivante du topos classifiant B_G d'un groupe discret G est utile, pour donner une intuition géométrique correct de ces topos. (Cf. aussi, dans le même sens, 4.5, 5.8, 5.9 et 7.2 ci-dessous.) Soit X un espace topologique connexe, localement
321 connexe et localement simplement connexe, x un point de X, G son groupe fondamentale en x. (NB il est connu qu'à isomorphisme près, tout groupe discret G peut s'obtenir ainsi.) Alors la théorie de Galois des revêtements de X fournit une équivalence entre la catégorie B_G des G-ensembles, et la catégorie des *revêtements étales* de X, i.e. des espaces X' sur X qui sont localement X-isomorphes à des X-espaces de la forme $X \times I$, où I est un espace discret. (comparer SGA 1 V 4,5). Cette dernière peut d'ailleurs s'interpréter comme la catégorie des faisceaux localement constants sur X, i.e. la catégorie des objets localement constants (IX 2.0) du topos $\mathrm{Top}(X)$.

Lorsque G est un groupe profini, on a une interprétation géométrique analogue de B_G, comme la catégorie des X-schémas qui sont sommes de revêtements finis étales d'un schéma X connexe, muni d'un point géométrique x et d'un isomorphisme $G \simeq \pi_1(X, x)$. Il est connu encore que tout groupe profini peut s'obtenir comme groupe fondamental d'un schéma connexe convenable (spectre d'un corps si on veut). Enfin, ou rencontre également des pro-groupes (pas nécessairement profinis ni essentiellement constants) pour la classification des revêtements des espaces connexes et localement connexes qui ne sont pas localement simplement connexes, ou la classification des revêtements étales pas nécessairement finis ou ind-finis de schémas connexes non normaux. Pour ce dernier cas, cf. SGA 3 X 6.

Exercice 2.7.5. — Définir pour un topos E la notion de connexité, de locale connexité [(2)], de simple connexité et de simple connexité locale. Définir la notion d'objet constant et lo-
322 calement constant de E (cf. IX 2.0). Soit $f : E' \to E$ un morphisme de topos (3.1), avec E' simplement connexe (par exemple E' le topos ponctuel (2.2)), et E connexe et localement connexe. Définir un pro-groupe strict $\pi_1(E, f) = (G_i)_{i\in I} = \mathscr{G}$ (appelé *pro-groupe fondamental de E en f*) et une équivalence de catégories de $B_{\mathscr{G}}$ avec la catégorie des objets localement

2. cf. 8.7 l).

constants de E.[(2)]. Montrer que lorsque E est localement simplement connexe, $\pi_1(E, f)$ est essentiellement constant et s'identifie donc à un groupe discret ordinaire $\pi_1(E, f)$, qui s'appelle le *groupe fondamental de E en f*. Montrer que tout pro-groupe strict $\mathscr{G}$ est isomorphe (comme pro-groupe) au pro-groupe fondamental d'un topos connexe et localement connexe convenable en un f convenable, avec E' le topos ponctuel (prendre $E = B_{\mathscr{G}}$, et $f : E' \to E$ défini par le foncteur oubli $f^* : E \to E' = (\mathrm{Ens})$). Lorsque $\mathscr{G}$ est essentiellement constant, i.e. isomorphe (comme pro-groupe) à un groupe discret ordinaire, prouver qu'on peut prendre ci-dessus E localement simplement connexe (prendre encore $E = B_G$).

2.8. Exemple d'un faux topos. — Soit $\mathscr{G} = (G_i)_{i \in I}$ un pro-groupe strict, où I est ordonné filtrant et où $i > j$ implique que $G_i \to G_j$ n'est pas un isomorphisme. Supposons que l'on ait $\mathrm{card}(I) \notin \mathscr{U}$. Considérons la catégorie des ensembles $E \in \mathscr{U}$ sur lesquels $\mathscr{G}$ opère à gauche (2.7.1). C'est une $\mathscr{U}$-catégorie, et on voit comme dans 2.7.1 que cette catégorie satisfait aux conditions a), b), c) de 1.1.2. Cependant ce n'est pas un $\mathscr{U}$-topos, car on voit qu'il n'admet pas de famille génératrice qui soit $\mathscr{U}$-petite. On voit de même que ce n'est un $\mathscr{V}$-topos pour aucun univers $\mathscr{V}$.

3. Morphismes de topos

323

Définition 3.1. — *Soient E et E' deux $\mathscr{U}$-topos. On appelle morphisme[(3)] de E dans E', ou parfois (par abus de langage) application continue de E dans E', un triple $u = (u_*, u^*, \varphi)$, formé de foncteurs*

$$u_* : E \longrightarrow E' \quad , \quad u^* : E' \longrightarrow E$$

et d'un isomorphisme φ « d'adjonction » de bifoncteurs en $X' \in \mathrm{Ob}\, E'$, $Y \in \mathrm{Ob}\, E$:

$$\varphi : \mathrm{Hom}_E(u^*(X'), Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{E'}(X', u_*(Y)),$$

le foncteur u^* étant de plus soumis à la condition d'être exact à gauche, i.e. de commuter aux limites projectives finies. Le foncteur u_* est appelé le foncteur image directe pour le morphisme de topos u, le foncteur u^* est appelé le foncteur image inverse pour le morphisme de topos u, l'isomorphisme φ est appelé l'isomorphisme d'adjonction, pour u.

3.1.1. — Sauf mention expresse du contraire, on désignera par la suite, pour un morphisme de topos $u : E \to E'$, par u_* et u^* les foncteurs image directe et image inverse correspondants [(3)]. On notera que, u_* étant adjoint à droite de u^* et u^* étant adjoint à gauche de u_* par l'isomorphisme d'adjonction φ, chacun des deux foncteurs u_*, u^* détermine l'autre à isomorphisme unique près, d'après le sorite bien connu des foncteurs adjoints [14]. En pratique, suivant les cas, il peut être plus commode de définir un morphisme de topos $u : E \to E'$ soit par la donnée de $u^* : E' \to E$, soit par la donnée de $u_* : E \to E'$; dans le premier cas, il faut simplement vérifier que le foncteur donné u^* admet un adjoint à droite, et 324
qu'il est exact à gauche. Dans le deuxième, que le foncteur donné u_* admet un adjoint à gauche qui est exact à gauche. Dans l'un ou l'autre cas, on déduit de la donnée partielle, grâce au *choix* d'un foncteur adjoint et d'un isomorphisme d'adjonction, un morphisme de

2. On pourra s'inspirer de SGA 3 X 6.
3. N.D.E. : Certains auteurs parlent de *morphisme géométrique*.
3. Il y a lieu parfois d'écrire aussi u^{-1} au lieu de u^*, cf. 13.2.3.

topos $u : E \to E'$, et ce dernier sera « unique à isomorphisme unique près » en termes de la donnée u^* resp. u_*, en un sens assez clair, et qui sera d'ailleurs entièrement explicité plus bas (3.2.1).

3.1.2. — Si $u : E \to E'$ est un morphisme de topos, il résulte des propriétés des foncteurs adjoints (I 2.11) que le foncteur image directe $u_* : E \to E'$ commute aux limites projectives, et le foncteur $u^* : E' \to E$ commute aux limites inductives [3]. Comme on suppose de plus que ce dernier est exact à gauche i.e. commute aux limites projectives finies, on voit donc en particulier que u^* *est exact.* On peut donc dire que *c'est le foncteur image inverse* u^*, dans le couple (u_*, u^*), *qui possède les propriétés d'exactitude les plus remarquables.* Ces propriétés assurent que pour toute espèce de structure algébrique Σ dont les données peuvent se décrire en termes de données de flèches entre les ensembles de base et des ensembles déduits de ceux-ci par application répétée d'opérations de limites projectives finies et de limites inductives quelconques, et pour tout « objet de $\mathscr{E}'$ muni d'une structure d'espèce Σ » (notion qui a un sens grâce aux propriétés d'exactitude internes du topos $\mathscr{E}'$ (II 4.1)), son image par u^* est muni des mêmes structures. Plutôt que d'entrer dans la tâche peu engageante de donner
325 un sens précis à cet énoncé et de le justifier de façon formelle, nous conseillons au lecteur de l'expliciter et de se convaincre de sa validité pour des espèces de structure telles que celle de groupe, d'anneau, de module sur un anneau, de comodule sur un coanneau, de bigèbre sur un anneau, de torseur sous un groupe. (Dans ces exemples, les trois premières espèces de structure se définissent en termes de limites projectives finies exclusivement, tandis que les autres notions impliquent implicitement des constructions faisant appel également à des limites inductives.) De plus, le foncteur u^* « *commute* » à toutes les opérations fonctorielles habituelles faites en termes de telles structures, plus précisément à toutes les opérations qui peuvent s'exprimer en termes de $\varinjlim$, et de $\varprojlim$ finies : constructions d'objets libres (groupes ou modules libres, p.ex.) engendrés par un objet, produits tensoriels (cf. § 12 plus bas) etc.

Quant au foncteur image directe $u_* : E \to E'$, qui commute aux limites projectives, il « respecte » par suite toute structure algébrique sur un objet (ou une famille d'objets) de E, définissable en termes de limites projectives exclusivement (telles que les structures de groupe, d'anneau ou de module sur un anneau, parmi les exemples précédents). Par contre, le foncteur u_* n'est en général pas exact à droite i.e. il ne commute pas en général aux limites inductives finies, et même ne transforme pas en général épimorphisme en épimorphisme (c'est d'ailleurs ce défaut d'exactitude du foncteur u_* qui est la source de ces propriétés cohomologiques, qui seront étudiées (du point de vue de l'algèbre homologique commutative) dans l'exposé suivant). Par suite, il ne s'étend pas, en général, en un foncteur sur des objets
326 du type comodule, ou bigèbre, ou torseur sous un groupe, et ne commute pas en général à des opérations telles que « module libre engendré », produit tensoriel de modules, etc.

3.1.3. — En pratique, lorsqu'on est en présence d'un foncteur $f : E \to F$ d'un $\mathscr{U}$-topos dans un autre, il y a lieu d'en expliciter toutes les propriétés d'exactitude, y compris l'existence éventuelle de foncteurs adjoints à gauche ou à droite (cf. la note de bas de page 14), pour parvenir à une compréhension de la « nature géométrique » de f, compréhension qui

3. D'ailleurs (1.5 et 1.8), pour un foncteur $u_* : E \to E'$ resp. $u^* : E' \to E$ donné, ce foncteur admet un adjoint à gauche (resp. à droite), si et seulement si il commute aux $\mathscr{U}$-limites projectives (resp. aux $\mathscr{U}$-limites inductives).

sera généralement un guide indispensable pour une intuition géométrique correcte de la situation. Ainsi, s'il s'avère que f commute aux limites inductives quelconques et aux limites projectives finies, il y a lieu d'écrire f sous la forme

$$f = u^*,$$

où

$$u : F \longrightarrow E$$

est un morphisme de topos, i.e. d'interpréter f comme un foncteur « image inverse » par une « application continue » de topos. Lorsque f commute aux limites projectives quelconques, donc qu'il admet un adjoint à gauche, et si ce dernier (qui a priori commute aux limites inductives quelconques) commute *de plus* aux limites projectives finies, il y a lieu d'écrire f sous la forme

$$f = v_*,$$

où

$$v : E \longrightarrow F$$

est un morphisme de topos. Dans certains cas, il peut arriver que f satisfasse aussi bien à 327
l'une qu'à l'autre des deux propriétés envisagées (cf. 4.10 pour un exemple). Dans ce cas, il y a lieu d'introduire simultanément les morphismes de topos

$$u : F \longrightarrow E \quad , \quad v : E \longrightarrow F,$$

qui donnent lieu à une suite de trois foncteurs adjoints (I 5.3) :

$$v^* \quad , \quad v_* = u^* = f \quad , \quad u_*.$$

Il convient de distinguer alors soigneusement entre les morphismes de topos u et v, sous peine de perdre l'intuition géométrique de la situation.

On notera à ce propos que lorsque entre deux topos E, F on a une suite de trois foncteurs adjoints

$$e, f, g \; (e, g : F \rightrightarrows E, f : E \to F),$$

alors f commute aux limites inductives et aux limites projectives quelconques, donc il peut toujours se mettre sous la forme u^*, où $u : F \to E$ est un morphisme de topos. Alors g s'écrit donc $g = u_*$. Par contre, bien sûr, e ne peut s'écrire sous la forme v^* (et alors f sous la forme v_*) que s'il commute de plus aux limites projectives finies. Cela sera évidemment le cas s'il est lui-même l'adjoint à droite d'un quatrième foncteur d. Sans condition de cette nature, on écrira souvent

$$e = u_!$$

pour l'adjoint à gauche d'un foncteur image inverse $f = u^*$, quand un tel adjoint à gauche existe, cette notation étant suggérée par l'exemple d'une immersion ouverte $u : X \to Y$ d'espaces topologiques. De même, si e est de la forme v^*, i.e. f de la forme v_*, on note parfois $g = v^!$ l'adjoint à droite d'un foncteur image directe v_*, lorsque cet adjoint existe [(3)].

3.2. — Soient E, E' deux $\mathscr{U}$-topos, et 328

$$u = (u_*, u^*, \varphi) \quad , \quad v = (v_*, v^*, \Psi) : E \rightrightarrows E'$$

deux morphismes de topos de E dans E'. On appelle *morphisme de u dans v* tout morphisme de u_* dans v_* (au sens de la catégorie $\mathbf{Hom}(E, E')$ des foncteurs de E dans E'). Les morphismes de morphismes de topos se composent de façon évidente, et on définit de cette façon une catégorie, qui est en fait une *$\mathcal{U}$-catégorie* (I 7.8) notée

$$\mathbf{Homtop}(E, E'),$$

appelée *catégorie des morphismes* (ou *des applications continues*) *de E dans E'*. On définit alors de façon évidente un foncteur

$$u \longmapsto u_* : \mathbf{Homtop}(E, E') \longrightarrow \mathbf{Hom}(E, E'),$$

foncteur qui est pleinement fidèle par définition des flèches dans le premier membre (mais qui n'est pas injectif sur les objets).

3.2.1. — On fera attention que, si u et v sont donnés comme dessus, la théorie des foncteurs adjoints fournit une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}(u_*, v_*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(v^*, u^*);$$

en particulier, on obtient un *contrafoncteur* sur $\mathbf{Homtop}(E, E')$:

$$u \longmapsto u^* : \mathbf{Homtop}(E, E')^\circ \longrightarrow \mathbf{Hom}(E, E').$$

Conformément à l'intuition géométrique, suivant laquelle le foncteur image directe u_* « va dans le même sens » que l'application continue qui lui donne naissance, il y a donc lieu de définir le sens des flèches pour les morphismes entre morphismes de topos *en termes des foncteurs images directes,* et non en termes des foncteurs images inverses (bien que ce soient ces derniers qui, nous l'avons vu, possèdent les propriétés d'exactitude caractéristiques de la notion de morphisme de topos).

329 *3.2.2.* — Ayant défini la catégorie $\mathbf{Homtop}(E, E')$ des morphismes du topos E dans le topos E', la notion d'*isomorphie* entre deux morphismes u, v de E dans E' est également définie. En pratique, il n'y a pas lieu de distinguer essentiellement entre deux morphismes de topos isomorphes, tout au moins lorsqu'on dispose d'un isomorphisme *canonique* entre les deux (tout comme il n'y a pas lieu souvent de distinguer entre deux éléments d'une catégorie, lorsqu'on se donne un isomorphisme canonique entre eux). Signalons à ce propos que le plus souvent, lorsqu'on traite de diagrammes de morphismes de topos et de questions de commutativité de tels diagrammes (notion qui a un sens grâce à (3.3)), il ne s'agit que de commutativité à isomorphisme (« canonique ») près ; par abus de langage, on traite alors ces diagrammes comme des diagrammes effectivement commutatifs.

On peut songer à justifier cet abus de langage en introduisant l'ensemble $\mathrm{Homtop}(E, E')/\mathrm{Isom}$ des morphismes de E dans E' à isomorphisme près, et en appelant morphisme une telle classe d'isomorphie, au lieu de suivre la définition 3.2. Mais ceci se heurte aux inconvénients très graves qui se présentent, chaque fois qu'on essaie d'identifier deux objets isomorphes d'une catégorie, sans disposer d'un isomorphisme canonique entre

3. Cf. plus bas 14.4, dans le cas de faisceaux abéliens.

eux. L'expérience prouve qu'un tel point de vue est impraticable, et qu'il faut garder la notion « fine » 3.1 de la notion de morphisme entre morphismes de topos, quitte à être obligé, parfois, de se battre avec des compatibilités entre isomorphismes canoniques [(3)].

3.3.1. — Soient E, E', E'' trois $\mathscr{U}$-topos, et considérons des morphismes de topos 330

$$u : E \longrightarrow E' \quad , \quad v : E' \longrightarrow E''.$$

La théorie des foncteurs adjoints nous donne alors un isomorphisme d'adjonction entre les foncteurs composés $v_* u_*$ et $u^* v^*$, en termes des isomorphismes d'adjonction pour les couples (u_*, u^*) et (v_*, v^*). D'autre part, le foncteur $u^* v^*$ exact à gauche, comme composé de deux foncteurs exacts à gauche. Par suite, on trouve un morphisme de E dans E'', qu'on appelle *composé des morphismes u et v*, et qu'on note vu :

$$vu : E \longrightarrow E''.$$

On vérifie alors trivialement que la composition des morphismes est associative, et que pour tout $\mathscr{U}$-topos E, il y a un morphisme de E dans lui-même qui est une unité bilatère pour la composition : c'est le morphisme $(\mathrm{id}_E, \mathrm{id}_E, \varphi)$, où φ est l'isomorphisme d'adjonction évident de id_E avec lui-même. Soit alors $\mathscr{V}$ un univers tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{V}$. On définit une catégorie

$$(\mathscr{V}\text{-}\mathscr{U}\text{-}\,\mathrm{Top}),$$

dont les objets sont les $\mathscr{U}$-topos qui sont $\in \mathscr{V}$, les flèches sont les morphismes entre de tels $\mathscr{U}$-topos, et la composition des flèches étant celle qu'on vient d'expliciter.

3.3.2. — En fait, l'application de composition

$$\mathrm{Homtop}(E, E') \times \mathrm{Homtop}(E', E'') \longrightarrow \mathrm{Homtop}(E, E'')$$

est l'application induite sur les objets par un « foncteur composition des morphismes » :

$$\mathbf{Homtop}(E, E') \times \mathbf{Homtop}(E', E'') \longrightarrow \mathbf{Homtop}(E, E''),$$

dont l'effet sur les flèches est l'opération « produit de convolution » habituel pour des morphismes entre foncteurs (ici des foncteurs image directe). Ces foncteurs composition satisfont à une propriété d'associativité (stricte), pour quatre topos E, E', E'', E''', précisant l'associativité de la composition des morphismes de topos. On peut dire aussi, dans un langage qui commence à devenir familier [2], [9], que les $\mathscr{U}$-topos sont les objets (ou 0-flèches) d'une 2-*catégorie*, dont les 1-flèches sont les morphismes de topos, et les 2-flèches sont les morphismes de morphismes de topos. 331

C'est le fait que les $\mathscr{U}$-topos (éléments d'un univers $\mathscr{V}$) forment une 2-catégorie, et non plus seulement une catégorie ordinaire comme les espaces topologiques ordinaires, qui constitue du point de vue technique la différence la plus importante entre la théorie des topos et celle des espaces topologiques. Ce fait est la source de certaines complications techniques auxquelles on a déjà fait allusion, mais aussi de faits essentiellement nouveaux par rapport à la topologie traditionnelle.

3. Pour des exemples de telles batailles (victorieuses, semble-t-il) nous renvoyons le lecteur au livre de Mme M. Hakim sur les schémas relatifs [9].

3.4. — Le fait que les $\mathscr{U}$-topos (éléments d'un univers $\mathscr{V}$) forment une 2-catégorie (3.3.2) permet en particulier de définir la notion d'*équivalence de deux $\mathscr{U}$-topos E, E'* : on dira que E et E' sont *équivalents* s'il existe des morphismes de topos $u : E \to E'$ et $v : E' \to E$, tels que les composés uv et vu soient isomorphes respectivement au morphisme identique
332 de E et de E' ; on dit alors que les morphismes u et v sont des *équivalences quasi-inverses l'une de l'autre.*

On constate aussitôt que pour que le morphisme de topos $u : E \to E'$ soit une équivalence, il faut et il suffit que u_* soit une équivalence, ou ce qui revient au même, que u^* soit une équivalence. (Utiliser le fait qu'un foncteur $f : E \to E'$ entre deux topos qui est une équivalence est à la fois de la forme u_* et de la forme v^*, avec u et v des morphismes de topos) ; et pour que E et E' soient équivalents au sens de l'alinéa précédent, il faut et il suffit qu'ils soient équivalents en tant que catégories (i.e. comme objets de la 2-catégorie ($\mathscr{V}$- cat)). Comme de juste, cela montre que les notions d'équivalence introduites ne dépendent pas du choix de l'univers $\mathscr{V}$ de 3.3.1.

3.4.1. — Pratiquement, il n'y a pas lieu le plus souvent de distinguer essentiellement entre $\mathscr{U}$-topos équivalents, tout comme il n'y a pas lieu souvent de distinguer essentiellement entre deux catégories équivalentes, — à condition toutefois qu'on dispose d'une équivalence explicite de l'un à l'autre, ou tout au moins une équivalence définie à isomorphisme unique près. C'est la notion d'équivalence de topos qui remplace ici la notion traditionnelle d'homéomorphie entre deux espaces topologiques. Voir l'exemple 4.2 plus bas pour les relations précises entre ces deux notions.

4. Exemples de morphismes de topos

Nous reprenons ici les exemples de 2, en utilisant la notion de morphisme de topos. Les commentaires de 2.0 s'appliquent également au présent numéro. L'univers $\mathscr{U}$ sera généralement sous-entendu.

333

4.1. Le topos $\mathrm{Top}(X)$ pour un espace topologique X variable. —

4.1.1. — Soit une application continue

$$f : X \longrightarrow Y$$

d'espaces topologiques, on va lui associer canoniquement un morphisme de topos

$$\mathrm{Top}(f) \text{ ou } f : \mathrm{Top}(X) \to \mathrm{Top}(Y),$$

avec les notations de 2.1. Lorsqu'on définit $\mathrm{Top}(X)$ comme $\mathrm{Ouv}(X)^{\tilde{}}$, la description la plus commode de $\mathrm{Top}(f)$ est par le foncteur image directe de faisceaux

$$f_* : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(Y),$$

défini par la formule

$$f_*(F) = F \circ f^{-1},$$

où

$$f^{-1} : \mathrm{Ouv}(Y) \longrightarrow \mathrm{Ouv}(X)$$

est le foncteur évident $U \to f^{-1}(U)$. On a déjà noté que ce foncteur est continu et exact à gauche, dont définit bien un foncteur f_* ci-dessus, admettant un adjoint à droite f^* qui est exact à gauche (III 1.9.1). Bien entendu, en toute rigueur, le morphisme de Topos $\mathrm{Top}(f)$ dépend du choix de l'adjoint à droite f^* de f_*, donc n'est défini qu'à isomorphisme canonique près. On se dispensera par la suite de signaler expressément des phénomènes de ce genre.

Lorsqu'on adopte le point de vue « espaces étalés » pour définir $\mathrm{Top}(X)$, c'est le foncteur image inverse

$$f^* : \mathrm{Top}(Y) \longrightarrow \mathrm{Top}(X)$$

qui est le plus commode pour définir le morphisme de Topos $\mathrm{Top}(f)$, en posant simplement 334

$$f^*(Y') = X \times_Y Y'$$

pour tout espace étalé Y' sur Y ; il est évident que le produit fibré est bien un espace étale sur X, et que le foncteur f^* ainsi obtenu est exact à gauche et commute aux $\varinjlim$ quelconques, et définit par suite un morphisme de topos $\mathrm{Top}(f)$. Pour la compatibilité des deux définitions obtenues, nous renvoyons à [TF].

Lorsqu'on a deux applications continues composables

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z,$$

de morphismes de topos. Ces *isomorphismes de transitivité*, pour trois applications continues composables f, g, h satisfont à une relation de compatibilité que nous nous dispensons d'écrire ici, et qui n'est autre que celle envisagée dans SGA 1 VI 7.4 B) (pour $\epsilon = (\mathrm{Esp})^\circ$). On peut l'exprimer en disant que pour X variable dans la catégorie (Esp),

$$X \longmapsto \mathrm{Top}(X)$$

est un « pseudo-foncteur »

(4.1.1.1) $$(\mathscr{U}\text{- esp}) \longrightarrow (\mathscr{V}\text{-}\mathscr{U}\text{-}\top),$$

ou aussi, dans la terminologie des 2-catégories, qu'on a un foncteur *non strict* de 2-catégories [9]. En pratique, on se permettra le plus souvent l'abus de langage consistant à identifier $\mathrm{Top}(gf)$ et $\mathrm{Top}(g)\,\mathrm{Top}(f)$, c'est-à-dire de raisonner comme si (4.1.1.1) était un vrai foncteur de catégories ordinaires. On se permettra les abus de langage analogues dans les autres 335
exemples qui seront traités ci-dessous.

4.1.2. — Les considérations précédentes s'étendent immédiatement au cas des topos associés aux espaces topologiques à groupes d'opérateurs (2.3). Si $f = (f^{\mathrm{es}}, f^{\mathrm{gr}})$,

$$f : (X, G) \longrightarrow (Y, H)$$

est un morphisme d'espaces à opérateurs (où

$$f^{\mathrm{es}} : X \longrightarrow Y \quad , \quad f^{\mathrm{gr}} : G \longrightarrow H$$

sont respectivement des applications continues et des morphismes de groupes, compatibles dans un sens évident), on lui associe un morphisme de topos

$$\mathrm{Top}(f) \text{ ou } f : \mathrm{Top}(X, G) \longrightarrow \mathrm{Top}(Y, H),$$

dont la définition est laissée au lecteur. Lorsque les groupes G et H sont les groupes unité, on retrouve la définition de 4.1.1 ; lorsque par contre ce sont les espaces X et Y qui sont réduits à un point, on trouve comme foncteur image inverse f^* le foncteur « restriction du groupe d'opérateurs »

$$f^* : B_H \longrightarrow B_G,$$

associant à tout H-ensemble le G-ensemble qu'il définit grâce à $f : G \to H$. On retrouvera cet exemple sous d'autres formes encore dans 4.5 et 4.6.1.

4.1.3. — Étant donné une application continue $f : X \to Y$ d'espaces topologiques, on lui associe également un morphisme sur les « gros topos » correspondants (2.5)

$$\mathrm{TOP}(f) \text{ ou } f : \mathrm{TOP}(X) \longrightarrow \mathrm{TOP}(Y),$$

336 défini le plus commodément par le foncteur image inverse

$$f^* : \mathrm{TOP}(Y) \longrightarrow \mathrm{TOP}(X),$$

qui n'est autre que le *foncteur restriction*. Ce morphisme $\mathrm{TOP}(f)$ est un cas particulier du morphisme dit « d'inclusion » pour un topos induit, qui sera étudié dans 5. On voit ainsi que, sous les mêmes réserves que dans 4.1.1, le topos $\mathrm{TOP}(X)$ peut être considéré comme un foncteur en X, pour X variable dans (Esp).

4.2. Propriétés de fidélité de $X \mapsto \mathrm{Top}(X)$. — Nous nous proposons de préciser dans quelle mesure un espace topologique X peut se reconstituer en termes du topos $\mathrm{Top}(X)$, et dans ce but il convient de décrire, pour deux espaces X et Y, la catégorie des morphismes de $\mathrm{Top}(X)$ dans $\mathrm{Top}(Y)$ (3.2), de façon à pouvoir préciser les propriétés de fidélité du « foncteur » $X \mapsto \mathrm{Top}(X)$. Nous nous bornons à énoncer les résultats auxquels on parvient, en renvoyant le lecteur à [9] pour des détails. Le lecteur qui voudra faire l'exercice de vérification lui-même pourra consulter l'exer. 7.8.

4.2.1. — Rappelons qu'un espace topologique X est dit *sobre* si toute partie fermée irréductible de X a exactement un point générique. Signalons que presque tous les espaces utilisés en pratique sont sobres ; il en est en particulier ainsi d'un espace séparé, plus généralement d'un espace dont tous les points sont fermés, ou de l'espace sous-jacent à un schéma. Si X est un espace topologique, on lui associe (*loc. cit.* ou EGA 0_I, réédition) un espace topologique
337 sobre X_{sob} et une application continue

$$\varphi : X \longrightarrow X_{\mathrm{sob}} \tag{4.2.1.1}$$

qui soit *universelle* pour les applications continues de X dans des espaces sobres ; en d'autres termes, on construit un foncteur adjoint à gauche $X \mapsto X_{\mathrm{sob}}$ du foncteur d'inclusion (Espsob) $\to$ (Esp) de la catégorie des espaces sobres dans celle des espaces topologiques « quelconques » (les guillemets rappelant qu'il y a un univers !). La construction explicite se fait en prenant comme points de X_{sob} les parties fermées irréductibles de X, comme ouverts les ensembles de la forme U', où U est en ouvert de X et où $U' \subset X_{\mathrm{sob}}$ désigne l'ensemble des parties fermées irréductibles de X qui rencontrent U. L'application (4.2.1.1) est obtenue en associant à tout $x \in X$ l'adhérence de $\{x\}$. L'espace X est sobre si et seulement si l'application précédente est bijective, donc un homéomorphisme.

On constate que le foncteur

$$\varphi^{-1} : \mathrm{Ouv}(X_{\mathrm{sob}}) \longrightarrow \mathrm{Ouv}(X)$$

induit par φ est un isomorphisme, ce qui implique que le morphisme de topos

$$\mathrm{Top}(\varphi) : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(X_{\mathrm{sob}})$$

défini par φ est également un isomorphisme. Ceci explique à priori pourquoi X_{sob} doit s'introduire nécessairement dans la question de reconstituer X à partir de $\mathrm{Top}(X)$: comme ce dernier ne dépend que de X_{sob} à isomorphisme près, la question ne pourra avoir une réponse affirmative que si X est sobre. Nous préciserons plus bas (7.1) comment X_{sob} peut effectivement se reconstituer en termes de $\mathrm{Top}(X)$, en interprétant ses points comme des 338
« points » du topos $\mathrm{Top}(X)$ (ou encore comme des foncteurs fibres).

4.2.2. — Sur tout espace topologique, il y a lieu d'introduire la relation d'ordre $\leq$ pour laquelle on a

$$x \leq y \iff \overline{\{x\}} \subset \overline{\{y\}} \text{ i.e. } x \in \overline{\{y\}}$$

(qu'on exprime encore en disant que x est une *spécialisation* de y, ou que y est une *générisation* de x). Pour un espace de la forme X_{sob}, ce n'est autre que la relation d'inclusion entre parties fermées irréductibles de X.

Ceci posé, il y a lieu d'introduire, sur l'ensemble des applications d'un espace X dans un autre Y, la relation d'ordre dite de « spécialisation », déduite de celle de Y, savoir

$$f \leq g \iff f(x) \leq g(x) \text{ pour tout } x \in X.$$

Avec ces conventions, on a le résultat suivant :

4.2.3. — *Soient X, Y deux espaces topologiques, avec Y sobre, et soient f et g deux applications continues de X dans Y. Alors il y a au plus un morphisme de* $\mathrm{Top}(f)$ *dans* $\mathrm{Top}(g)$, *et pour qu'il y en ait un, il faut et il suffit que g soit une spécialisation de f. Enfin, tout morphisme de topos* $\mathrm{Top}(X) \to \mathrm{Top}(Y)$ *est isomorphe à un morphisme de la forme* $\mathrm{Top}(f)$, *où $f : X \to Y$ est une application continue (uniquement déterminée grâce à la première assertion).*

Si on définit la catégorie $\mathrm{cat}(I)$ associé à un ensemble ordonné I en déclarant que pour 339
$i \geq j$, il y a exactement une flèche de i dans j, on peut résumer le résultat précédent en disant qu'on a une équivalence de catégories canonique

$$\mathrm{cat}(\mathrm{Hom}_{(\mathrm{esp})}(X,Y)) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Homtop}(\mathrm{Top}(X), \mathrm{Top}(Y))$$

(où le deuxième membre est défini dans 3.2).

On conclut formellement de ces résultats :

Corollaire 4.2.4. — a) *Soit $f : X \to Y$ une application continue. Alors* $\mathrm{Top}(f) : \mathrm{Top}(X) \to \mathrm{Top}(Y)$ *est une équivalence de topos si et seulement si $f_{\text{sob}} : X_{\text{sob}} \to Y_{\text{sob}}$ est un homéomorphisme (donc, lorsque X et Y sont sobres, si et seulement si f est un homéomorphisme).*

b) *Soient X et Y des espaces topologiques. Pour que* $\mathrm{Top}(X)$ *et* $\mathrm{Top}(Y)$ *soient équivalents, il faut et il suffit que X_{sob} et Y_{sob} soient homéomorphes (donc, si X et Y sont sobres, il faut et suffit que X et Y soient homéomorphes).*

4.3. Morphismes dans le topos final : objets constants d'un topos, foncteurs sections. — Désignons par P (initiale de « point ») le topos final type, i.e. $P = (\mathrm{Ens})$ (2.2). Soit E un topos quelconque, on va voir qu'*à isomorphisme unique près, il existe un unique morphisme de topos*

$$f : E \to P$$

plus précisément, que *la catégorie* $\mathbf{Homtop}(E, P)$ *est équivalente à la catégorie ponctuelle* : pour deux objets de cette catégorie, il existe donc une unique flèche de l'un dans l'autre, et 340 c'est un isomorphisme. (Cela justifie dans une certaine mesure l'appellation « topos final »). Pour ceci, rappelons (3.2.1) que $\mathbf{Homtop}(E, P)$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Hom}(P, E)^{\circ}$ formée des foncteurs

$$f^* : P = (\mathrm{Ens}) \longrightarrow E$$

qui commutent aux $\varinjlim$ et sont exacts à gauche. Soit e un ensemble ponctuel, alors tout ensemble X s'écrit canoniquement comme « somme de X copies de e », d'où résulte que la catégorie des foncteurs $g : (\mathrm{Ens}) \to E$ qui commutent aux $\varinjlim$ est équivalente à la catégorie E, en associant à tout g l'objet $g(e)$ de E. On reconstitue g en termes de $T = g(e)$, à isomorphisme unique près, par $g(I) = T \times I$, où on pose $T \times I = \amalg_{i \in I} T_i$, avec $T_i = T$ pour tout $i \in I$. Que le foncteur en I ainsi défini par T commute bien aux $\varinjlim$ résulte du fait qu'il est manifestement adjoint à gauche du foncteur $X \mapsto \mathrm{Hom}(T, X)$ de E dans (Ens). Ceci dit, pour que g soit exact à gauche, il est évidemment nécessaire que $g(e) = T$ soit un objet final de E (puisque e est un objet final de (Ens)), et il résulte facilement du fait que dans E « les sommes sont universelles » (1.1.2 b)) que cette condition est aussi suffisante. On trouve donc que la catégorie des foncteurs f^* images inverses est équivalente à la catégorie des objets finaux de E, qui est évidemment elle-même équivalente à la catégorie finale.

D'après ce qui précède, on voit que le choix d'un morphisme (4.3.1) équivaut essentiellement à celui d'un objet final de E, soit e_E. En termes de celui-ci, on a alors des isomorphismes canoniques de foncteurs

(4.3.2) $$f^*(I) \simeq e_E \times I = \text{ somme de } I \text{ copies de } e_E \quad \text{pour } I \in \mathrm{ob}(\mathrm{Ens}),$$

341 et

(4.3.3) $$f_*(X) = \mathrm{Hom}(e_E, X) \qquad \text{pour } X \in \mathrm{Ob}\, E.$$

4.3.4. — Les deux foncteurs précédents joueront par la suite un rôle important. Pour un ensemble I, on appelle *objet constant de valeur I* dans E (ou, lorsque E est réalisé comme une catégorie $C^{\sim}$ en termes d'un site C, *faisceau constant de valeur I sur C*), l'objet $f^*(I) = e_E \times I$ de (4.3.2). On le notera aussi souvent I_E, où I_C lorsque E est défini par le site C. Le fait que $I \mapsto I_E$ soit le foncteur image inverse d'un morphisme de topos en précise les propriétés d'exactitude, qui impliquent en particulier que ce foncteur respecte toutes les espèces de structure algébriques habituelles, transformant un groupe en un objet groupe de E etc (3.1.2). Lorsqu'on a par exemple un Groupe G de E, on dira que c'est un *Groupe constant* (ou, le cas échéant, un *faisceau en groupes constant*) s'il est isomorphe à un groupe de la forme $G_{\circ E'}$ où $G_{\circ}$ est un groupe ordinaire. Même terminologie pour toute autre espèce de structure « algébrique », au sens précisé (plus ou moins) dans 3.1.2.

4.3.5. — On fera attention que le foncteur $I \mapsto I_E$ n'est pas nécessairement pleinement fidèle (ni même fidèle : prendre pour E le « topos vide » (2.2)), donc un objet constant de E ne détermine pas en général à isomorphisme unique près l'ensemble I qui lui donne naissance. On dit que E est 0-*acyclique*, ou *connexe-non vide*, si le foncteur $I \mapsto I_E$ est pleinement fidèle. Il revient au même, d'après les propriétés générales des foncteur adjoints, de dire que le morphisme d'adjonction

$$I \longrightarrow f_*(f^*(I)) = f_*(I_E) = \mathrm{Hom}(e_E, I_E)$$

est un isomorphisme (de sorte que le foncteur (4.3.3) permet de récupérer la « valeur » d'un 342
objet constant de E). On vérifie facilement qu'il faut et il suffit pour cela que e_E ne soit pas l'objet initial ϕ_E de E, i.e. que E ne soit pas un « topos vide » (ce qui exprime la *fidélité* du foncteur $I \mapsto I_E$ [(3)]), *et* que e_E soit un objet *connexe* de E, i.e. ne soit pas somme de deux objets de E qui ne soient pas « vides » (i.e. qui ne soient pas des objets initiaux de E).

4.3.6. — Le foncteur (4.3.3) est aussi souvent appelé *foncteur sections* et noté Γ_E ou $\Gamma(E, -)$ ou simplement Γ :

$$\mathrm{Hom}(e_E, X) = \Gamma_E(X) = \Gamma(E, X) = \Gamma(X). \tag{4.3.6.1}$$

C'est un foncteur commutant aux limites projectives quelconques, mais pas exact à droite en général, dont les foncteurs dérivés (sur les objets groupes abéliens) seront étudiés dans le prochain exposé.

4.4. Morphismes du « topos vide ». — Soit ϕ_{top} un topos vide, qui correspond donc à une catégorie de faisceaux $\boldsymbol{\Phi}$ équivalente à la catégorie finale (2.2). Soit E un topos. La catégorie des foncteurs de E dans $\boldsymbol{\Phi}$ est évidemment équivalente à la catégorie ponctuelle, et tout tel foncteur commute aux limites inductives et projectives (sans aucun mérite d'ailleurs), donc peut être considéré comme un foncteur image inverse f pour un morphisme de topos $\phi_{\mathrm{top}} \to E$. Il en résulte que la *catégorie* $\mathbf{Homtop}(\phi_{top}, E)$ *est équivalente à la catégorie ponctuelle,* et en particulier qu'*il existe à isomorphisme unique près un et un seul morphisme de topos* 343

$$\phi_{\mathrm{top}} \longrightarrow E. \tag{4.4.1}$$

Ceci justifie dans une certaine mesure la terminologie « topos initial » introduite dans 2.2.

On peut aussi déterminer les morphismes de topos

$$E \longrightarrow \phi_{\mathrm{top}}\ ; \tag{4.4.2}$$

on vérifie aussitôt qu'il existe un tel morphisme si et seulement si l'objet initial de E est aussi un objet final, i.e. si et seulement si E lui-même est un « topos vide », et que dans ce cas la catégorie $\mathbf{Homtop}(E, \phi_{\mathrm{top}})$ est encore équivalente à la catégorie ponctuelle. L'unique morphisme (4.4.2) (modulo isomorphie) est alors une équivalence de topos.

4.5. Le topos classifiant B_G pour G Groupe variable. —

4.5.1. — Soient E un topos, et

$$f : G \longrightarrow H$$

un morphisme de Groupes dans E. On en déduit un foncteur « restriction du Groupe d'opérateurs »

$$f^* : B_H \longrightarrow B_G,$$

où les notations sont celles de 2.4. Il est trivial que ce foncteur commute aux limites inductives et aux limites projectives, a fortiori il peut être interprété comme un foncteur image inverse associé à un morphisme de topos

$$B_f \text{ ou } f : B_G \longrightarrow B_H.$$

On explicite aisément le foncteur image directe correspondant 344

3. ou encore le fait que ce foncteur est conservatif (I 6.3).

$$f_* : B_G \longrightarrow B_H$$

par la formule

$$f_*(X) = \mathbf{Hom}_G(H_s, X),$$

où X est un objet de E avec G opérant à gauche, où H_s est H regardé comme muni des opérations à gauche par G déduites de f, et où $\mathbf{Hom}_G$ désigne le sous-objet qu'on devine de l'objet **Hom** défini plus bas (10.2) ; on fait opérer H à gauche sur $\mathbf{Hom}_G(H_s, X)$ grâce aux opérations droites de H sur H_s par translations à *droite*.

Comme le foncteur image inverse f^* commute aux $\varprojlim$ quelconques (et non seulement aux $\varprojlim$ finies), il est lui-même l'adjoint à droite d'un foncteur

$$f_! : B_G \longrightarrow B_H,$$

de sorte qu'on a une suite de trois foncteurs adjoints comme dans 3.1.3 :

$$f_!, f^*, f_*.$$

On explicite aisément $f_!$ par la formule

$$f_!(X) = H \times^G X,$$

où le deuxième membre désigne le « produit contracté », déduit des opérations de G sur X (à gauche) et sur H (à droite via translations à droite et f), défini comme le quotient de $H \times X$ par G opérant par la formule

$$g \circ (h, x) = (hg^{-1}, gx).$$

Le foncteur $f_!$, étant un adjoint à gauche, commute évidemment aux limites inductives,
345 mais il n'est pas en général exact à gauche (i.e. il ne peut être considéré à son tour comme un foncteur image inverse par un morphisme de topos $B_H \to B_G$). En fait, on vérifie facilement qu'il ne peut être exact à gauche que si $f : G \to H$ est un isomorphisme. De même, le foncteur f_*, qui commute aux limites projectives, n'est pas en général exact à droite, et a fortiori n'admet pas en général d'adjoint à droite. Tout au moins lorsque E est le topos ponctuel i.e. que G et H sont des groupes ordinaires, f_* n'est exact à droite que si f est un isomorphisme.

Lorsqu'on a un deuxième morphisme de groupes $g : H \to K$, on trouve comme dans 4.1.1 une transitivité à isomorphisme canonique près, de sorte que, sous la réserve habituelle, on peut considérer que le topos classifiant B_G dépend *fonctoriellement* du Groupe G. On laisse au lecteur le soin de généraliser ce comportement fonctoriel pour le cas où on fait varier simultanément G *et* le topos E.

4.5.2. Le topos $B_{\mathscr{G}}$ pour un pro-groupe variable G. — On laisse au lecteur le soin de préciser le caractère covariant du topos $B_{\mathscr{G}}$ (2.7) par rapport à $\mathscr{G}$, en calquant l'exposé que nous en donnons dans 4.5.1. On fera attention cependant que dans le cas d'un morphisme $f : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ de pro-groupes qui ne sont pas essentiellement constants, le morphisme de topos correspondant $B_{\mathscr{G}} \to B_{\mathscr{H}}$ ne permet pas en général la définition d'un foncteur $f_!$ (dont l'adjoint à droite soit le foncteur f^* de restriction du pro-groupe d'opérateurs). Supposant, pour simplifier l'énoncé, que $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ soient définis par des groupes *profinis* G et H, on voit facilement que $f_!$ existe si et seulement si l'image du morphisme envisagé $f : G \to H$ est
346 d'indice fini dans H, et dans ce cas $f_!$ est donné par la même formule que dans 4.5.

4.6. Le topos $\widehat{C}$ pour C catégorie variable. —

4.6.1. — Soit

$$f : C \longrightarrow C'$$

un foncteur d'une catégorie $C \in \mathscr{U}$ dans une autre C', d'où un foncteur

$$f^* : \widehat{C}' \longrightarrow \widehat{C} \quad , \quad f^*(F) = F \circ f.$$

Il est trivial que ce foncteur commute aux limites projectives et aux limites inductives, a fortiori il peut être considéré comme le foncteur image inverse pour un morphisme de topos

$$\hat{f} \text{ ou } f : \widehat{C} \to \widehat{C}'.$$

Le foncteur image directe correspondant

$$f_* : \widehat{C} \longrightarrow \widehat{C}'$$

n'est autre que le foncteur également noté f_* dans I 5.1. De plus (comme il était à prévoir du fait que f^* commute également aux $\varprojlim$ quelconques) f^* admet aussi un adjoint à gauche

$$f_! : C \longrightarrow C',$$

(qui était noté aussi $f_!$ dans I 5.1). On obtient donc une suite de trois foncteurs adjoints

$$f_!, f^*, f_*,$$

le premier étant d'ailleurs un prolongement de $f : C \to C'$ aux catégories de préfaisceaux (pour le plongement habituel de C, C' dans les catégories $\widehat{C}$, $\widehat{C}'$). On fera attention que le foncteur $f_!$ n'est pas en général exact à gauche, ni f_* exact à droite, ce qui lève donc toute ambiguïté sur la direction de la variance du topos $\widehat{C}$ associé à la catégorie variable C : ce to- **347**
pos est un foncteur *covariant* en C, sous la réserve habituelle provenant des isomorphismes de transitivité (cf. 4.1.1). Lorsque l'ensemble des objets de C et de C' est réduit à un élément, de sorte que C et C' s'identifient à des monoïdes G, G', les topos correspondants sont les topos classifiants B_{G° et $B_{G'^\circ}$, et on retrouve la variance de ceux-ci pour G variable rencontrée déjà à d'autres points de vue dans 4.1.2 et 4.5 (où la restriction à des groupes au lieu de monoïdes n'avait rien d'essentiel).

4.6.2. — On peut préciser la dépendance 2-fonctorielle du topos $\widehat{C}$ par rapport à C, en introduisant pour deux catégories $C, C' \in \mathscr{U}$ un foncteur canonique

$$\mathbf{Hom}(C, C') \longrightarrow \mathbf{Homtop}(\widehat{C}, \widehat{C}'). \tag{4.6.2.1}$$

Il reste à définir ce foncteur sur les flèches, et pour ceci on note que $f \mapsto f^*$ permet d'identifier (à équivalence de catégories près) le deuxième membre à une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Hom}(\widehat{C}', \widehat{C})^\circ$ (3.2.1). Or si $f, g : C \to C'$ sont deux foncteurs, tout morphisme $u : f \to g$ de foncteurs définit un morphisme $f \circ g \to F \circ f$ de foncteurs en $F \in \operatorname{ob} \widehat{C}'$ (F étant un *contra*foncteur), qui est donc un morphisme $g^* \to f^*$ et définit par suite un morphisme $\hat{f} \to \hat{g}$ comme annoncé.

Lorsque C est la catégorie ponctuelle, $\widehat{C}$ est le topos ponctuel (2.2) noté P, et (4.6.2.1) s'interprète comme un foncteur naturel

$$C' \longrightarrow \mathbf{Homtop}(P, \widehat{C}') \overset{\text{dfn}}{=} \mathbf{Points}(\widehat{C}') \tag{4.6.2.2}$$

348 de C' dans la « *catégorie des points* » de $\widehat{C}'$, qui sera étudiée dans 6. Ce foncteur n'est pas nécessairement une équivalence de catégories (7.3.3), a fortiori (4.6.2.1) n'est pas nécessairement une équivalence de catégories.

Par contre, le foncteur (4.6.2.1) est toujours *pleinement fidèle*. Pour voir ceci, notons que si $f, g : E \to E'$ sont deux morphismes de topos tels que $f_!$ et $g_!$ soient définis (3.1.3), il résulte de la théorie des foncteurs adjoints qu'on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}(f_!, g_!) \simeq \mathrm{Hom}(g^*, f^*) \simeq \mathrm{Hom}(f_*, g_*) \overset{\mathrm{dfn}}{=} \mathrm{Hom}(f, g).$$

Appliquant ceci à des foncteurs de la forme $\hat{f}$, $\hat{g}$ associés à $f, g : C \to C'$, on trouve le résultat annoncé, compte tenu que l'application naturelle de prolongement $\mathrm{Hom}(f, g) \to \mathrm{Hom}(f_!, g_!)$ est bijective (I 7.8).

4.6.3. — On peut se demander quand le foncteur (4.6.2.1) est une équivalence de catégories, i.e. quand il est essentiellement surjectif, ce qui est un cas particulier de la question de déterminer tous les morphismes de topos $\widehat{C} \to \widehat{C}'$. Plus généralement, si C est une catégorie $\in \mathcal{U}$ et E un topos, on peut se proposer de déterminer les morphismes de topos

$$f : \widehat{C} \longrightarrow E.$$

La catégorie de ces morphismes est équivalente à la catégorie opposée de celle des foncteurs $f^* : E \to \widehat{C}$ commutant aux limites inductives quelconques et aux limites projectives finies. Interprétant les foncteurs $E \to \widehat{C}$ comme des foncteurs $E \times C^\circ \to (\mathcal{U}\text{-}\mathrm{Ens}) = (\mathrm{Ens})$, ou encore comme des foncteurs $F : C^\circ \to \mathbf{Hom}(E, (\mathrm{Ens}))$, la propriété d'exactitude envisagée s'exprime par la condition que pour tout objet X de C, le foncteur $F(X) : E \to (\mathrm{Ens})$ commute aux limites inductives quelconques et aux limites projectives finies, (ou, comme
349 nous dirons dans 6, $F(X)$ est un « *foncteur fibre* » sur E). Il revient au même de dire que $F(X)$ est le foncteur image inverse pour un morphisme de topos $P \to E$, de sorte qu'on trouve finalement une équivalence de catégories canonique

$$\mathbf{Homtop}(\widehat{C}, E) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Hom}(C, \mathbf{Points}(E)), \tag{4.6.3.1}$$

où on désigne pour abréger par

$$\mathbf{Points}(E) = \mathbf{Homtop}(P, E)$$

la catégorie des points du topos E.

Lorsque E est de la forme $\widehat{C}'$, on voit aussitôt à partir des définitions que la composé de (4.6.2.1) et de l'équivalence précédente (4.6.3.1) est le foncteur

$$\mathbf{Hom}(C, C') \longrightarrow \mathbf{Hom}(C, \mathbf{Points}(\widehat{C}')) \tag{4.6.3.2}$$

défini par $F \mapsto i \circ F$, où $i : C' \to \mathbf{Points}(\widehat{C}')$ est le plongement canonique (4.6.2.2). Il s'ensuit aussitôt que *pour que* (4.6.2.1) *soit une équivalence, il faut et il suffit que C soit vide ou que* (4.6.2.2) *soit essentiellement surjectif* (donc une équivalence de catégories). Cette dernière condition sur C' est satisfaite dans certains cas intéressants, et notamment lorsque C' est la catégorie à un seul objet définie par un groupe G (7.2.5).

Remarque 4.6.4. — [4] Le fait d'avoir associé un topos $\widehat{C}$ à une catégorie arbitraire C suggère qu'une catégorie C admet des invariants de nature topologique (groupes de cohomologie, d'homotopie etc.), tout comme un topos. Les groupes de cohomologie de $\widehat{C}$ à coefficients dans un objet groupe abélien F (au sens général étudié dans V) ne sont autres que les valeurs des foncteurs dérivés $\varprojlim^{(n)}$ du foncteur $\varprojlim$, déjà familiers aux topologues. J. L. Verdier et (indépendamment) D. G. Quillen ont vérifié que lorsqu'on se borne aux coefficients constants, ou plus généralement localement constants, ces groupes de cohomologie s'identifient aux groupes de cohomologie de l'ensemble semi-simplicial Nerf(C) canoniquement associé à C [5, n° 212, prop. 4.1] et que de plus, à isomorphie près dans la « catégorie homotopique » de [2], tout ensemble semi-simplicial peut être obtenu à l'aide d'une catégorie C. Moyennant une notion convenable de type d'homotopie pour des topos, que nous ne précisons pas ici, on peut dire que les types d'homotopie semi-simpliciaux des topologues ne sont autres que les types d'homotopie des topos de la forme spéciale $\widehat{C}$, plus généralement des topos E où tout objet admette un recouvrement qui raffine tous les autres (2.6) [4]. En l'absence de cette condition sur E, on peut tout au mieux exprimer son type d'homotopie par un *système projectif* convenable d'ensembles semi-simpliciaux [1]. 350

4.7. Le topos $C^\sim$ pour un site C variable (foncteurs cocontinus). — Soit

$$f : C \longrightarrow C'$$

un foncteur cocontinu (III 2.1) entre sites $\in \mathscr{U}$, i.e. un foncteur tel que le foncteur $\hat{f}_*$ de $\widehat{C}$ dans $\widehat{C}'$ (4.6.1) applique $C^\sim$ dans $C'^\sim$, c'est-à-dire induise un foncteur

$$\tilde{f}_* : \widetilde{C} \longrightarrow C'^{\sim} \tag{4.7.1}$$

rendant commutatif le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} C^\sim \arrow[r, "\tilde{f}_*"] \arrow[d, "i_*"'] & C'^\sim \arrow[d, "i'_*"] \\ \widehat{C} \arrow[r, "\hat{f}_*"] & \widehat{C}' \end{tikzcd} \quad , \tag{4.7.2}$$

où i_*, i'_* sont les foncteurs d'inclusion. On a vu alors (III 2.3) que le foncteur $\tilde{f}_*$ admet un adjoint à gauche $\tilde{f}^*$, et que ce dernier est exact à gauche. En d'autres termes, $\tilde{f}_*$ est le foncteur image directe associé à un morphisme de topos 351

$$\tilde{f} \text{ ou } f : C^\sim \longrightarrow C'^{\sim},$$

4. N.D.E. : Pour un point de vue récent de la notion de type d'homotopie de topos, voir [15] § 7.1.6.

4. et, plus généralement encore, des topos qui sont « localement ∞ - connexes » en un sens évident que nous laissons au lecteur le soin de préciser.

le foncteur image inverse correspondant étant bien entendu $\tilde{f}^*$. Prenant les adjoints à gauche des foncteurs en jeu, le diagramme commutatif (4.7.2) donne d'ailleurs un diagramme commutatif à isomorphisme près

$$
\text{(4.7.3)} \qquad
\begin{tikzcd}
C^{\sim} & & C'^{\sim} \arrow[ll, "\tilde{f}^*"'] \\
\widehat{C} \arrow[u, "\underline{a}"] & & \widehat{C}' \arrow[ll, "\hat{f}^*"'] \arrow[u, "\underline{a}'"']
\end{tikzcd} ,
$$

où $\underline{a}$ et $\underline{a}'$ sont les foncteurs « faisceaux associés », diagramme qui redonne aussitôt la formule (III 2.3)

$$\tilde{f}^* = \underline{a}\hat{f}^* i'.$$

La propriété de transitivité pour les morphismes de topos $\hat{f} : \widehat{C} \to \widehat{C}'$ implique la même propriété pour les morphismes de topos $\tilde{f} : C^{\sim} \to C'^{\sim}$ associés à des foncteurs cocontinus, de sorte qu'on peut dire que *le topos $C^{\sim}$ varie fonctoriellement en C* de façon *covariante*, quand on prend comme « morphismes » de sites les foncteurs cocontinus.

352 Dans tous les cas rencontrés jusqu'à présent, le foncteur cocontinu f utilisé est également continu, c'est-à-dire (III 1.1) se « prolonge » en un foncteur

$$\tilde{f}_! : C^{\sim} \longrightarrow C'^{\sim}$$

commutant aux limites inductives, et qui est adjoint à gauche de $\tilde{f}^*$, de sorte qu'on a une suite de trois foncteurs adjoints

$$\tilde{f}_!, \tilde{f}^*, \tilde{f}_*.$$

On fera attention que le foncteur $\tilde{f}_!$ n'est pas en général exact à gauche, ni $\tilde{f}_*$ exact à droite, ce qui lève toute ambiguïté sur la direction de la variance du topos $C^{\sim}$, pour C variable par des foncteurs dont on suppose seulement qu'ils sont cocontinus, ou même continus et cocontinus.

Remarque 4.7.4. — Étant donné un morphisme de topos

$$F : E \longrightarrow E',$$

pour qu'il existe un foncteur $F_!$ adjoint à gauche de F^*, il faut et il suffit qu'on puisse « réaliser » (à équivalence près) E et E' sous la forme $C^{\sim}$ et $C'^{\sim}$, pour deux sites $C, C' \in \mathscr{U}$, et qu'on puisse trouver un foncteur *continu et cocontinu* $f : C \to C'$ tel que F s'identifie à $\tilde{f}$. C'est évidemment suffisant, et pour la nécessité, il suffit de prendre pour C et C' des petites sous-catégories pleines génératrices de E et E' respectivement, telles que

$$F_!(\operatorname{ob} C) \subset \operatorname{ob} C',$$

munies des topologies induites par celles de E et de E', et de prendre pour f le foncteur induit par $F_!$ (cf. 1.2.1). Rappelons (1.8) que l'existence de $F_!$ signifie aussi que F^* commute
353 aux limites projectives, ou, ce qui revient ici au même puisque ce foncteur est exact à gauche, qu'il commute aux produits.

4.7.5. — Si on se demande quels sont les morphismes de topos $F : E \to E'$ qui peuvent se réaliser par un foncteur cocontinu (pas nécessairement continu) de sites, on voit de même que la réponse est la suivante : l'ensemble des objets X de E tels que le foncteur $X' \mapsto \mathrm{Hom}(X, F^*(X'))$ de E' dans (Ens) commute aux limites projectives (ou, ce qui revient au même, aux produits) doit être une *famille génératrice de E.*[5]

4.8. Le morphisme de topos $\widetilde{C} \to \widehat{C}$ pour un site C. — Soit C un petit site, auquel sont donc associés les deux topos $C^{\sim}$ et $\widehat{C}$ (le deuxième ne dépendant pas de la topologie mise sur C). On a défini dans II 3.4 le foncteur « faisceau associé »

$$\underline{a} : \widehat{C} \longrightarrow C^{\sim},$$

et établi qu'il est exact à gauche et commute aux limites inductives. C'est donc le foncteur image inverse associé à un morphisme de topos

$$p : \widetilde{C} \longrightarrow \widehat{C}, \ p^* = \underline{a},$$

le foncteur image directe correspondant étant l'inclusion canonique

$$i = p_* : C^{\sim} \longrightarrow \widehat{C}.$$

Il est bien connu que ce dernier foncteur n'est pas en général exact à droite (ces foncteur dérivés sur les objets abéliens donnent naissance aux préfaisceaux de cohomologie $\mathcal{X}^n(F)$ de V 2), et que $\underline{a}$ ne commute pas en général aux $\varprojlim$ quelconques, ce qui lève toute ambiguïté sur la direction du morphisme « naturel » de topos entre $\widehat{C}$ et $C^{\sim}$.

Lorsqu'on a un foncteur cocontinu

$$f : C \longrightarrow C'$$

de sites, on en déduit un diagramme de morphismes de topos 354

$$\begin{tikzcd} C^{\sim} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p_*"'] & C'^{\sim} \arrow[d, "p'_*"] \\ \widehat{C} \arrow[r, "\hat{f}"] & \widehat{C'} \end{tikzcd}$$

qui est commutatif à isomorphisme canonique près : c'est en effet ce qu'exprime la commutativité du diagramme de foncteurs (4.7.2). On peut donc dire que le morphisme de topos $p : C^{\sim} \to \widehat{C}$ est fonctoriel en C, quand on varie C par des foncteurs *cocontinus* entre sites.

4.9. Effet d'un foncteur continu de sites. Morphismes de sites. —

5. N.D.E. : Cet énoncé ne paraît pas correct : la condition exprimée est équivalente au fait que F^* commute aux produits quelconques, ou encore que F^* possède un adjoint à gauche $F_!$. Pour tout site C, le foncteur identité $F = id : C \longrightarrow C$ est cocontinu lorsque l'on munit le membre de droite de la topologie triviale. Le foncteur $F^* : \widehat{C} \longrightarrow \widetilde{C}$ est alors le foncteur faisceau associé, et ne commute pas en général avec les produits quelconques.

4.9.1. — Si
$$f : C \longrightarrow C'$$
est un foncteur continu de C dans C'. i.e. tel que le foncteur $\hat{f}^* : \widehat{C'} \to \widehat{C}$ applique $C'^{\sim}$ dans $C^{\sim}$, donc induise un foncteur
$$f_s : C'^{\sim} \longrightarrow C^{\sim},$$
on a vu (III 1.2) que ce dernier admet un adjoint à gauche
$$f^s : C^{\sim} \longrightarrow C'^{\sim},$$
qui « prolonge » d'ailleurs f dans un sens évident. On fera attention qu'en général f^s n'est pas exact à gauche (même si f est de plus cocontinu), ni f_s ne commute aux limites inductives, de sorte que la donnée de f ne permet pas, sans autre hypothèse, de décrire un morphisme de topos dans un sens ou dans l'autre entre $C^{\sim}$ et $C'^{\sim}$. Le cas où f est coconti-
355 nu, i.e. où f_s commute aux limites inductives et peut donc être regardé comme un foncteur image inverse pour un morphisme de topos $\tilde{f} : C^{\sim} \to C'^{\sim}$, a été examiné dans 4.7. Nous allons examiner le cas où le foncteur f^s est exact à gauche, donc peut être considéré comme un foncteur image inverse pour un morphisme de topos *en sens inverse* :

$$\mathrm{Top}(f) = g : C'^{\sim} \longrightarrow C^{\sim}. \tag{4.9.1.1}$$

On fera attention qu'*on a pris garde de ne pas noter ce morphisme par la lettre $\tilde{f}$ ou f, pour éviter des confusions avec la situation de 4.7, suivant en cela les recommandations générales de* 3.1.3. On dit parfois que le foncteur $f : C \to C'$ est un *morphisme de sites de C' dans C* (attention, *pas de C dans C'*) s'il est continu et si le foncteur f^s est exact à gauche, en d'autres termes s'il existe un morphisme de topos (4.9.1.1) tel que, le foncteur image inverse correspondant
$$g^* : C^{\sim} \longrightarrow C'^{\sim}$$
prolonge le foncteur f, i.e. rende commutatif à isomorphisme près le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\epsilon"'] & C' \arrow[d, "\epsilon'"] \\ C^{\sim} \arrow[r, "g^*"] & C'^{\sim} \end{tikzcd},$$

où ϵ, ϵ' sont les foncteurs canoniques de II 4.4.0.

4.9.2. — Pratiquement, on reconnaît qu'un foncteur continu $f : C \to C'$ est un morphisme de sites de C' dans C, par le fait que dans C les limites projectives finies sont représentables,
356 et que f y commute (III 1.3 5)). Moyennant la condition indiquée sur C (presque toujours vérifiée en pratique), et supposant de plus que la topologie de C' est moins fine que la topologie canonique (presque toujours vérifiée également), la condition suffisante précédente (f exact à gauche) pour que f soit un morphisme de sites de C' dans C est d'ailleurs aussi nécessaire.

4.9.3. — Dans l'esprit de ce qui précède, si C et C' sont deux $\mathcal{U}$-sites, il y a lieu de définir la catégorie des morphismes de site $\mathbf{Morsite}(C', C)$ de C dans C' comme la sous-catégorie pleine de la catégorie *opposée* $\mathbf{Hom}(C, C')^\circ$ de la catégorie des foncteurs de C dans C', formée des foncteurs qui veulent bien être des morphismes de sites (de C' dans C). De cette façon, on obtient un foncteur canonique (défini à isomorphisme unique près)

$$\mathbf{Morsite}(C', C) \longrightarrow \mathbf{Homtop}(C'^{\sim}, C^{\sim}).$$

Proposition 4.9.4. — *Soient E un $\mathcal{U}$-topos, C un $\mathcal{U}$-site, alors le foncteur $f \mapsto f^*|C = f^* \circ \epsilon_C$, associant à tout morphisme de topos $f : E \to C^{\sim}$ la « restriction » à C du foncteur image inverse associé $f^* : C^{\sim} \to E$, induit une équivalence de catégories*

$$\mathbf{Homtop}(E, C^{\sim}) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Morsite}(E, C)(\hookrightarrow \mathbf{Hom}(C, E)^\circ).$$

Lorsque dans C les $\varprojlim$ finies sont représentables, le foncteur pleinement fidèle correspondant

$$\mathbf{Homtop}(E, C^{\sim}) \longrightarrow \mathbf{Hom}(C, E)^\circ$$

a comme image essentielle l'ensemble des foncteurs $g : C \to E$ qui sont exacts à gauche et continus, ou encore qui sont exacts à gauche et transforment famille couvrante en famille couvrante. 357

La dernière assertion résulte de la première grâce à 4.9.2. D'autre part, on déduit de III 1.2 iv) et de IV 1.2 iii) que le foncteur $G \to G \circ \epsilon$ induit une équivalence de la catégorie des foncteurs *continus* de $C^{\sim}$ dans E, et la catégorie des foncteurs *continus* de C dans E, un foncteur quasi-inverse étant obtenu par $g \to g^s$ dans les notations de *loc. cit.* D'autre part, par définition même, g est un morphisme de sites si et seulement si g^s est le foncteur image inverse associé à un morphisme de topos $E \to C^{\sim}$, d'où la conclusion grâce à 3.2.1, le « ou encore » provenant de III 1.6.

On retiendra surtout de 4.9.4 que (lorsque dans C les $\varprojlim$ finies sont représentables) « il revient au même » de se donner un morphisme de topos $f : E \to C^{\sim}$, ou un foncteur $g : C \to E$ qui est exact à gauche et transforme familles couvrantes en familles couvrantes.

4.9.5. — Utilisant les développements 4.9.1 et 4.9.3, on voit comme d'habitude que pour un $\mathcal{U}$-site C variable, via la notion de morphisme de sites et de morphisme de morphismes de sites qu'on vient d'expliciter, le topos $C^{\sim}$ dépend fonctoriellement (ou plus exactement, 2-fonctoriellement) du site C. On notera que grâce à la terminologie introduite, $C^{\sim}$ dépend de façon *covariante* du site C.

4.9.6. — Il est immédiat que (contrairement à ce qui se passe pour la notion de foncteur cocontinu, cf. 4.7 4) *tout* morphisme de topos $F : E \to E'$ peut se réaliser à l'aide d'un morphisme de sites $f : C \to C'$ (i.e. d'un foncteur continu $f : C' \to C$ tel que…) : il suffit de choisir dans E et E' des petites sous-catégories pleines génératrices C et C' 358
respectivement, munies des topologies induites par celles de E et de E', telles que l'on ait

$$F^*(\mathrm{ob}\, C') \subset \mathrm{ob}\, C,$$

et de prendre pour f le foncteur induit par F^*. C'est ce qui explique que la plupart des morphismes de topos qu'on rencontre en pratique sont effectivement décrits à l'aide de morphismes de sites (plutôt qu'à l'aide de foncteurs cocontinus comme en 4.7).

4.10. Relations entre le petit et le gros topos associés à un espace topologique X. — On reprend les notations de 2.5. En particulier, $\mathscr{V}$ est un univers tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{V}$. Nous nous écartons de la convention de 2.1, en désignant par $\mathrm{Top}(X)$ le topos des $\mathscr{V}$-faisceaux (et non pas des $\mathscr{U}$-faisceaux) sur X. Ainsi, nous raisonnerons avec des $\mathscr{V}$-topos et non des $\mathscr{U}$-topos. (NB il serait possible de garder les $\mathscr{U}$-topos, en adoptant la convention appropriée pour la définition $\mathrm{TOP}(X)$, de sorte que celui-ci soit un $\mathscr{U}$-topos, cf. 2.5). Ceci posé, nous allons définir DEUX morphismes de topos

$$\begin{cases} f : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{TOP}(X) \\ g : \mathrm{TOP}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(X) \quad , \quad gf \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{Top}(X)} , \end{cases} \tag{4.10.1}$$

donnant lieu à une suite de trois foncteurs adjoints

$$g^* = f_! \quad , \quad g_* = f^* \quad , \quad g^! = f_*, \tag{4.10.1.1}$$

359 les notations étant celles de 3.1.3. Nous allons définir successivement les deux premiers foncteurs de cette suite, le troisième étant défini alors comme adjoint à droite du deuxième.

4.10.2. — Le foncteur

$$g_* = f^* : \mathrm{TOP}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(X)$$

est défini simplement comme le *foncteur restriction* de $(\mathrm{Esp})_{/X}$ au site $\mathrm{Ouv}(X)$ des ouverts de X, qui transforme bien faisceaux en faisceaux, comme il résulte immédiatement de la définition. Désignant par des lettres soulignées des faisceaux sur le gros site de X, on désigne, pour un tel faisceau $\underline{F}$, par $\underline{F}_X$ sa restriction au site $\mathrm{Ouv}(X)$, d'où un foncteur

$$\mathrm{Restr} : \underline{F} \longmapsto \underline{F}_X : \mathrm{TOP}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(X). \tag{4.10.2.1}$$

Il est évident que ce foncteur commute aux $\mathscr{V}$-limites projectives, puis-que celles-ci se calculent argument par argument (on pourrait aussi invoquer l'existence de l'adjoint à gauche, construit dans 4.10.4 ci-dessous.) Je dis qu'il commute également aux $\mathscr{V}$-limites inductives. Pour s'en convaincre, on va donner une interprétation fort commode des « gros » faisceaux sur X, i.e. des objets de $\mathrm{TOP}(X)$, en termes de faisceaux ordinaires (NB il s'agit de $\mathscr{V}$-faisceaux) sur les espaces topologiques X' au-dessus de X.

4.10.3. — Pour un gros faisceau $\underline{F}$ sur X, et pour tout espace X' sur X (sous-entendu : $X' \in \mathscr{U}$), on définit de façon évidente, comme dans 4.10.2, le « petit » faisceau $\underline{F}_{X'}$, restriction de $\underline{F}$ à X'. Si

$$u : X'' \longrightarrow X'$$

360 est un morphisme de $(\mathrm{Esp})_{/X}$, on définit alors de façon évidente un morphisme $u_*(\underline{F}_{X''}) \to \underline{F}_{X'}$, ou ce qui revient au même, un « *morphisme de transition* »

$$\varphi_u : u^*(\underline{F}_{X'}) \longrightarrow \underline{F}_{X''}. \tag{4.10.3.1}$$

Ces morphismes, pour u variable, satisfont à une condition de transitivité évidente pour un composé

$$X''' \xrightarrow{u} X'' \xrightarrow{v} X'$$

de morphismes dans $(\mathrm{Esp})_{/X}$, qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter. On obtient de cette façon un foncteur naturel, qui va de la catégorie $\mathrm{TOP}(X)$ des gros faisceaux sur X, dans la catégorie des systèmes

$$(\underline{F}_{X'}) \quad (X' \in \mathrm{ob}(\mathrm{Esp})_{/X}), (\varphi_u) \quad (u \in Fl(\mathrm{Esp})_{/X}),$$

satisfaisant à la condition de transitivité envisagée, et tels de plus que pour tout morphisme $u : X'' \to X'$ qui est une *immersion ouverte* (ou, plus généralement, un étalement), le morphisme de transition φ_u soit un isomorphisme. Comme les foncteurs $u^* : \mathrm{Top}(X') \to \mathrm{Top}(X'')$ utilisés pour la description des φ_u commutent aux $\mathscr{V}$-limites inductives, il en résulte aussitôt que dans la description précédente des objets de $\mathrm{TOP}(X)$ en termes de « petits » faisceaux $F_{X'}$, les $\mathscr{V}$-limites inductives se calculent argument par argument, i.e. les foncteurs de la forme $\underline{F} \to \underline{F}_{X'}$ commutent aux $\mathscr{V}$-limites inductives.

En particulier, il en est ainsi du foncteur $\underline{F} \mapsto \underline{F}_X$ envisagé dans 4.10.2. Il admet donc bien un adjoint à droite (1.5). Il reste à en construire un adjoint à gauche (dont l'existence résulte d'ailleurs a priori de 1.8), et de vérifier que ce dernier est exact à gauche. Cela achèvera la **361**
définition des morphismes de topos annoncés (4.10.1) en termes des foncteurs (4.10.1.1)

4.10.4. — Le foncteur

$$g^* = f_! : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{TOP}(X)$$

s'obtient en associant à tout petit faisceau F sur X le système de ses images inverses $(F_{X'})$, $X' \in \mathrm{ob}(\mathrm{Esp})_{/X}$, par les morphismes structuraux $X' \to X$, le morphisme de transition φ_u pour un $u : X'' \to X'$ étant l'isomorphisme de transitivité pour les images inverses de faisceaux (4.1.1). On voit aussitôt qu'on obtient ainsi un foncteur

$$\mathrm{Prol} : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{TOP}(X),$$

pleinement fidèle, dont l'image essentielle est formée des gros faisceaux $\mathscr{F}$ sur X pour lesquels tous les morphismes de transitivité φ_u de (4.10.3.1) sont des isomorphismes. Nous laissons au lecteur le soin de définir un isomorphisme d'adjonction entre ce foncteur de prolongement canonique et le foncteur restriction de 4.10.2, prouvant que ce dernier est adjoint à droite du premier. C'est immédiat en termes de la description 4.10.3 de la catégorie $\mathrm{TOP}(X)$.

Remarques 4.10.5. — a) La construction 4.10.4 montre en même temps que $g^* = f_!$ est pleinement fidèle (ou, ce qui revient au même, que $g_* = f^*$ est un foncteur de passage à une catégorie de fractions, ou enfin que $g^! = f_*$ est pleinement fidèle). Les gros faisceaux sur X qui appartiennent à l'image essentielle du foncteur $g^* = f_! = \mathrm{Prol}$ méritent le nom de gros *faisceaux étales* sur X, puisqu'ils forment une catégorie équivalente à celle des faisceaux ordinaires sur X, ou encore à celle des espaces étalés sur X. On voit d'ailleurs facilement que si X' est un espace topologique au-dessus **362**
de X, alors le gros faisceau sur X qu'il représente est étale au sens précédent si et seulement si X' et un espace étalé sur X.

b) On peut encore exprimer la pleine fidélité de f_* en écrivant que la morphisme d'adjonction $f^* f_* \to \mathrm{id}_{\mathrm{Top}(X)}$ est un isomorphisme, i.e. que $g_* f_* \simeq \mathrm{id}$, i.e. que $gf \simeq \mathrm{id}$. Ainsi g fait de $\mathrm{TOP}(X)$ un *topos sur* $\mathrm{Top}(X)$, admettant une « section » f sur $\mathrm{Top}(X)$.

c) Le fait que le foncteur $g^* = f_!$ soit pleinement fidèle, exact et qu'il commute aux $\mathscr{V}$-limites inductives justifie partiellement le point de vue fort commode (dû à J. Giraud) suivant lequel il est inoffensif, dans pratiquement toutes les questions de théorie des faisceaux sur X, de remplacer les faisceaux habituels ou « petits » faisceaux par les

« gros » faisceaux associés. Il en est en particulier ainsi des questions cohomologiques, puisque g_* étant exact, les foncteurs $R^i g_*$ (V 5) sont nuls pour $i > 0$, donc (V 5.4) que pour tout *gros* faisceau $\mathscr{F}$ sur X, on a des isomorphismes canoniques

$$H^i(\mathrm{TOP}(X), \mathscr{F}) \simeq H^i(\mathrm{Top}(X), \mathscr{F}_X) = H^i(X, F).$$

Appliquant ceci à un faisceau de la forme $\mathrm{Prol}(F)$, où F est un petit faisceau sur X, on en conclut (puisque $\mathrm{Prol}(F)_X \simeq F$ canoniquement) un isomorphisme canonique

$$H^i(X, F) = H^i(\mathrm{TOP}(X), \mathrm{Prol}(F)).$$

Ainsi, *les invariants cohomologiques de X, calculés via le petit ou le gros topos de X, sont essentiellement identiques.* Le même résultat est d'ailleurs valable en cohomologie non commutative.

363 ***Exercice 4.10.6.*** — Soient S un $\mathscr{U}$-site dont la topologie est moins fine que la topologie canonique, $\underline{M}$ une partie de $Fl\ S$ satisfaisant les conditions suivantes :

a) Les morphismes de $\mathscr{M}$ sont quarrables (I 10.7), et $\underline{M}$ est stable par changement de base.
b) $\underline{M}$ contient les flèches identiques et est stable par composition.
c) Une flèche $u : X \to Y$ telle qu'il existe une famille couvrante $Y_i \to Y$, avec les $X \times_Y Y_i \to Y_i$ dans $\underline{M}$, est elle-même élément de $\underline{M}$.
d) Pour tout $X \in \mathrm{ob}\, S$, toute famille couvrante de X est raffinée par une famille couvrante $(f_i : X_i \to X)$, avec les $f_i \in \underline{M}$.

Pour tout $X \in \mathrm{ob}\, S$, considérons le site $S(X)$ (« petit site de X ») dont la catégorie sous-jacente est la sous-catégorie pleine de $S_{/X}$ formée des objets dont le morphisme structural est dans $\underline{M}$, munie de la topologie induite (III 3.1) par celle de S.

1°) Pour toute flèche $u : X \to Y$ de S, montrer que le changement de base par u de $S(Y)$ dans $S(X)$ est un foncteur continu, d'où un foncteur commutant aux limites inductives (III 1.2 iv))

$$S(u)^x : S(Y)^\sim \longrightarrow S(X)^\sim.$$

2°) Définir une équivalence entre le topos $S^\sim$ et la catégorie des systèmes

$$(F_X) \quad (X \in \mathrm{ob}\, S) \quad , \quad (\varphi_u) \quad (u \in Fl S)$$

364 formés d'objets $F_X \in \mathrm{ob}\, S(X)^\sim$, et pour toute flèche $u : X \to Y$ dans S, d'un morphismes $\varphi_u : S(u)^x(F_Y) \to F_X$, ces systèmes étant soumis à une condition de transitivité pour un composé $v \circ u$ de flèches de S, et à la condition que $u \in \underline{M}$ implique que φ_u soit un isomorphisme.

3°) Définir des foncteurs « restrictions » et « prolongement »

$$\mathrm{Res}_X : (S_{/X})^\sim \longrightarrow S(X)^\sim, \mathrm{Prol}_X : S(X)^\sim \longrightarrow (S_{/X})^\sim$$

Montrer que Res_X commute aux petites limites inductives et projectives et que Prol_X est *pleinement fidèle*, son image essentielle étant formée des faisceaux F tels que φ_u soit un isomorphisme pour toute flèche u de $S_{/X}$.

4°) Définir un morphisme d'adjonction faisant de Res_X l'adjoint à droite de Prol_X. En conclure qu'il existe un morphisme de topos

$$f : S(X)^\sim \to (S_{/X})^\sim$$

faisant de $S(X)^\sim$ un sous-topos de $(S_{/X})^\sim$ et tel que

$$f_! = \mathrm{Prol}_X$$
$$f^x = \mathrm{Res}_X\,.$$

Montrer que Prol_X transforme faisceaux abéliens en faisceaux abéliens.

5°) Montrer que si $S(X)$ admet des produits fibrés, Prol_X est exact. En déduire qu'il existe alors un morphisme de topos $g : (S_{/X})^\sim \to S(X)^\sim$ qui soit une rétraction à gauche de f, i.e. tel que

$$g^x = \mathrm{Prol}_X$$
$$g_x = \mathrm{Res}_X\,.$$

(Pour un exemple où $S(X)$ n'admet pas de produits fibrés, prendre pour S la catégorie 365
des schémas munie de la topologie étale, pour M les morphismes lisses, pour X un schéma noethérien de dimension > 0).

6°) Montrer que pour tout faisceau abélien F de $(S_{/X})^\sim$ on a un isomorphisme

$$H^q(X, F) \simeq H^q(X, \mathrm{Res}_X F) \qquad \forall q.$$

Montrer, en utilisant par exemple les hyperrecouvrements, que pour tout faisceau abélien G de $S(X)^\sim$ on a un isomorphisme

$$H^q(X, G) \simeq H^q(X, \mathrm{Prol}_X G) \qquad \forall q.$$

7°) Acheter une médaille en chocolat pour le rédacteur.

5. Topos induit

5.1. — Soient E un topos, X un objet de E. Alors la catégorie $E_{/X}$ des objets de E au-dessous de X est un topos, comme il résulte par exemple immédiatement du critère de Giraud 1.2 ii). On peut aussi, grâce à 1.2.1 réaliser E comme une catégorie de faisceaux $C^\sim$, où C est une sous-catégorie génératrice de E qu'on peut choisir telle que $X \in \mathrm{ob}\, C$; alors on sait que 366
$E_{/X} = C^\sim_{/X}$ est équivalente à $(C_{/X})^\sim$ (III 5.4), donc c'est un topos.

On appelle le topos $E_{/X}$ le *topos induit* sur l'objet X de E.

5.2. — On va définir un morphisme de topos canonique

(5.2.1) $$j_X : E_{/X} \longrightarrow E,$$

qui est appelé *morphisme d'inclusion* du topos induit $E_{/X}$ dans le topos ambiant E, ou mieux (cf. 5.7), *morphisme de localisation de E en X*. Ce morphisme correspond à une suite de trois foncteurs adjoints (cf. 3.1.3)

(5.2.2) $$j_{X!} \quad , \quad j_X^* \quad , \quad j_{X*},$$

qui peuvent s'expliciter de la façon suivante :

a) Le foncteur

$$j_{X!} : E_{/X} \longrightarrow E$$

est le foncteur « *oubli de la flèche structurale* » de $E_{/X}$ dans E.

b) Le foncteur

$$j_X^* : E \longrightarrow E_{/X}$$

est défini par

$$j_X^*(Z) = (X \times Z, \mathrm{pr}_1),$$

où $\mathrm{pr}_1 : X \times Z \to X$ est la première projection. On peut aussi l'interpréter comme le *foncteur changement de base* relativement au morphisme

$$X \longrightarrow e_E,$$

où e_E est l'objet final de E. Il est trivial, par définition du foncteur changement de base, que j_X^* est bien adjoint à droite de $j_{X!}$. Il commute en particulier aux limites pro-
367 jectives. Il commute également aux limites inductives, en vertu des propriétés d'exactitude spéciales des topos (II 4).

c) De ce dernier fait résulte (1.6) que j_X^* admet un adjoint à droite

$$j_{X^*} : E_{/X} \longrightarrow E.$$

Pour un objet X' au-dessus de X, l'objet $j_{X^*}(X')$ est aussi parfois noté par l'un des symboles $\prod_{X/e_E}(X'/X)$, ou $\mathbf{Hom}_{X/e_E}(X, X')$, ou $\mathrm{Res}_{X/e_E}(X'/X)$ (« restriction de Weil »), dont l'un ou l'autre est sans doute déjà familier au savant lecteur de notre modeste ouvrage.

5.3. — On fera attention que le foncteur $j_{X!}$ commute aux produits fibrés, et transforme monomorphismes en monomorphismes, mais il n'est pas en général exact à gauche pour autant. Il ne l'est que si X est un objet final de $\mathscr{E}$ (puisque $X = j_{X!}(X, \mathrm{id}_X)$, et (X, id_X) est un objet final de $E_{/X}$), c'est-à-dire si et seulement si j_X est en fait une équivalence de topos (donc si tous les foncteurs (5.2.2) sont des équivalences). [5]

De même, le foncteur j_{X^*} n'est pas en général exact à droite, et ne transforme pas nécessairement épimorphismes en épimorphismes.

On conclut de ces observations que la direction du morphisme de topos reliant $E_{/X}$ à E, pour un objet X du topos E, est déterminée sans ambiguïté possible.

5.4. — Le foncteur j_X^* est souvent appelé *foncteur de localisation* ou *foncteur restriction*. Cette dernière terminologie se justifie en identifiant les objets de E resp. sur $E_{/X}$ aux faisceaux sur E resp. sur $E_{/X}$ (1.2 iii)), et en notant qu'avec cette identification, la formule d'adjonction
368 entre $j_{X!}$ (foncteur oubli) et j_X^* s'interprète en disant que $j_X^*(F)$ *est le faisceau restriction à* $E_{/X}$ *du faisceau* F *sur* E (en prenant « restriction » au sens généralisé : composé avec le foncteur « d'inclusion » $j_{X!} : E_{/X} \to E$). Conformément à des notations familières en d'autres contextes, on écrira aussi souvent, indifféremment :

(5.4.1) $$j_X^*(F) = F|X = F_X = \text{ restriction de } F \text{ à } X.$$

De même, lorsque E est de la forme $C^\sim$, où C est un (petit) site, et que X est de la forme $\epsilon(S)$ avec $S \in \mathrm{ob}\, C$, de sorte qu'on a une équivalence de catégories rappelée dans 5.1

$$E_{/X} = C^\sim_{/\epsilon(S)} \xrightarrow{\approx} (C_{/S})^\sim$$

5. Pour une propriété de commutation de $j_{X!}$ au changement de topos, cf. XVII 5.1.2.

($C_{/S}$ étant munie de la topologie induite par celle de C), le foncteur j_X^* s'identifie simplement au foncteur « restriction » d'un faisceau variable F sur C à la catégorie $C_{/S}$.

Ces réflexions permettent de prévoir d'ailleurs le rôle important que joueront les topos induits et les morphismes de localisation (5.2.1) dans toutes les questions où on est amené à raisonner par « localisation sur E » (cf. 8), c'est-à-dire pratiquement dans toutes les questions faisant intervenir des sites ou des topos.

5.5. — Soit

$$f : X \longrightarrow Y$$

une flèche de E, qui permet donc d'interpréter X (ou plus correctement, (X, f)) comme un objet de $E_{/Y}$. Il est évident qu'on a un isomorphisme canonique

(5.5.1) $$(E_{/Y})_{/X} \xrightarrow{\sim} E_{/X}$$

(*transitivité des topos induits*). Appliquant la construction de 5.1 à $E_{/Y}$ au lieu de E, on trouve donc un morphisme de topos canonique

(5.5.2) $$\operatorname{loc}(f) \text{ ou } f : E_{/X} \longrightarrow E_{/Y},$$

appelé également *morphisme de localisation (associé à f)*. Lorsque Y est l'objet final de E, 369
on retrouve essentiellement (5.2.1). Le morphisme de localisation pour f est associé à une suite de trois foncteurs adjoints

(5.5.3) $$f_! \quad , \quad f^* \quad , \quad f_*,$$

qui peuvent s'interpréter respectivement comme foncteur d'oubli, comme foncteur restriction, et comme un foncteur noté au choix (X' étant l'argument) $\prod_{X/Y}(X'/X)$, $\mathbf{Hom}_{X/Y}(X, X')$ ou $\operatorname{Res}_{X/Y}(X'/X)$.

5.6. — La transitivité des foncteurs oubli implique que pour deux morphismes composables

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

de E, on a un isomorphisme canonique de morphismes de topos

$$\operatorname{loc}(gf) \simeq \operatorname{loc}(g)\operatorname{loc}(f) : E_{/X} \longrightarrow E_{/Y} \longrightarrow E_{/Z}.$$

De plus, pour trois morphismes composables, on a la relation de compatibilité habituelle pour les isomorphismes de transitivité précédents. Ceci permet donc de considérer, moyennant l'abus de langage habituel, que

$$X \longmapsto E_{/X}$$

est un foncteur covariant de E dans la catégorie ($\mathscr{V}$-$\mathscr{U}$-top) (3.3.1). Plus précisément, on trouve un 2-foncteur (non strict en général) de E dans la 2-catégorie ($\mathscr{V}$-$\mathscr{U}$-top).

Avant de continuer les généralités sur les topos induits (5.10), donnons quelques exemples instructifs.

5.7. — Soit X un espace topologique, d'où un topos $\mathrm{Top}(X)$ (2.1). Soit X' un objet de 370
$\mathrm{Top}(X)$, qu'il sera commode d'interpréter comme un espace étalé sur X, $p : X' \to X$. La catégorie $\mathrm{Top}(X)_{/X'}$ s'identifie alors à la catégorie des espaces étalés X'' sur X, munis d'un X-morphisme $X'' \to X'$. On sait qu'un tel morphisme fait de X'' un espace étalé sur X', et on trouve de cette façon une équivalence de topos canonique

$$\mathrm{Top}(X)_{/X'} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Top}(X').$$

Le morphisme de localisation s'identifie donc à un morphisme de topos $\mathrm{Top}(X') \to \mathrm{Top}(X)$, et on constate aussitôt que ce dernier n'est autre que le morphisme

$$\mathrm{Top}(p) : \mathrm{Top}(X') \longrightarrow \mathrm{Top}(X)$$

associé à l'application continue structurale $p : X' \to X$. Intuitivement, le morphisme de localisation n'est donc autre que la traduction, en langage de topos, du morphisme d'étalement $p : X' \to X$. Ceci explique à la fois le bien-fondé de la terminologie « morphisme de localisation », et incite à la prudence dans l'emploi du terme de « morphisme d'inclusion », celui-ci semblant surtout approprié dans le cas où p est une immersion ouverte. Il sera prudent par conséquent de réserver dans 5.1 le terme de « morphisme d'inclusion » au cas où le morphisme $X \to e_E$ est un monomorphisme, i.e. où X s'identifie à un sous-objet de l'objet final de E.

5.8. — Soient E un topos, G un Groupe de E, H un sous-groupe de G,

$$X = G/H$$

l'espace homogène quotient, qu'on regarde comme un objet de E avec groupe d'opérateurs
371 gauche G, i.e. comme un objet du topos classifiant B_G (2.4). Nous allons déterminer le topos induit

$$(B_G)_{/X} \quad (X = G/H),$$

en définissant une équivalence de topos

$$c : B_H \xrightarrow{\approx} (B_G)_{/X}, \tag{5.8.1}$$

telle que l'on ait commutativité à isomorphisme canonique près dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} B_H \arrow[r, "c"] \arrow[rr, bend right, "B_i"'] & (B_G)_{/X} \arrow[r, "j_X"] & B_G \end{tikzcd} \tag{5.8.2}$$

où j_X est le morphisme de localisation dans B_G, et où

$$B_i : B_H \longrightarrow B_G$$

est le morphisme déduit de l'inclusion $i : H \to G$ (4.5).

Pour définir (5.8.1), nous allons simplement indiquer la description des foncteurs image inverse c^* et image directe c_*, laissant au lecteur le soin de vérifier que ce sont bien là des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre, donnant lieu au diagramme commutatif (5.8.2) de morphismes de topos. Soit e le sous-objet de E sous-jacent à X, image de la section de X (sur un objet final e_E choisi de E) déduite de la section unité de G. Si X' est un objet de B_G au-dessus de X, alors on désigne par $c^*(X')$ l'image inverse de e dans X',

$$c^*(X') = X' \times_X e,$$

qui est stable par l'opération gauche de H sur X', restriction de l'opération donnée de G sur X'. Cela définit bien un foncteur

$$c^* : (B_G)_{/X} \longrightarrow B_H.$$

D'autre part, si X' est un objet de B_H, alors le morphisme de X' dans l'objet final e_H de B_H 372
(i.e. l'objet final e_E de E avec opération triviale de H) donne, par application du foncteur $i_!$ (4.5) un morphisme de B_G

$$i_!(X') \longrightarrow i_!(e_H) \simeq X,$$

qui permet d'interpréter $i_!(X')$ comme un objet de $(B_G)_{/X}$, d'où le foncteur cherché

$$c_* : X' \longmapsto (i_!(X') \longrightarrow X) : B_H \longrightarrow B_G.$$

5.8.3. — On voit donc, grâce à (5.8.2) que si G est un Groupe d'un topos, H un sous-Groupe, *le foncteur « restriction des opérateurs de G à H » peut s'interpréter comme un foncteur de localisation.* En particulier, prenant pour H le sous-groupe unité, on voit que le foncteur « *oubli des opérations de G* » s'interprète comme un foncteur de localisation. On en conclut, plus généralement, que si (X, G) est un objet de E avec opération de G (i.e. un objet du topos classifiant B_G), alors le foncteur « oubli des opérations de G »,

$$E' = (B_G)_{/(X,G)} \longrightarrow E_{/X}$$

peut s'interpréter comme un foncteur de localisation, relativement à un objet $E_{G,(X,G)}$ de E' convenable couvrant l'objet final. Il suffit de prendre $E_{G,(X,G)} = E_G \times (X, G)$, d'où le diagramme cartésien (où $E_G = G_S = G$ avec opération de G par translation à gauche)

$$\begin{tikzcd} E_G \arrow[d] & E_{G,(X,G)} = Z \arrow[l] \arrow[d] \\ e_G & (X, G) \arrow[l] \end{tikzcd} \quad , \tag{5.8.3.1}$$

et de noter que par transitivité des topos induits, le topos induit $E' = ((B_G)_{X/G})_{/Z}$ est 373
équivalent au topos $((B_G)_{/E_G})_{/Z}$; comme $(B_G)_{/E_G}$ est équivalent à E par le foncteur c^* de (5.8.1) (avec $H = e$), il suffit de vérifier que cette équivalence transforme Z en l'objet X de E (ce qui est trivial) pour déduire l'équivalence cherchée de catégories

$$E'_{/Z} \xrightarrow{\approx} E_{/X}.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que le composé de celle-ci avec le foncteur de localisation

$$E' = (B_G)_{/(X,G)} \longrightarrow E'_{/Z}$$

est le foncteur « oubli des opérations de G ». On voit ainsi que le diagramme cartésien ci-dessus donne, par passage aux topos induits, un diagramme, commutatif à isomorphisme canonique près (5.6), de morphismes de topos :

(5.8.3.2)
$$\begin{tikzcd}
(B_G)_{/E_G} \approx E \arrow[d, "j"'] & (B_G)_{/Z} \approx E'_{/Z} \approx E_{/X} \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "j'"] \\
B_G & (B_G)_{/(X,G)} = E' \arrow[l, "f"']
\end{tikzcd} ,$$

où les foncteurs images inverses associés aux flèches verticales j, j' sont les foncteurs « oubli des opérations de G », et où le foncteur image inverse i^* s'identifie au foncteur de
374 localisation $E \to E_{/X}$. Ce diagramme est d'ailleurs « 2-cartésien » au sens 5.11 ci-dessous.

5.8.4. — On laisse au lecteur le soin d'étendre les réflexions qui précèdent au cas d'un pro-groupe $\mathscr{G} = (G_i)$, dans le cas particulier où H est défini comme « noyau » de $\mathscr{G} \to G_{i_\circ}$. (Dans le cas des groupes pro-finis, cela signifie qu'on se limite aux sous-groupes H de G *ouverts*, i.e. fermés et d'*indice fini*.)

Exercice 5.9. — Soient E un topos, G un Groupe de E, B_G le topos classifiant de G (2.4),

$$\pi : B_G \longrightarrow E$$

le morphisme de topos déduit de l'homomorphisme de G dans le Groupe unité e de E (compte tenu que $B_e \approx E$).

a) Soit

$$E_G = G_s$$

l'objet de B_G dont le E-objet sous-jacent est G, les opérations de G étant définies par translation à gauche. Considérons $\pi^*(G)$ comme un Groupe de B_G (c'est le Groupe G de E avec les opérations triviales de G dessus). Montrer que le morphisme de E

$$G_s \times G \longrightarrow G_s$$

défini par les translations droites de G sur G_s, est compatible avec les opérations de G sur G_s et sur $G = \pi^*(G)$, et définit un morphisme de B_G

$$E_G \times \pi^*(G) \longrightarrow E_G.$$

Montrer que ce morphisme fait de E_G un objet de B_G avec une opération à droite du
375 B_G-Groupe $\pi^*(G)$, et que cette dernière fait de E_G un *torseur* sous $\pi^*(G)$ (i.e. l'objet final de B_G peut se recouvrir par des objets X_i tels que pour tout i, la restriction de E_G à X_i soit isomorphe au fibré à opérateurs trivial $(\pi^*(G)_{X_i})_d$).

b) Soit

$$q : E' \longrightarrow E$$

un topos sur E. Pour tout topos B sur E, définir la catégorie $\mathbf{Homtop}_E(E', B)$ des morphismes de topos de E' dans B compatibles avec les morphismes structuraux $E' \to E$ et $B \to E$ à isomorphisme donné près. Prenant $B = B_G$, définir par la formule $f \mapsto f^*(E_G)$ une équivalence de catégories

$$\mathbf{Homtop}_E(E', B_G) \longrightarrow \mathbf{Tors}(E, q^*(G)),$$

où le deuxième membre désigne la catégorie des $q^*(G)$-torseurs (à droite) sur E.

c) Soit H un sous-Groupe de G, de sorte que $\pi^*(H)$ est un sous-Groupe de $p^*(G)$, et opère donc sur E_G par restriction du Groupe d'opérateurs, d'où un objet quotient

$$X = E_G/\pi^*(H),$$

qui n'est autre que l'objet G/H muni de l'opération à gauche habituelle de G. Soit e_G l'objet final de B_G (i.e. l'objet final e_E de E avec opération triviale - il n'y a pas le choix - de G), et considérons dans B_G le diagramme de morphismes

$$\begin{tikzcd} E_G \arrow[dd] \arrow[dr] & \\ & X = E_G/\pi^*(H) \arrow[dl] \\ e_G & \end{tikzcd}$$

d'où, en passant aux topos induits par B_G sur ces objets, un diagramme de morphismes 376
de topos, commutatif à isomorphisme canonique près (5.6). Montrer que ce diagramme est équivalent au diagramme

$$\begin{tikzcd} E = B_e \arrow[dd] \arrow[dr] & \\ & B_H \arrow[dl] \\ B_G & \end{tikzcd} ,$$

dont les trois flèches sont les flèches associées par 4.5 aux morphismes de Groupes $e \to H \to G$ de E. (Ainsi, *le topos classifiant B_H s'interprète intuitivement comme un espace homogène au-dessus de B_G, de groupe $\pi^*(G)$, associé au torseur* (= fibré principal homogène) *universel E_G sur B_G*).

d) Reprendre l'exemple 5.7 dans le cas où X' est un *revêtement* étale (localement trivial, cf. 2.7.4) de X, en l'interprétant en termes des considérations du présent exercice.

5.10. Images inverses de topos induits. — Soient

$$f : E' \to E$$

un morphisme de $\mathcal{U}$-topos, X un objet de E, et $X' = f^*(X)$ son image inverse dans E. On va alors définir un diagramme de morphismes de topos

(5.10.1)
$$\begin{tikzcd} E_{/X} \arrow[d, "j_X"'] & E'_{/X'} \arrow[l, "f_{/X}"'] \arrow[d, "j_{X'}"] \\ E & E' \arrow[l, "f"] \end{tikzcd} ,$$

377 où j_X et $j_{X'}$ sont les morphismes de localisation (5.2), et où $f_{/X}$ est défini ci-dessous, diagramme qui sera commutatif à isomorphisme canonique près. Nous définirons ici $f_{/X}$ à l'aide du foncteur image inverse

$$(f_{/X})^* : E_{/X} \longrightarrow E'_{/X'}, \tag{5.10.2}$$

pour lequel nous prendrons simplement le foncteur « induit » par f^*, en un sens évident. Comme les foncteurs d'inclusion $j_{X!} : E_{/X} \to E$ et $j_{X'!} : E_{/X} \to E$ commutent aux $\mathscr{U}$-limites inductives et aux produits fibrés, et qu'ils sont conservatifs, il s'ensuit aussitôt que le foncteur $(f_{/X})^*$ commute aux $\mathscr{U}$-limites inductives et aux produits fibrés tout comme le foncteur f^* qui l'induit ; comme de plus $(f_{/X})^*$ transforme évidemment objet final X en l'objet final X', il est exact à gauche, donc est associé à un morphisme de topos

$$f_{/X} : E'_{/X'} \longrightarrow E_{/X}, \tag{5.10.3}$$

défini à isomorphisme unique près (3.1.1). D'autre part, le diagramme déduit de (5.10.1) par passage aux foncteurs images inverses est commutatif (à isomorphisme canonique près) par construction et grâce au fait que f^* commute aux produits $X \times Y$, donc (5.10.1) lui-même est commutatif, à un unique isomorphisme près induisant l'isomorphisme canonique sur les foncteurs images réciproques des deux composés $f \circ j_{X'}$ et $j_X \circ f_{/X}$ (3.2.1).

5.10.4. — Lorsque $f : E' \to E$ est associé à une application continue $Y' \to Y$ d'espaces topologiques (4.1), de sorte que X s'identifie à un espace étalé au-dessus de Y, et X' au produit fibré $X \times_Y Y'$, alors, identifiant les topos induits $\mathrm{Top}(Y)_{/X}$ et $\mathrm{Top}(Y')_{/X'}$ à $\mathrm{Top}(X)$
378 et $\mathrm{Top}(X')$ respectivement (5.7), on constate que le morphisme $f_{/X}$ qu'on vient de construire est (à isomorphisme unique près) le morphisme $\mathrm{Top}(X') \to \mathrm{Top}(Y')$ déduit de l'application continue canonique $X' \to Y'$. On peut donc dire, à la lumière de cet exemple, que le topos $E'_{/X'}$ joue le rôle d'un produit fibré de $E_{/X}$ et de E' sur E. Cette intuition se précise à l'aide du résultat suivant :

Proposition 5.11. — *Les notations étant celles de 5.10, le diagramme (5.10.1), muni de l'isomorphisme de compatibilité $\alpha : f \circ j_{X'} \to j_X \circ f_{/X}$, est « 2-cartésien » ; de façon précise, pour tout $\mathscr{U}$-topos F, si on associe à tout morphisme de topos $g : F \to E'_{/X'}$ le triplet $(f_{/X} \circ g, j_{X'} \circ g, \alpha * g) = (g_1, g_2, \beta)$, où $g_1 : F \to E_{/X}$ et $g_2 : F \to E'$ sont des morphismes de topos, et $\beta : j_X \circ g_1 \to f \circ g_2$ est un isomorphisme de morphismes de topos de F dans E, on trouve une équivalence de catégories de $\mathbf{Homtop}(F, E'_{/X})$ avec la catégorie $\mathbf{Homtop}(F, E_{/X}) \times^2_{\mathbf{Homtop}(F,E)} \mathbf{Homtop}(F, E')$ de tous les triples (g_1, g_2, β) comme ci-dessus.*

(NB. On a mis un 2 au-dessus du signe du produit cartésien pour rappeler qu'il ne s'agit pas d'un produit fibré ordinaire de catégories, mais d'un « 2-produit fibré », dans le sens explicité dans l'énoncé.)

Pour prouver 5.11, on explicite les morphismes de topos à l'aide des foncteurs image inverse associés. Nous aurons besoin pour cela de résultats auxiliaires, donnés dans 5.11.1 à 5.12 plus bas.

5.11.1. — Considérons de façon générale la situation où on se donne deux catégories E, E', un objet X de E qu'on suppose quarrable i.e. tel que le foncteur

$$j : A \longmapsto A \times X : E \longrightarrow E_{/X}$$

soit défini, enfin un foncteur exact à gauche 379

$$(*) \qquad \varphi : E_{/X} \longrightarrow E'.$$

Comme $E_{/X}$ a un objet final, savoir $(X, \mathrm{id}_X) = X$, il en est donc de même de E', qui admet l'objet final

$$e' \simeq \varphi(X).$$

Supposant choisi l'objet final e' de E', on va à tout φ comme ci-dessus associer un couple

$$(**) \qquad (\Psi, u), \text{ avec } \Psi = \varphi \circ j : E \to E', \text{ et } u \in \mathrm{Hom}(e', \Psi(X)).$$

Pour définir u, on note que

$$\Psi(X) = X \times X$$

a une section canonique δ_X sur l'objet final X de $E_{/X}$, savoir la section diagonale, et on définit

$$u = \varphi(\delta_X) : \varphi(X) = e' \longrightarrow \varphi(X \times X) = \Psi(X).$$

Je dis que la connaissance du couple $(**)$ permet de reconstituer le foncteur φ de $(*)$ à isomorphisme unique près. Pour ceci, pour tout objet

$$p : X' \longrightarrow X$$

de $E_{/X}$, considérons le diagramme cartésien suivant de $E_{/X}$:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & j(X') = X' \times X \arrow[d, "j(p)"] \\ X \arrow[r, "\delta_X"] & j(X) = X \times X \end{tikzcd} ,$$

où la première flèche horizontale est le morphisme graphe $\Gamma_p = (\mathrm{id}_X, p)$. Appliquant le foncteur exact à gauche φ à ce diagramme, et utilisant la définition de Ψ comme $\varphi \circ j$, on trouve un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \varphi(X', p) \arrow[r] \arrow[d] & \Psi(X') \arrow[d, "\Psi(p)"] \\ e' \arrow[r] & \Psi(X) \end{tikzcd} ,$$

en d'autres termes on trouve un isomorphisme canonique 380

$$(5.11.1.1) \qquad \varphi(X', p) \simeq \Psi(X') \times_{\Psi(X)} e'$$

On constate aussitôt qu'il est fonctoriel en l'objet (X', p) de $E_{/X}$, ce qui explicite comment on reconstitue à isomorphisme près le foncteur $\varphi : E_{/X} \to E'$ à l'aide du couple (Ψ, u) de $(**)$. Notons d'ailleurs que le foncteur Ψ est exact à gauche ; plus généralement, Ψ commute à tout type de limites projectives auquel commute φ, car j commute aux limites projectives.

Inversement, supposant maintenant que dans E et E' les limites projectives finies sont représentables, et partant d'un couple

$$(\Psi, u), \Psi : E \longrightarrow E', u \in \mathrm{Hom}(e', \Psi(X)),$$

où le foncteur $\varPsi$ est exact à gauche, on définit par la formule (5.11.1.1) un foncteur $\varphi : E_{/X} \to E'$. On vérifie aussitôt que ce foncteur est exact à gauche, plus généralement, qu'il commute à tout type de limites projectives représentables dans E auquel commute $\varPsi$. Cela résulte aussitôt du diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim_I^{E} X'_i \arrow[d] & \varprojlim_I^{E_{/X}} X'_i \arrow[l] \arrow[d] \\
\varprojlim_I^{E} X & X \arrow[l, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

381 reliant les limites projectives calculées dans E ou dans $E_{/X}$ (où δ désigne le morphisme diagonal dans la limites projective du foncteur constant de valeur X), en lui appliquant le foncteur $\varPsi$, d'où un diagramme cartésien dans E', et en composant ce dernier avec le carré cartésien déduit de $\varPsi(X) \leftarrow e'$, faisant apparaître un carré cartésien composé qui exprime la compatibilité de φ à la limite projective envisagée.

On reconstitue à isomorphisme près le couple $(\varPsi, u)$ à l'aide de φ, en notant que l'on a un isomorphisme canonique

$$\varPsi(X') = \varphi(j(X')), \tag{5.11.1.2}$$

déduit de (5.11.1.1) en y remplaçant (X', p) par $j(X') = (X' \times X, \mathrm{pr}_2)$, et notant que $\varPsi(X' \times X) \simeq \varPsi(X') \times \varPsi(X)$. L'isomorphisme précédent est manifestement fonctoriel en X', i.e. il donne un isomorphisme

$$\varPsi \simeq \varphi \circ j,$$

et on vérifie de même que moyennant cet isomorphisme, $u : e' \to \varPsi(X)$ s'identifie à $\varphi(\delta_X)$. On a ainsi obtenu l'essentiel du

Lemme 5.11.2. — *Soient E et E' deux catégories où les limites projectives finies sont représentables, X un objet de E, $\mathbf{Sex}(E, E')$ la catégorie des foncteurs exacts à gauche $\varPsi$ de E dans E', et $\mathbf{Sex}(E_{/X}, E')$ la catégorie analogue des foncteurs exacts à gauche φ de $E_{/X}$ dans E'. On a alors une équivalence entre la catégorie $\mathbf{Sex}(E_{/X}, E')$ et la catégorie $\mathbf{Sex}(E, E')_{/\varGamma}$ des couples $(\varPsi, u)$, avec $\varPsi \in \operatorname{ob} \mathbf{Sex}(E, E')$ et $u : e' \to \varPsi(X)$ (où e' est l'objet final de E'), dont la définition est explicitée dans 5.11.1, ainsi que celle d'un foncteur quasi-inverse. Si φ et $(\varPsi, u)$*
382 *se correspondent, alors φ commute à un type déterminé de limites projectives si et seulement si il en est ainsi de $\varPsi$. Si dans E et E' les foncteurs changement de base commutent à un type déterminé de limites inductives, alors pour que φ commute aux limites inductives dudit type, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de $\varPsi$.*

Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter la structure de catégorie $\mathbf{Sex}(E, E')_{/\varGamma}$ correspondant aux couples $(\varPsi, u)$. Définissant le foncteur $\varGamma : \mathbf{Sex}(E, E') \to (\mathrm{Ens})$ par $\varGamma(\varPsi) = \mathrm{Hom}(e', \varPsi(X))$, on peut interpréter u dans le couple (ψ, u) comme un élément de $\varGamma(\varPsi)$ i.e. un homomorphisme $\varPsi \to \varGamma$ dans la catégorie des préfaisceaux sur $\mathbf{Sex}(E, E')^{\circ}$, ce qui justifie la notation $_{/\varGamma}$ utilisée dans l'énoncé de 5.11.1. Il reste, pour prouver 5.11.2, à expliciter dans 5.11.1 le caractère fonctoriel des constructions envisagées pour φ resp. (ψ, u) variable, ce qui est essentiellement trivial et laissé au lecteur, et enfin à vérifier l'assertion concernant les propriétés de commutation aux limites inductives, ce qui est également trivial à l'aide des formules explicites (5.11.1.1) et (5.11.1.2) reliant ces foncteurs.

On trouve en particulier, lorsque E et E' sont des $\mathscr{U}$-topos, et en interprétant les morphismes de topos à l'aide des foncteurs images inverses associés :

Proposition 5.12. — *Soient E et E' deux $\mathscr{U}$-topos, X un objet de E, et considérons sur* $\mathbf{Homtop}(E', E)$ *le foncteur contravariant*

$$\gamma : f \longmapsto \Gamma(E', f^*(X)) = \mathrm{Hom}(e', f^*(X)) : \mathbf{Homtop}(E', E)^\circ \longrightarrow (\mathrm{Ens}).$$

On a alors une équivalence de catégories

$$\mathbf{Homtop}(E', E_{/X}) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Homtop}(E', E)_{/\gamma}, \tag{5.12.1}$$

où le deuxième membre est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Homtop}(E', E)\hat{}_{/\gamma}$ *formée des couples* 383
(f, u), avec $f \in \mathrm{Homtop}(E', E)$ et $u \in \gamma(f)$ i.e. $u \in \Gamma(E', f^*(X))$. Ce foncteur s'obtient en associant à tout morphisme de topos $h : E' \to E_{/X}$ le couple (f, u) formé du composé

$$f = j_X \circ h : E' \to E_{/X} \to E,$$

et du morphisme

$$u : e' = h^*(X, \mathrm{id}_X) \longrightarrow f^*(X) = h^*(j_X^*(X)) = h^*(X \times X)$$

déduit du morphisme diagonal $\delta_X : X \to X \times X$ en lui appliquant h^*.

5.12.2. — Utilisant 5.12, la démonstration de 5.11 devient à peu près évidente, et se réduit essentiellement à ceci (qui tiendra lieu d'une démonstration « en forme » qui ne serait pas plus instructive) : se donner un morphisme de topos $g : F \to E'_{/X'}$ « revient au même » que de se donner un morphisme de topos $g_2 : F \to E'$ et une section u de $g_2^*(X')$; or $g_2^*(X') = g_2^*(f^*(X)) = (f g_2)^*(X)$, donc la donnée de u équivaut aussi à la donnée d'un relèvement du morphisme de topos $f g_2 : F \to E$ en un morphisme de topos $g_1 : F \to E_{/X}$. Cela exprime bien que la donnée d'un morphisme de topos $g : F \to E'_{/X'}$ équivaut essentiellement à la donnée d'un triple (g_1, g_2, α) comme dans 5.11.

Remarque 5.13. — Nous verrons (§ 15[6]) que pour tout diagramme

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[d] & \\ E & E_2 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

de topos, il existe un 2-produit fibré au sens de la 2-catégorie ($\mathscr{V}$-$\mathscr{U}$-Top) des $\mathscr{U}$-topos $\in \mathscr{V}$ (ne 384
dépendant pas, à équivalence près, du choix d'un univers $\mathscr{V}$ tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{V}$). Pour d'autres exemples naturels que 5.11 de « produits fibrés de topos », voir le dernier chapitre du livre de Giraud [3].

6. N.D.E. : Ce paragraphe n'existe pas. Voir cependant [16] proposition 4.47 pour un énoncé général d'existence de produits fibrés de topos (en notant que tous les morphismes géométriques entre topos de Grothendieck sont bornés).

Exercice 5.14. — a) Soient F, G deux topos au-dessus d'un topos E. Définir la catégorie $\mathbf{Homtop}_E(F, G)$ des couples (f, α), où $f : F \to G$ est un morphisme de topos et $\alpha : p \to q \circ f$ est un isomorphisme de morphismes de topos de E dans G ($p : F \to E$ et $q : G \to E$ étant les morphismes de topos structuraux). Définir des foncteurs d'accouplement $\mathbf{Homtop}_E(F, G) \times \mathbf{Homtop}_E(G, H) \to \mathbf{Homtop}_E(F, H)$, et des isomorphismes d'associativité.

b) Soient X et Y deux objets d'un topos E. Définir un foncteur naturel de la catégorie discrète définie par l'ensemble $\mathrm{Hom}(X, Y)$, dans la catégorie $\mathbf{Homtop}_E(E_{/X}, E_{/Y})$. Compatibilité avec les compositions de morphismes dans E et les accouplements envisagés dans a).

c) Prouver que le foncteur envisagé dans b) est une équivalence de catégories. En particulier, un objet X d'un topos E se reconstitue à isomorphisme unique près, quand on connaît « à E-équivalence près » le topos induit $E_{/X}$ comme topos *au-dessus de E*. [(6)]

6. Points d'un topos et foncteurs fibres

6.0. — Soit P le *$\mathscr{U}$-topos ponctuel* type (2.2)

$$P = (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens}).$$

385 Étant donné l'intuition assez différente qui s'attache d'une part au symbole P, figurant un objet géométrique dans la nature d'un point, et d'autre part à $(\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$, figurant une « grosse catégorie », qu'on interprétera comme « la catégorie des faisceaux sur P », il y a lieu suivant le contexte d'utiliser l'un ou l'autre symbole exclusivement, bien que du strict point de vue logique ils désignent un seul et même objet.

Définition 6.1. — *Soit E un $\mathscr{U}$-topos. On appelle point de E tout morphisme de topos $P \to E$ du topos ponctuel P(6.0) dans E. On appelle catégorie des points de E, et on note* $\mathbf{Points}(E)$ *ou* $\mathrm{Pt}(E)$, *la catégorie* $\mathbf{Homtop}(P, E)$ (3.2). *Si $p : P \to E$ est un point de E, associé au foncteur image inverse $p^* : E \to (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$, et si F est un objet de E, l'ensemble $p^*(F)$ est appelé fibre de E en p, et noté F_p.*

6.1.1. — Bien entendu, lorsque F est un objet en groupe (resp. anneau, resp. ...) de E, sa fibre F_p en p est un groupe (resp. un anneau, resp. ...) (3.1.2).

6.1.2. — En vertu de 3.2.1, la catégorie des points de E est équivalente, via le foncteur $p \mapsto p^*$, à la catégorie *opposée* à celle des foncteurs

$$\varphi : E \longrightarrow (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$$

qui commutent aux $\mathscr{U}$-limites inductives et qui sont exacts à gauche. Il revient donc essentiellement au même de se donner un point de E, ou un tel foncteur φ.

Définition 6.2. — *On appelle foncteur-fibre du $\mathscr{U}$-topos E tout foncteur $\varphi : E \to (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$ qui commute aux $\mathscr{U}$-limites inductives et qui est exact à gauche. On appelle catégorie des foncteurs fibres sur E, et on note* $\mathbf{Fib}(E)$, *la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{Hom}(E, (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens}))$ *formée des*
386 *foncteurs fibres sur E.*

6. Résultat dû à P. Deligne. Le cas où E est le topos ponctuel avait été traité auparavant par Mme Hakim.

6.2.3. — En vertu de 6.1.2, la catégorie **Fib**(E) des foncteurs fibres sur E est donc équivalente à l'*opposée* de la catégorie **Point**(E) des points de E, via le foncteur $p \mapsto p^*$ de cette dernière dans la première :

$$\mathbf{Point}(E) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Fib}(E)^\circ. \tag{6.2.1.1}$$

Pour qu'un foncteur

$$\varphi : E \longrightarrow (\mathcal{U}\text{-}\mathrm{Ens})$$

soit un foncteur fibre, il faut et il suffit qu'il soit le foncteur fibre $F \mapsto F_p$ associé à un point p de E (6.1). En d'autres termes, le foncteur (6.2.1.1) est surjectif. Signalons aussi qu'un foncteur φ est un foncteur fibre si et seulement si il est exact à gauche et s'il transforme familles couvrantes en familles surjectives (1.7). Cette dernière condition s'exprime aussi en disant que φ commute aux $\mathcal{U}$-sommes et transforme épimorphismes en épimorphismes.

6.3. — Soit $C \in \mathcal{U}$ un site. On appelle *point du site* C tout point du topos $C^\sim$, *catégorie des points du site* C la catégorie

$$\mathbf{Point}(C) = \mathbf{Point}(C^\sim).$$

Considérons d'autre part le foncteur

$$\varphi \longrightarrow \varphi|C = \varphi \circ \epsilon_C : \mathbf{Fib}(C^\sim) \longrightarrow \mathbf{Hom}(C, (\mathcal{U}\text{-}\mathrm{Ens})), \tag{6.3.1}$$

qui est pleinement fidèle et dont l'image essentielle est la sous-catégorie pleine **Morsite**$((\mathcal{U}\text{-}\mathrm{Ens}), C)^\circ$ (4.9.4), que nous noterons aussi **Fib**(C). Un foncteur

$$\Psi : C \longrightarrow (\mathcal{U}\text{-}\mathrm{Ens})$$

est appelé un *foncteur fibre sur le site* C s'il est dans l'image essentielle de (6.3.1), qu'on vient 387
d'expliciter. Un tel foncteur est donc *continu* (a fortiori (III 1.6), il transforme familles couvrantes en familles couvrantes, i.e. en familles surjectives), et il est exact à gauche. Lorsque dans C les limites projectives finies sont représentables, (condition vérifiée dans la quasi-totalité des cas qu'on rencontre en pratique) les propriétés précédentes *caractérisent* les foncteurs fibres sur C, qui sont alors les foncteurs $\Psi : C \to (\mathcal{U}\text{-}\mathrm{Ens})$ qui sont exacts à gauche et qui transforment familles couvrantes en familles surjectives (4.9.4).

On retiendra que le foncteur $\varphi \to \varphi|C$ est une équivalence de catégories

$$\mathbf{Fib}(C^\sim) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Fib}(C),$$

de sorte qu'*il revient au même essentiellement de se donner un foncteur fibre sur le topos* $C^\sim$ (ou encore un point de ce topos), *ou un foncteur fibre sur le site* C. Étant donné un foncteur fibre Ψ sur C, provenant donc à isomorphisme près d'un foncteur fibre φ sur $C^\sim$, on reconstitue ce dernier à l'aide de Ψ, à isomorphisme canonique près, par la formule

$$\varphi(F) \simeq \varinjlim_{C_{/F}} \Psi(X), \tag{6.3.2}$$

où $C_{/F}$ est la catégorie des objets X de C munis d'un morphisme $X \to F$ (dans $\widehat{C}$), i.e. d'un élément de $F(X)$. La formule (6.3.2) est une conséquence immédiate du fait que φ commute aux limites inductives et qu'on a un isomorphisme canonique fonctoriel en F (II 4.1.1) :

$$F \simeq \varinjlim_{C_{/F}} \epsilon_C(X).$$

388 Plus généralement, lorsque G est un préfaisceau sur C, on a un isomorphisme canonique fonctoriel en G :

$$\varphi(\underline{a}G) \simeq \varinjlim_{C_{/G}} \Psi(X), \tag{6.3.3}$$

où $\underline{a}\, G$ est le faisceau associé à G (II 4.1.1). En effet, on sait qu'on a la formule

$$\underline{a}G \simeq \varinjlim_{C_{/G}} \epsilon_C(X).$$

6.4.0. — Nous renvoyons à I 6.1 pour la notion de *famille conservative de foncteurs*

$$\varphi_i : E \longrightarrow E_i \qquad i \in I.$$

On notera que lorsque E et les E_i sont des $\mathscr{U}$-topos, et les foncteurs φ_i sont des foncteurs images inverses f_i^* associés à des morphismes de topos

$$f_i : E_i \longrightarrow E,$$

alors toutes les propriétés d'exactitude postulées dans I 6.2, I 6.3 et I 6.4 sont vérifiées, à condition dans I 6.2 (v) non respé de supposer que D est fini. Il revient alors au même que $(f_i^*)_{i\in I}$ soit conservative, ou conservative pour les *monomorphismes* (I 6.1), ou conservative pour les *épimorphismes*, ou enfin qu'elle soit *fidèle*.

389 Lorsque la famille des foncteurs f_i^* est conservative, on dira aussi parfois que *la famille des morphismes de topos* $(f_i)_{i\in I}$ *est conservative.* En particulier :

Définition 6.4.1. — *Soient E un $\mathscr{U}$-topos, $(p_i : P \to E)_{i\in I}$ une famille de points de E. On dit que cette famille de points est conservative si la famille des foncteur fibres associés $F \mapsto F_{p_i}$ de E dans* ($\mathscr{U}$-Ens) *est conservative* (6.4.0). *On dit que le topos E a suffisamment de points lorsqu'il admet une famille conservative de points (i.e. lorsque la famille de tous les points du topos est conservative).*

6.4.2. — Signalons que tous les $\mathscr{U}$-topos utilisés jusqu'à présent ont suffisamment de points. On peut cependant « en faisant exprès » construire des topos qui n'ont pas suffisamment de points (7.2.6 e) et 7.4) ; on notera qu'un tel topos est nécessairement non « vide » au sens géométrique de 2.2. Un topos admettant suffisamment de points admet une famille conservative de points indexée par un $I \in \mathscr{U}$ (6.5). Noter cependant à ce sujet que si E est un $\mathscr{U}$-topos, l'ensemble des classes d'isomorphie de points de E n'est pas nécessairement $\mathscr{U}$-petit (7.3). Il l'est cependant dans de nombreux cas rencontrés en pratique. Enfin, pour un intéressant théorème d'existence (dû à P. Deligne) de suffisamment de points, couvrant tous les cas rencontrés en géométrie algébrique, voir VI 9.

6.4.3. — Lorsque $(p_i)_{i\in I}$ est une famille conservative de points du topos E, on peut appliquer les remarques de I 6.2, qui impliquent notamment que deux flèches $u, v : F \rightrightarrows G$ de E sont égales si et seulement si pour tout $i \in I$, les flèches induites sur les fibres $u_{p_i}, v_{p_i} : F_{p_i} \rightrightarrows G_{p_i}$
390 sont égales ; qu'une flèche $u : F \to G$ de E est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si pour tout $i \in I$, il en est ainsi de l'application $u_{p_i} : F_{p_i} \to G_{p_i}$; qu'un objet F de E est initial (resp. final) si et seulement si pour tout $i \in I$, F_{p_i} est vide (resp. réduit à un point) ; qu'un objet F est un sous-objet de l'objet final e_E si et seulement si pour tout $i \in I$, F_{p_i} a au plus un point.

Proposition 6.5. — a) *Soient C un $\mathcal{U}$-site, $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de foncteurs fibres sur C* (6.3). *Pour que la famille $(p_i)_{i\in I}$ des points correspondants du topos $E = C^{\sim}$ soit conservative, il faut et il suffit que pour toute famille $(X_j \to X)_{j\in J}$ dans C, telle que pour tout $i \in I$, la famille correspondante $(\varphi_i(X_j) \to \varphi_i(X))_{j\in J}$ soit surjective, la famille donnée $(X_j \to X)_{j\in J}$ soit couvrante.*

b) *Soit E un $\mathcal{U}$-topos. Si E admet suffisamment de points* (6.4.1), *alors E admet une famille conservative de points qui est $\mathcal{U}$-petite.*

L'assertion b) est un cas particulier de I 7.7. Pour prouver a), appliquons I 7.7 à la famille génératrice dans E formée des $\epsilon(X)(X \in \mathrm{ob}\, C)$. Rappelons (II 4.4) que la famille $X_j \to X$ est couvrante si et seulement si la famille $\epsilon(X_j) \to \epsilon(X)$ est épimorphique. Si la famille des points $(p_i)_{i\in I}$ est conservative, il revient au même (6.4.3) de dire que pour tout $i \in I$, la famille des $(X_j)_{p_i} \to (X)_{p_i}$ soit surjective, i.e. que la famille des $\varphi_i(X_j) \to \varphi_i(X)$ soit surjective. Cela établit le « il faut » dans a). Pour le « il suffit », on applique le critère I 7.7, qui nous ramène à vérifier que tout monomorphisme $F \to \epsilon(X)$, tel que $F_{p_i} \to \epsilon(X)_{p_i}$ soit 391
un isomorphisme pour tout $i \in I$, est un isomorphisme, ou ce qui revient au même, un épimorphisme. Or, on peut trouver une famille couvrante de morphismes $\epsilon(X_j) \to F$, et quitte à raffiner encore, on peut supposer que les morphismes $\epsilon(X_j) \to \epsilon(X)$ sont induits par des morphismes $X_j \to X$. Par hypothèse, pour tout $i \in I$, les morphismes composés $(X_j)_{p_i} \to F_{p_i} \to (X)_{p_i}$ forment une famille surjective (comme composée de deux familles surjectives), i.e. la famille des $\varphi_i(X_j) \to \varphi_i(X)$ est surjective. Il en résulte par hypothèse que la famille $X_j \to X$ est couvrante, donc que la famille des $\epsilon(X_j) \to \epsilon(X)$ est épimorphisme, et a fortiori que $F \to \epsilon(X)$ est épimorphique.

Corollaire 6.5.1. — *Soit C une catégorie. Une topologie sur C faisant de C un $\mathcal{U}$-site admettant suffisamment de foncteurs fibres (i.e. tel que le topos associé admette suffisamment de points) est entièrement connue quand on connaît la sous-catégorie pleine Φ de* $\mathbf{Hom}(C, \mathrm{Ens})$ *formée des foncteurs fibres sur C.*

En effet, en vertu de 6.5 a) on sait alors décrire les familles couvrantes en termes de la famille des foncteurs fibres.

En fait, on va voir plus bas (??) que la sous-catégorie Φ est contenue dans la catégorie des foncteurs proreprésentables sur C, donc $\Phi^{\circ} \simeq \mathbf{Point}(C^{\sim})$ s'identifie à équivalence près à une sous-catégorie pleine de Pro $-C$.

On comparera 6.5.1 au théorème de Giraud II 5.5, qui établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des topologies sur C et un certain ensemble de sous-catégories pleines de $\mathbf{Hom}(C^{\circ}, \mathrm{Ens})$.

Exercice 6.5.2. — Soient C une catégorie équivalente à une catégorie $\in \mathcal{U}$, P une sous- 392
catégorie de Pro(C). Pour tout $p \in P$, on désigne par $X \mapsto X_p$ le foncteur proreprésenté par p. Une famille $(X_i \to X)_{i\in I}$ dans C est dite *P-couvrante* si pour tout $p \in P$, la famille $(X_{ip} \to X_p)_{i\in I}$ est surjective. Montrer qu'il existe une topologie T_p sur C pour laquelle les familles couvrantes soient exactement les familles P-couvrantes, et que T_p est la topologie la plus fine sur C pour laquelle les foncteurs $X \mapsto X_p$ ($p \in P$) soient des foncteurs fibres. Montrer que la topologie T_p fait de C un site ayant *suffisamment* de foncteurs fibres. Montrer que pour toute topologie T sur C, parmi les topologies T' plus fines que T qui ont assez de

foncteurs fibres, il en est une moins fine : c'est la topologie T_p, où P est la sous-catégorie strictement pleine de $\mathrm{Pro}(C)$, équivalente à $\mathbf{Point}(C)$, décrite dans (??) ci-dessous.

Problème 6.5.3. — Caractériser les sous-catégories (strictement pleines, stables par $\mathscr{U}$-limites projectives filtrantes...) P de $\mathrm{Pro}(C)$ qui peuvent se déduire d'une topologie sur C comme image essentielle de $\mathbf{Point}(C^{\sim})$ (6.8.5). [(6)]

6.6. — Soit

$$f : E \longrightarrow E'$$

un morphisme de $\mathscr{U}$-topos, on en déduit un foncteur canonique

$$\mathbf{Point}(f) = (p \longmapsto f \circ p) : \mathbf{Point}(E) \longrightarrow \mathrm{Point}(E').$$

Lorsqu'on a deux morphismes de topos composables

$$E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{g} E',$$

393 on vérifie trivialement que l'on a

$$\mathbf{Point}(gf) = \mathbf{Point}(g) \circ \mathbf{Point}(f) : \mathbf{Point}(E) \longrightarrow \mathbf{Point}(E') \longrightarrow \mathbf{Point}(E'').$$

Cela précise donc la dépendance fonctorielle (sans abus de langage pour une fois) de $\mathbf{Point}(E)$ par rapport au topos E : si $\mathscr{V}$ est un univers tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{V}$, on trouve un (véritable !) foncteur

$$\mathbf{Point} : (\mathscr{V}\text{-}\mathscr{U}\text{-top}) \longrightarrow (\mathscr{V}\text{-}\mathrm{cat})$$

de la catégorie des $\mathscr{U}$-topos qui sont éléments de $\mathscr{V}$ dans la catégorie des catégories éléments de $\mathscr{V}$.

6.7. — Soit E un $\mathscr{U}$-topos. Alors tout objet F de E définit un contrafoncteur

$$p \longmapsto F_p = p^*(F) : \mathbf{Point}(E)^{\circ} \longrightarrow (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens}),$$

d'où pour F variable un foncteur canonique

$$E \longrightarrow \mathbf{Point}(E)\hat{} = \mathbf{Hom}(\mathbf{Point}(E)^{\circ}, (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})), \tag{6.7.1}$$

qui par définition (6.5) est fidèle si et seulement si E possède suffisamment de points. (Le foncteur (6.7.1) a une certaine analogie formelle avec une transformation de Fourier...)

Soit X un objet de E, qui définit donc un préfaisceau $\widehat{X}$ sur

$$C = \mathbf{Point}(E).$$

Nous pouvons donc définir la catégorie

$$C_{/\widehat{X}} = \mathbf{Point}(E)_{/\widehat{X}}$$

des morphismes $p \to \widehat{X}$ dans le catégorie $\widehat{C}$ des préfaisceaux sur C, i.e. la catégorie des couples (p, ξ), où p est un point de E et ξ un élément de $\widehat{X}(p) = X_p$, fibre de X en p. Ceci posé, je dis qu'*on a une équivalence de catégories canonique*

$$C' = \mathbf{Point}(E_{/X}) \xrightarrow{\approx} C_{/\widehat{X}} \quad , \quad \text{où} \quad C = \mathbf{Point}(E), \tag{6.7.2}$$

6. cf. 9.1.8 a) et e) pour des conditions nécessaires, et 9.1.12 b) pour des conditions nécessaires et suffisantes dans les cas de $\mathrm{Top}(X)$, X espace sobre localement noethérien.

dont la composée avec le foncteur d'inclusion $C_{/\hat{X}} \to C$ n'est autre que le foncteur 394

$$\mathbf{Point}(j_X) : C' = \mathbf{Point}(E_{/X}) \longrightarrow C = \mathbf{Point}(E)$$

déduit par fonctorialité (6.6) du morphisme de localisation (5.2.1)

$$j_X : E_{/X} \longrightarrow E.$$

C'est simplement le cas particulier de 5.12 obtenu en faisant $E' = P = (Ens)$.

Corollaire 6.7.3. — *Soit E un topos. Si E a suffisamment de points, il en est de même de tout topos induit $E_{/X}$ ($X \in \mathrm{ob}\, E$). Inversement. si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'objets de E qui couvre l'objet final, telle que pour tout $i \in I$, $E_{/X_i}$ ait suffisamment de points, alors E a suffisamment de points.*

Pour la première assertion, soit $f : X' \to X''$ un morphisme dans $E_{/X}$ qui n'est pas un isomorphisme, prouvons qu'il existe un point q de $E_{/X}$ tel que f_q ne soit pas un isomorphisme. Comme E a assez de points, il existe un point p de E tel que $f_p : X'_p \to X''_p$ ne soit pas un isomorphisme. Cela implique qu'il existe un $q \in X_p$ tel que le morphisme induit par f_p pour les fibres X'_q, X''_q de X'_p, X''_p sur X_p en q ne soit pas un isomorphisme. Mais en vertu de l'équivalence (6.7.2), q peut s'identifier à un point de $E_{/X}$, et l'application $X'_q \to X''_q$ qu'on vient d'envisager n'est autre que l'application sur les fibres en q induite par $f : X' \to X''$, d'où la conclusion.

Inversement, supposons que les X_i couvrent l'objet final de E, et que les $E_{/X_i}$ aient assez de points, prouvons qu'il en est de même de E. Soit $f : X' \to X''$ un morphisme dans E 395
qui n'est pas un isomorphisme. Il existe donc un $i \in I$ tel que $f_i : X'_i \to X''_i$ n'est pas un isomorphisme, où l'indice i indique la restriction à X_i. Il existe donc un point p_i de $E_{/X_i}$ tel que $f_{ip_i} : X'_{ip_i} \to X''_{ip_i}$ ne soit pas un isomorphisme. Désignant par p l'image de p_i dans E par le morphisme de localisation $E_{/X_i} \to E$, cela signifie que $X'_p \to X''_p$ n'est pas un isomorphisme, ce qui prouve que E a assez de points.

Remarque 6.7.4. — L'argument précédent montre que si (p_α) est une famille conservative de points de E, alors la famille des points de $E_{/X}$ qui sont au-dessus d'un des p_α (famille indexée par l'ensemble somme des E_{p_α}) est conservative. De même, si les X_i couvrent l'objet final de E, et si pour tout $i \in I$, P_i est un ensemble conservatif de points de $E_{/X_i}$, alors l'ensemble des points de E *images* des $p \in P_i$ pour les morphismes de localisation $E_{/X_i} \to E$ (($i \in I$ et p variables) est conservatif.

6.8. — Soient E un topos, p un point de E. On appelle *voisinage du point p du topos E* un couple (X, u), où $X \in \mathrm{ob}\, E$ et $u \in X_p$. En vertu de (6.7.2), on peut aussi interpréter u comme un relèvement de p en un point du topos induit $E_{/X}$. Introduisant le foncteur fibre φ_p associé au point p, on peut aussi interpréter un voisinage du point p comme un objet de la catégorie $E_{/\varphi_p}$ (sous-catégorie pleine de $\widehat{(E^\circ)}_{/\varphi_p}$ formée des objets dont la source est dans $E \subset \widehat{E}$). Cette dernière catégorie, i.e. la catégorie des couples (X, u) comme ci-dessus, s'appellera comme de juste la *catégorie des voisinages* du point p du topos E ; on la note aussi $\mathbf{Vois}(p)$. Comme φ_p 396
est exact à gauche et que les limites projectives finies sont représentables dans E, les limites projectives finies sont représentables dans la catégorie $\mathbf{Vois}(p)$, et le foncteur canonique

$\mathbf{Vois}(p) \to E$ y commute (??). A fortiori, la catégorie opposée $\mathbf{Vois}(p)^\circ$ est filtrante. De plus, il est clair (I 3.4) qu'on a un isomorphisme canonique, fonctoriel en $F \in \operatorname{ob} E$

$$\varphi_p(F) = F_p \simeq \varinjlim_{\mathbf{Vois}(p)^\circ} F(X). \tag{6.8.1}$$

En d'autres termes *le foncteur φ_p « fibre en le point p » est isomorphe à la limite inductive filtrante des foncteurs représentés dans le topos E par les voisinages du point p de E.* On voit même que *le foncteur fibre est ind-représentable* (I 8), ce qui signifie aussi qu'il est représentable par un pro-objet $(X_i)_{i\in I}$ de E, où I est un ensemble ordonné filtrant tel que $I \in \mathscr{U}$. En effet, en vertu de *loc. cit.*, il revient au même de dire que la catégorie $\mathbf{Vois}(p)$ admet une petite sous-catégorie pleine cofinale. Or soit C une petite sous-catégorie pleine génératrice de E, je dis que la sous-catégorie pleine $C_{/\varphi_p}$ de $\mathbf{Vois}(p) = E_{/\varphi_p}$, formée des voisinages (X, u) de p tels que $X \in \operatorname{ob} C$ (catégorie qui est évidemment petite) est cofinale dans $\mathbf{Vois}(p)$. Soit en effet (X, u) un voisinage de p, il faut trouver un voisinage (X', u') de p au-dessus de (X, u), avec $X' \in \operatorname{ob} C$. Or il existe une famille couvrante $X'_i \to X$, avec les X'_i dans C, d'où résulte que les X'_{ip} couvrent X_p, donc il existe un $X' = X'_{i_\circ}$ et un $u' \in X'_p$ tels que (X', u') soit au-dessus de (X, p), ce qu'on avait affirmé.

397 *6.8.2.* — Soient C un $\mathscr{U}$-site, et p un point de C, i.e. un point du topos $C^\sim$. Désignons encore, par abus de notations, par φ_p la « restriction » du foncteur fibre φ_p à C, i.e. le composé $\varphi_p \circ \epsilon$; nous écrirons aussi souvent, pour un objet X de C

$$X_p = \varphi_p(X) = \epsilon(X)_p.$$

On appelle *voisinage du point p dans le site C* un couple (X, u), où $X \in \operatorname{ob} C$ et $u \in X_p = \varphi_p(X)$. Ces voisinages forment encore une catégorie $C_{/\varphi_p}$, qu'on pourra noter $\mathbf{Vois}_C(p)$. Montrons que *la catégorie $\mathbf{Vois}_C(p)^\circ$ est encore filtrante, qu'elle admet une sous-catégorie pleine cofinale $\mathscr{U}$-petite, et qu'on a un isomorphisme fonctoriel en le faisceau F sur C :*

$$F_p \simeq \varinjlim_{\mathbf{Vois}_C(p)^\circ} F(X). \tag{6.8.3}$$

On note d'abord, en reprenant l'argument de (6.8.1), que si C' est une sous-catégorie pleine de C qui est topologiquement génératrice (II 3.0.1), alors $\mathbf{Vois}_{C'}(p)^\circ$ est cofinale dans $\mathbf{Vois}_C(p)^\circ$. Prenant $C' \in \mathscr{U}$-petite, on est donc ramené, pour établir l'assertion, au cas où $C \in \mathscr{U}$. Dans ce cas $\widehat{C}$ est un $\mathscr{U}$-topos, et on a un foncteur faisceau associé $\underline{a} : \widehat{C} \to C^\sim$, qui permet de construire sur $\widehat{C}$ le foncteur fibre composé $\varphi_p \underline{a}$. Appliquant (6.8.1) au topos $\widehat{C}$ et à la sous-catégorie génératrice pleine C de celui-ci, on trouve que la catégorie $C^\circ_{/\varphi_p \underline{a}}$, qui est manifestement isomorphe à $\mathbf{Vois}_C(p)^\circ$, est filtrante, et qu'on a un isomorphisme fonctoriel en le préfaisceau P sur C :

$$\varphi_p \underline{a}(P) \simeq \varinjlim_X P(X).$$

398 Si F est un faisceau sur C, on a $F = \underline{a}F$, et appliquant l'isomorphisme précédent à F considéré comme préfaisceau, on obtient (6.8.3). En même temps, cet argument établit la formule plus générale

$$(\underline{a}P)_p \simeq \varinjlim_{\mathbf{Vois}_C(p)^\circ} P(X), \tag{6.8.4}$$

isomorphisme fonctoriel en le préfaisceau P arbitraire sur C, du moins lorsque C est petit. Le cas général s'en déduit, en introduisant un univers $\mathscr{V}$ tel que $C \in \mathscr{V}$, en considérant φ_p sur C comme un foncteur fibre à valeurs dans ($\mathscr{V}$- Ens), et utilisant la compatibilité de la formation du préfaisceau associé avec l'agrandissement des univers (II 3.6).

6.8.5. — On a associé à tout point p du topos $C^\sim$ un pro-objet du $\mathscr{U}$-site C, défini par le foncteur canonique $\mathbf{Vois}_C(p) \to C$, compte tenu du fait que la catégorie des voisinages de p dans C est cofiltrante et admet une petite sous-catégorie pleine cofinale. On vérifie aussitôt que pour p variable, on obtient ainsi un foncteur

$$\mathbf{Point}(C^\sim) \longrightarrow \mathrm{Pro}(C). \tag{6.8.5.1}$$

Ce foncteur est *pleinement fidèle.* En effet, via les foncteurs fibres associés, il s'interprète comme un foncteur $\mathrm{Fib}(C) \to \mathrm{Fib}(C^\sim) \to \mathrm{Pro}(C)^\circ$. Le premier foncteur est une équivalence en vertu de 4.9.4 (rappelé pour les foncteurs fibres en 6.3), et le deuxième est pleinement fidèle d'après le sorite général (I 8) des pro-objets.

6.8.6. — Prenons le cas particulier où C est $\mathscr{U}$-petite et munie de la topologie chaotique, de sorte que $C = \widehat{C}$. Je dis que dans ce cas le foncteur précédent est même une équivalence de catégories

$$\mathbf{Point}(\widehat{C}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Pro}(C). \tag{6.8.6.1}$$

En effet, il reste à prouver que ce foncteur est essentiellement surjectif, ce qui résulte du fait 399
que les foncteurs de la forme $P \mapsto P(X)$ sur $\widehat{C}$ sont des foncteurs fibres, et du fait évident que toute limite inductive filtrante de foncteurs fibres sur un topos est encore un foncteur fibre.

Identifiant C à une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Pro}(C)$ (I 8), le foncteur

$$C \longrightarrow \mathbf{Point}(\widehat{C})$$

induit par un foncteur quasi-inverse de (6.8.6.1) est manifestement isomorphe au foncteur canonique déjà envisagé dans (4.6.2.2), dont le quasi-inverse envisagé peut être considéré comme le prolongement canonique (I 8), compte tenu du fait que $\mathbf{Point}(\widehat{C})$ est stable par petites limites projectives.

6.8.7. — Soit de façon générale $(X_i)_{i\in I}$ un pro-objet du $\mathscr{U}$-site C, d'où sur $C^\sim$ un foncteur

$$\varphi(F) = \varinjlim_{I} F(X_i), \tag{6.8.7.1}$$

et il est naturel de se demander, vu (6.8.5), quand ce foncteur est un foncteur fibre. On trouve que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le foncteur φ précédent est un foncteur fibre sur $C^\sim$.
(ii) La « restriction » de φ à C est un foncteur fibre sur le site C (6.3).
(iii) Pour toute famille couvrante $Y_\alpha \to Y$ d'un objet Y de C, tout $i_\circ \in I$ et tout morphisme $X_{i_\circ} \to Y$, il existe un $i \geq i_\circ$, un α et un morphisme $X_i \to Y_\alpha$ rendant commutatif le

diagramme

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r] \arrow[d] & Y_\alpha \arrow[d] \\ X_{i_o} \arrow[r] & Y \end{tikzcd} .$$

400 En fait, la condition (iii) exprime simplement le fait que $\varphi|C$ transforme familles couvrantes en familles couvrantes. Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont triviales, et il reste à prouver (iii) $\Rightarrow$ (i). Comme le foncteur φ est manifestement exact à gauche, il reste à prouver (4.9.4) qu'il transforme familles couvrantes $F_\alpha \to F$ dans $C^\sim$ en familles couvrantes, i.e. que pour tout $i_\circ$ et tout $x_\circ \in F(X_{i_\circ})$, il existe un $i \geq i_\circ$, un α et un $y \in F_\alpha(X_i)$, tels que $x_\circ$ et y aient même image dans $F(X_i)$. Or comme $F_\alpha \to F$ est couvrante, il existe une famille couvrante $Z_\gamma \to X_{i_\circ}$ de $X_{i_\circ}$, tel que pour tout γ l'image inverse de $x_\circ$ dans $F(Z_\gamma)$ se remonte en un élément d'un $F_\alpha(Z_\gamma)$. Par hypothèse (iii), il existe un $i \geq i_\circ$ et un $X_{i_\circ}$-morphisme $X_i \to Z_\gamma$. Alors l'image de $x_\circ$ dans $F(X_i)$ se remonte donc en un élément y d'un $F_\alpha(X_i)$, C.Q.F.D.

Exercice 6.9. — Soient C un site $\in \mathscr{U}$, φ un foncteur fibre sur C, proreprésenté par un objet $(X_i)_{i\in I}$ de $\mathrm{Pro}(C)$. Pour tout indice $i \in I$, tout objet Y de C, tout morphisme $u : X_i \to Y$ et tout crible couvrant R de Y, choisissons un indice $j \geq i$ tel que le composé $X_j \to X_i \xrightarrow{u} Y$ se factorise par R. Pour i fixé, soit $J(i)$ l'ensemble formé de i, et des j obtenus pour Y, u, R variables ; pour une partie I' de I, soit de même $J(I')$ la réunion des $J(i)$ pour $i \in I'$. D'autre part, si I' est une partie finie de I, soit $m(I') \in I$ un majorant de I', et pour une partie quelconque I' de I, soit $M(I')$ la réunion des $M(I'')$, où I'' parcourt l'ensemble des
401 parties finies de I'. On suppose qu'on choisit la fonction $I' \to m(I')$ de façon que pour I' réduit à un élément i, on ait $m(I') = i$, ce qui implique que pour toute partie I' de I, on a $I' \subset M(I')$. Considérons les itérés $(MJ)^n$ de l'application MJ de l'ensemble des parties de I dans lui-même, et soit, pour toute partie I' de I, $P(I')$ la réunion des $(MJ)^n(I')$.

a) Montrer que pour toute partie I' de I, $P(I')$ est une partie filtrante de I pour l'ordre induit, et que I est réunion filtrante croissante des $P(I')$, lorsque I' parcourt l'ensemble des parties *finies* de I.
b) Montrer qu'il existe un cardinal $c \in \mathscr{U}$, ne dépendant que du cardinal $\operatorname{card} \mathrm{fl}(C) = a$, tel que pour toute partie finie I' de I, on ait $\operatorname{card}(P(I')) \leq c$. (Si a est infini, on peut prendre $c = 2^a$).
c) Montrer, en utilisant 6.8.7, que pour toute partie I' de I le foncteur $\varphi_{I'}$ sur C proreprésenté par le pro-objet $(X_i)_{i\in I'}$ est un foncteur fibre sur C, et que le foncteur fibre φ est limite inductive filtrante des foncteurs $\varphi_{I'}$, lorsque I' parcourt l'ensemble des parties finies de I.
d) En conclure qu'il existe une petite sous-catégorie pleine $\varPhi$ de $\mathbf{Fib}(C) \approxeq \mathbf{Fib}(C)$, telle que tout objet de $\mathbf{Fib}(C)$ soit limite inductive filtrante d'objets de $\varPhi$. (Si a est infini, on peut prendre $\varPhi$ de cardinal $\leq 2^{2^a}$; si a est fini, on peut prendre $\varPhi = C$ bien sûr).

Exercice 6.10. — Soient C un $\mathcal{U}$-site, D une $\mathcal{U}$-catégorie où les petites $\varinjlim$ filtrantes sont représentables, $\mathrm{Fais}(C, D)$ la catégorie des faisceaux sur C à valeurs dans $\overrightarrow{F}$ (II 6.1). Définir, en étendant (6.8.3), un « foncteur fibre »

$$F \longrightarrow F_p \,:\, \mathrm{Fais}(C, D) \longrightarrow D. \tag{6.10.1}$$

Si dans D les $\varprojlim$ finies sont représentables, et commutent aux $\varinjlim$ filtrantes, alors le foncteur précédent est exact à gauche.

7. Exemples de foncteurs fibres et de points de topos

7.1. Cas de $\mathrm{Top}(X)$ **pour un espace topologique** X. — Soit x un point de X. Regardons l'ensemble ponctuel $\{x\}$ comme un espace topologique, et considérons l'inclusion 402

$$i_x \,:\, \{x\} \longrightarrow X.$$

En vertu de 4.1.1 il définit un morphisme de topos (défini à isomorphisme unique près)

$$\mathrm{Top}(i_x) \,:\, \mathrm{Top}(\{x\}) \longrightarrow \mathrm{Top}(X). \tag{7.1.1}$$

D'autre part, on peut identifier P à $\mathrm{Top}(\{x\})$ (2.2), et on trouve ainsi un point p_x de $\mathrm{Top}(X)$:

$$p_x \,:\, P \longrightarrow \mathrm{Top}(X), \tag{7.1.2}$$

défini par x à isomorphisme unique près. Le foncteur fibre associé est donné par la formule bien connue [TF], résultant d'ailleurs immédiatement de I 5.1 :

$$p_x^*(F) = F_x = F_{p_x} = \varinjlim_{U \ni x} F(U), \tag{7.1.3}$$

la limite étant prise suivant les voisinages ouverts U de x dans X.

Comme on sait que $\mathrm{Top}(X)$ est isomorphe à $\mathrm{Top}(X_{\mathrm{sob}})$ (4.2.1), on voit plus généralement que tout point de X_{sob}, i.e. toute partie fermée irréductible Z de X, définit un point de $\mathrm{Top}(X)$, ou encore un foncteur fibre sur $\mathrm{Top}(X)$, qu'on notera encore $F \mapsto F_Z$. Revenant à sa définition par la formule (7.1.3) sur X_{sob}, on trouve

$$F_Z = \varinjlim_{U \cap Z \neq \phi} F(U), \tag{7.1.4}$$

la limite inductive étant prise suivant les ouverts U de X qui rencontrent Z. 403

7.1.5. — Il est bien connu que les foncteurs fibres $F \mapsto F_x (x \in X)$ forment déjà une famille conservative. C'est particulièrement évident sur l'interprétation des faisceaux sur X en termes d'espaces étalés, la fibre de F en x n'étant alors autre que sa fibre au sens des espaces fibrés sur X. On notera que l'ensemble d'indices de la famille conservative de foncteurs fibres envisagée est X, donc est $\mathscr{U}$-petite.

7.1.6. — En vertu de 4.2.3, la catégorie $\mathbf{Point}(\mathrm{Top}(X))$ est équivalente à la catégorie associée à l'ensemble X_{sob} ordonné par la relation de spécialisation. En d'autres termes : tout foncteur fibre sur $\mathrm{Top}(X)$ est isomorphe à un foncteur fibre $F \mapsto F_Z$, où Z est un élément uniquement déterminé de X_{sob}, i.e. une partie fermée irréductible uniquement déterminée de X ; d'autre part, si $Z, Z' \in X_{\mathrm{sob}}$, alors l'ensemble $\mathrm{Hom}(F_Z, F_{Z'})$ est vide ou réduit à un point, ce dernier cas se présentant si et seulement si Z est une spécialisation de Z' dans X_{sob}, i.e. si et seulement si $Z \subset Z'$ comme partie de X. Lorsque X lui-même est sobre, on peut dans ces énoncés remplacer X_{sob} par X lui-même.

On notera que le groupe des automorphismes d'un foncteur fibre de $\mathrm{Top}(X)$ (opposé au groupe des automorphismes du point correspondant de $\mathrm{Top}(X)$) est toujours réduit au groupe unité (plus généralement, 4.2.3 nous apprend la même chose pour le groupe des automorphismes de tout morphisme de topos associés à des espaces topologiques). C'est là
404 un phénomène très spécial au cas particulier envisagé : voir l'exemple 7.2, ainsi que VIII 7. Dans le cas des topos associés à des « problèmes de modules » (cf. par exemple [10]), les groupes d'automorphismes des foncteurs fibres ont d'ailleurs une interprétation remarquable, comme les groupes d'automorphismes des structures algébriques (sur des corps algébriquement clos) qu'on se propose de classifier.

7.1.7. — On vient de voir comment on peut reconstituer un espace sobre X (ou l'espace sobre X_{sob} associé à un espace topologique quelconque), du moins en tant qu'ensemble ordonné par la relation de spécialisation, à l'aide du topos $\mathrm{Top}(X)$ (qu'il suffit même de connaître à équivalence près), comme l'ensemble des classes d'isomorphie de « points » de $\mathrm{Top}(X)$. D'après ce qui a été dit dans 2.1, on reconstitue également la topologie de X, i.e. la famille de ses ouverts, de la façon suivante : pour tout sous-objet U de l'objet final e_E de E, soit $\mathrm{Pt}(U)$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $U_x \neq \phi$ (qui s'identifie d'ailleurs, en vertu de (6.7.2), à l'ensemble des classes d'isomorphie de points du topos induit $E_{/U}$). Alors $U \mapsto \mathrm{Pt}(U)$ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés de l'ensemble des sous-objets de e_E sur l'ensemble des ouverts de X.

7.1.8. — La détermination 7.1.6 de la catégorie des points du topos $\mathrm{Top}(X)$ défini par un espace topologique X conduit à adopter la terminologie suivante pour les points p, p' d'un topos quelconque E : on dit que p est une *spécialisation* de p', ou que p' est une *générisation* de p, lorsqu'il existe un morphisme de p' dans p (au sens de la catégorie $\mathbf{Point}(E)$ de 6.1). Ces relations sont encore transitives, mais on trouve facilement grâce à 6.8.6 des exemples
405 où p et p' sont chacun spécialisation de l'autre, sans que p et p' soient isomorphes (ni a fortiori égaux). La catégorie des générisations d'un point p du topos E, par quoi on entend la catégorie $\mathbf{Point}(E)_{/p}$, joue à certains égards un rôle analogue à celui du passage au localisé d'un schéma en un point. Ce rôle sera précisé au VI 8.4 avec la construction du topos localisé de E en le point p, dont la catégorie des points est canoniquement équivalente à la catégorie des générisations de p.

Exercice 7.1.9. — Soit E un $\mathscr{U}$-topos. Prouver que E est équivalent à un topos de la forme $\mathrm{Top}(X)$, où X est un espace topologique $\in \mathscr{U}$, si et seulement si il satisfait aux deux conditions suivantes :

a) La famille des sous-objets de l'objet final e_E est génératrice pour le topos E.
b) E a suffisamment de points (6.5). (Cette condition n'est pas superflue : cf. 7.4.)

Comparer avec 7.8 c).

Exercice 7.1.10. — Soient X un espace topologique muni d'un groupe d'opérateurs G ($X, G \in \mathscr{U}$) et soit $E = \mathrm{Top}(X, G)$ (2.3).

a) Montrer que pour tout objet (X', G) de E, le topos induit $E_{/(X',G)}$ est canoniquement équivalent au topos $\mathrm{Top}(X', G)$ (comparer 5.7).
b) Lorsque G opère proprement et librement sur X' (Bourbaki, Top. Gen. Chap. III 4), montrer que le morphisme d'espaces à opérateurs $(X', G) \to (X'/G, e)$ induit (4.1.2)

une équivalence de topos

$$\mathrm{Top}(X', G) \longrightarrow \mathrm{Top}(X'/G).$$

c) Conclure de b) qu'il existe un objet Z de E tel que le topos induit $E_{/Z}$ soit équivalent à $\mathrm{Top}(X)$, le foncteur de localisation $E \to E_{/Z}$ étant isomorphe au foncteur « oubli des opérations de G ». (Calquer le raisonnement de 5.8.3) 406
d) Conclure de c) que tout foncteur fibre sur E est induit, via le foncteur « oubli des opérations de G », par un foncteur fibre sur $\mathrm{Top}(X)$, donc définissable par un point de X_{sob}.
e) Déterminer la structure de la catégorie $\mathbf{Point}(E)$ (à équivalence près) en termes de l'espace à opérateurs (X_{sob}, G). En conclure en particulier que deux points de X_{sob} définissent des foncteurs fibres sur E isomorphes si et seulement si ils sont conjugués sous l'action de G.

Exercice 7.1.11. — Soit $X \in \mathscr{U}$ un espace topologique. Prouver que le V-topos $\mathrm{TOP}(X)$ (2.5) a suffisamment de points. Plus précisément, pour tout objet X' de $\mathrm{TOP}(X)$, et tout $x' \in X'$, définir un foncteur fibre $F \mapsto F_{X',x'}$ sur $\mathrm{TOP}(X)$, ne dépendant que du « germe » d'espace (X', x') au-dessus de X, et prouver que cette famille de foncteurs fibres est conservative (et indexée par un ensemble d'indices $\mathscr{V}$-petit). Montrer, en utilisant un système projectif filtrant convenable $(X'_i, x'_i)_{i\in I}$, avec I non $\mathscr{U}$-petit, que l'on n'obtient pas de cette façon tous les foncteurs fibres du $\mathscr{V}$-topos $\mathrm{TOP}(X)$. Montrer que l'ensemble des classes d'isomorphie de tels foncteurs fibres n'est pas de cardinal $\in \mathscr{V}$.

407

7.2. Points d'un topos classifiant B_G. — Soient E un $\mathscr{U}$-topos, G un Groupe de E, d'où un topos classifiant B_G (2.4). Si e est le Groupe ponctuel, les morphismes $e \to G \to e$ définissent (4.5) des morphismes de topos (compte tenu que $B_e \approx E$)

$$E \longrightarrow B_G \longrightarrow E, \tag{7.2.1}$$

dont le composé est isomorphe à id_E, d'où par passage aux catégories de points des foncteurs

$$\mathbf{Point}(E) \longrightarrow \mathbf{Point}(B_G) \longrightarrow \mathbf{Point}(E), \tag{7.2.2}$$

dont le composé est isomorphe à l'identité. Utilisons le fait que le premier morphisme de topos (7.2.1) s'identifie à un morphisme de localisation relativement à l'objet $E_G = G$ de B_G (5.8), d'où résulte en vertu de (6.7.2) que le premier foncteur (7.2.2) s'identifie au foncteur naturel « d'inclusion »

$$\mathbf{Point}(B_G)_{/\widehat{E}_G} \longrightarrow \mathbf{Point}(B_G), \tag{7.2.3}$$

où $\widehat{E}_G$ désigne le préfaisceau $p' \mapsto (E_G)_{p'}$ sur $\mathbf{Point}(B_G)$. Comme E_G couvre évidemment l'objet final de B_G, ses fibres $(E_G)_p$ sont non vides, d'où résulte que (7.2.3) est essentiellement surjectif, ce qui signifie que *tout foncteur fibre sur B_G est induit (à isomorphisme près) par un foncteur fibre de E, via le foncteur « oubli des opérations de G » $B_G \to E$.* On en conclut en particulier que *si E a suffisamment de points (resp. une petite famille conservative de points)* il en est de même de B_G.

Remarque 7.2.4. — On peut aller plus loin et déterminer (à équivalence près) la structure de la catégorie $C' = \mathbf{Point}(B_G)$ en termes de la catégorie $C = \mathbf{Point}(E)$ et du préfaisceau en groupes

$$\widehat{G} : p \longmapsto G_p : C^{\circ} \longrightarrow (\text{Groupes})$$

408 sur celle-ci. Définissons en effet une nouvelle catégorie C_1, ayant mêmes objets que C, et telle que pour deux objets p, q de C, on ait

$$\mathrm{Hom}_{C_1}(p,q) = \mathrm{Hom}_C(p,q) \times \widehat{G}(p),$$

la composition des flèches dans C_1 étant induite par celle de C, et par la loi de groupe du préfaisceau $\widehat{G}$. La donnée d'un foncteur $\varphi_1 : C_1 \to D$ dans une catégorie quelconque D équivaut alors à la donnée d'un foncteur $\varphi : C \to D$, muni d'une opération du préfaisceau $\widehat{G}$ sur ce dernier (i.e. la donnée, pour tout $p \in \mathrm{ob}\, C$, d'une opération de $\widehat{G}(p)$ sur $\varphi(p)$, satisfaisant à une condition de fonctorialité évidente pour p variable). Utilisant cette observation, on définit un foncteur canonique

$$\varphi_1 : C_1 \longrightarrow C', \tag{7.2.4.1}$$

correspondant au foncteur $\varphi : C \to C'$ de (7.2.2), associant à tout point p de E le point $\varphi(p)$ induit sur B_G, avec les opérations naturelles de $\widehat{G}(p) = G_p$ sur ce dernier, provenant des opérations de G_p sur les X_p lorsque X parcourt B_G. On laisse au lecteur le soin de prouver que (7.2.4.1) est une équivalence de catégories, en utilisant la structure (7.2.3) du premier foncteur de (7.2.2), et en notant que le foncteur naturel d'inclusion $C \to C_1$ admet une structure analogue, relativement à l'image inverse P_1 du préfaisceau $P' = \widehat{E}_G$ sur C'.

409 *7.2.5*. — On conclut en particulier que les *classes d'isomorphie de points de B_G correspondent exactement aux classes d'isomorphie de points de E : tout point du topos classifiant E_G est induit, à isomorphisme* non unique *près, par un point de E*. En particulier, lorsque E est le topos ponctuel P, donc que G est un groupe ordinaire, alors la catégorie $\mathbf{Point}(B_G)$ est un groupoïde connexe à groupe fondamental G : tout foncteur fibre sur B_G est isomorphe (de façon non canonique) au foncteur ω « oubli des opérations de G », et le monoïde des endomorphismes de ce dernier foncteur est le groupe G (donc tout endomorphisme de ω est un automorphisme).

Exercice 7.2.6. — a) Soit (Tors) la catégorie des couples $(\Gamma, P) \in \mathscr{U}$, avec Γ un groupe et P un torseur à droite sous Γ. La foncteur $(\Gamma, P) \mapsto \Gamma$

$$(\text{Tors}) \longrightarrow (\text{Groupes}) \tag{7.2.6.1}$$

est un foncteur cofibrant. Avec les notations de 7.2.4, considérons le foncteur

$$\widehat{G} : C^{\circ} \longrightarrow (\text{Groupes}),$$

et soit D' la catégorie cofibrée sur C° image inverse de la catégorie cofibrée (7.2.6.1), D la catégorie fibrés correspondants sur C, ayant même catégories fibres que D', de sorte que pour $p \in \mathrm{ob}\, C$, on ait

$$D_p = \text{ catégorie des } G_p\text{-torseurs à droite.}$$

Construire des foncteurs canoniques

$$D \longrightarrow C' = \mathbf{Point}(B_G) \quad , \quad C' \longrightarrow D, \tag{7.2.6.2}$$

quasi-inverses l'un de l'autre. En particulier, en conclure que la catégorie des points de B_G au-dessus d'un point donné p de E est canoniquement équivalente à la catégorie des torseurs à droite sous le groupe G_p.

b) Soit $\mathscr{G} = (G_i)_{i\in I}$ un système projectif strict de Groupes du $\mathscr{U}$-topos E ($I \in \mathscr{U}$ un ensemble préordonné filtrant), d'où un topos classifiant $B_{\mathscr{U}}$, en calquant la définition de 2.7.1. Déterminer la catégorie des points de $B_{\mathscr{G}}$, en calquant a). (NB. On remplacera les catégories (Tors) et (Groupes) par les catégories de systèmes projectifs indexés par I de ces catégories.) En conclure que si I admet un ensemble cofinal dénombrable, alors tout foncteur fibre sur $B_{\mathscr{G}}$ est isomorphe à un foncteur induit par un foncteur fibre de E (via le foncteur « oubli des opérations de G »), ce dernier étant déterminé à isomorphisme non unique près. **410**

c) Prenant pour E le topos ponctuel, de sorte que $\mathscr{G}$ est un pro-groupe ordinaire, montrer que la conclusion de b) est également valable si I est quelconque, mais en revanche $\mathscr{G}$ est profini (i.e. les G_i sont finis) : tout foncteur fibre est isomorphe au foncteur « oubli des opérations de G ».

d) Prenant toujours le cas où E est le topos ponctuel, donner un exemple d'un foncteur fibre sur $B_{\mathscr{G}}$, pour un système projectif convenable $\mathscr{G} = (G_i)_{i\in I}$, qui n'est pas isomorphe au foncteur « oubli des opérations de G ».

e) Considérons $\mathscr{G} = (G_i)$ comme un Groupe du topos $\hat{I}$, et soit $\mathscr{T}$ une *gerbe* sur I de *lien* G [3]. Montrer comment on peut « tordre » le topos classifiant B_G à l'aide de la gerbe T, pour obtenir un topos $B^T_{\mathscr{G}}$, limite inductive de sous-catégories $B^T(i)$ équivalentes (non canoniquement) aux topos classifiants B_{G_i}. Montrer que le topos $B^T_{\mathscr{G}}$ admet un foncteur fibre si et seulement si la gerbe T est « neutre », en établissant une équivalence de catégories entre la catégorie des foncteurs fibres de $B^T_{\mathscr{G}}$ et la catégorie des sections de T sur I. En conclure, si les G_i sont commutatifs, de sorte que la classification des gerbes sur I de lien $\mathscr{G}$ se fait par $\varprojlim_I{}^{(2)} G_i = H^2(I, \mathscr{G})$ (*loc. cit.*), un exemple d'un topos (non « vide » (2.2)) de la forme $B^T_{\mathscr{G}}$ qui n'a pas de points. (Prendre un exemple où $\varprojlim_I{}^{(2)} G_i \neq 0$.) **411**

7.3. Points des topos $\widehat{C}$; exemples de $\mathscr{U}$-topos $\widehat{C}$ dont la catégorie des points ne soit pas équivalente à une petite catégorie. — Soient E un $\mathscr{U}$-topos, $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille filtrante de foncteurs fibres sur E. Il résulte des propriétés d'exactitude des foncteurs $\varinjlim$ (I 2.8) que le foncteur $\varphi = \varinjlim \varphi_i$ est également un foncteur fibre : *toute limite inductive filtrante de foncteurs fibres est un foncteur fibre.* Par suite, la catégorie $\mathbf{Fib}(E)$ admet des $\mathscr{U}$-limites inductives filtrantes (et le foncteur d'inclusion $\mathbf{Fib}(E) \to \mathbf{Hom}(E, (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens}))$ y commute) ; en d'autres termes, la catégorie $\mathbf{Point}(E)$ admet des $\mathscr{U}$-limites projectives filtrantes. Ce fait a déjà été utilisé dans exercice 7.1.11 pour donner un exemple de « grosses » catégories de foncteurs fibres.

On peut construire des exemples nettement plus simples, avec des topos de la forme $E = \widehat{C}$, $C \in \mathscr{U}$, en utilisant (6.8.6.1). Ceci nous donne aussitôt des exemples où $\mathbf{Fib}(\widehat{C})$ n'est pas équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$ i.e. où le cardinal de l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de cette $\mathscr{U}$-catégorie n'est pas $\in \mathscr{U}$. Ceci signifie que la catégorie Pro $-(C)$ n'est pas équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$. Il suffit par exemple de prendre pour $D = C^\circ$ la catégorie

412 des ensembles finis de la forme $[0, n]$, où $n \geq 0$ est un entier, auquel cas $\mathrm{Ind}(D) \simeq \mathrm{Pro}(C)^{\circ}$ est équivalente à la catégorie des ensembles non vides. Le topos E est dans ce cas la catégorie bien connue des *ensembles cosimpliciaux*. On pourrait aussi prendre pour C la catégorie des ensembles finis non vides, on trouve que la catégorie des points sur le topos $\widehat{C}$ des ensembles simpliciaux est équivalente à la catégorie des ensembles profinis, ou encore à la catégorie des espaces compacts totalement discontinus.

7.4. Topos non vides sans points. — L'exemple suivant est dû à *P.* Deligne. (Pour un autre exemple, cf. 7.2.6 e).) On prend un espace compact K muni d'une mesure μ, et l'ensemble ordonné U des parties mesurables de K à ensemble de mesure nulle près. On fait de U une catégorie $\underline{U}$ telle que $\mathrm{ob}\,\underline{U} = U$, les morphismes de $\underline{U}$ étant les « morphismes d'inclusion » entre éléments de U. On fait de $\underline{U}$ un site en prenant la prétopologie pour laquelle $\mathrm{Cov}(E)$ (pour $E \in U$) est formé des familles *dénombrables* d'éléments E_i de E majorés par E, telles que E soit la réunion des E_i à ensemble de mesure nulle près. On en déduit un Topos $\mathrm{Top}(\mu) = \underline{U}^{\sim}$, admettant l'ensemble des sous-objets de l'objet final comme famille génératrice (lequel topos semble avoir échappé à l'attention des probabilistes). Ce topos est un « topos vide » (2.2) si et seulement si $\mu = 0$. D'autre part, la catégorie des points de ce topos est équivalent à la catégorie discrète définie par l'ensemble des points $x \in K$ tels que $\mu(\{x\}) \neq 0$ (démonstration au lecteur). Elle est donc vide si K n'admet pas de tels points, par exemple si K est le segment unité de la droite, avec la mesure induite par la mesure de Lebesgue.

413 ***Exercice 7.5.*** — (*catégories karoubiennes et morphismes de topos*)[6]

a) Soient C une catégorie, X un objet de C, p un endomorphisme de X. On dit que p est un *projecteur* si $p^2 = p$. Prouver que si p est un projecteur, pour que $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_X, p)$ soit représentable, il faut et il suffit que $\mathrm{Coker}(\mathrm{id}_X, p)$ le soit, et que les deux objets de C ainsi obtenus sont canoniquement isomorphes. On dira alors que la projecteur *p admet une image,* et $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_X, p) \simeq \mathrm{Coker}(\mathrm{id}_X, p)$ est appelé l'*image du projecteur p* ; on l'identifie suivant le contexte à un sous-objet ou à un objet quotient de C. Un objet isomorphe à un $\mathrm{Im}\, p$, pour un projecteur convenable p dans X, est appelé un *facteur direct de l'objet X de C*. On dit que C est une *catégorie avec facteurs directs*, ou une *catégorie karoubienne,* si tout projecteur dans un objet de C admet une image. Si $F : C \to C'$ est un foncteur qui commute aux noyaux ou aux conoyaux, alors F transforme un projecteur admettant une image en un projecteur admettant une image[7].

b) Montrer que pour toute catégorie C, on peut trouver un foncteur $\varphi : C \to \mathrm{kar}(C)$ de C dans une catégorie karoubienne (déterminée à équivalence près), tel que pour toute catégorie karoubienne C', le foncteur

$$f \mapsto f \circ \varphi : \mathbf{Hom}(\mathrm{kar}(C), C') \longrightarrow \mathbf{Hom}(C, C')$$

soit une équivalence de catégories ; on appellera $\mathrm{kar}(C)$ l'*enveloppe de Karoubi* de la catégorie C. (Hint : prendre pour $\mathrm{ob}\,\mathrm{kar}(C)$ l'ensemble des couples (X, p), avec $X \in \mathrm{ob}\, C$ et p un projecteur dans X, et pour $\mathrm{Hom}((X, p), (Y, q))$ la partie de $\mathrm{Hom}(X, Y)$ formée des $f : X \to Y$ tels que $f = qfp$.) Montrer que φ est pleinement fidèle.

6. Comparer I 8.7.8.

7. N.D.E. : Pas besoin de conditions sur F ici, tous les foncteurs préservent les projecteurs admettant des images.

c) Soit $F : E \to E'$ un foncteur d'une catégorie dans une autre. Montrer que si F commute à un certain type de limites inductives ou projectives, il en est de même 414
de tout facteur direct de F. En particulier, si E et E' sont des $\mathcal{U}$-topos et si F est un foncteur image inverse pour un morphisme de topos $E' \to E$, alors il en est de même de tout facteur direct de F ; par suite, la catégorie $\mathbf{Homtop}(E', E)$ est karoubienne, et en particulier la catégorie $\mathbf{Point}(E)$ est karoubienne.

d) Montrer que pour toute $\mathcal{U}$-catégorie C, la catégorie $\mathrm{Ind}(C)$ est karoubienne (où $\mathrm{Ind}(C)$ est formée avec les systèmes inductifs de C indexés par un ensemble préordonné filtrant $I \in \mathcal{U}$). (Si $C \in \mathcal{U}$, utiliser par exemple le fait (7.3) que $\mathrm{Ind}(C)$ est équivalente à la catégorie $\mathbf{Fib}((C^\circ)\hat{\ }) = \mathbf{Point}((C^\circ)\hat{\ })^\circ$.) En conclure une autre construction de $\mathrm{kar}(C)$ comme sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ind}(C)$ formée des images dans $\mathrm{Ind}(C)$ des projecteurs d'objets X de C.

Exercice 7.6. — (*Morphismes essentiels de topos, points essentiels*).

a) Soit $f : E \to F$ un morphisme de topos. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   i) $f_!$ existe, i.e. f^* admet un adjoint à gauche.
   ii) f^* commute aux $\mathcal{U}$-limites projectives.
   ii′) f^* commute aux $\mathcal{U}$-produits.

   On dira alors que f est un *morphisme essentiel* du topos E dans le topos E'.

   Montrer que si f satisfait à ces conditions, il en est de même de tout facteur direct de f. (Utiliser 1.8 et 7.5 c).)

b) Soit E un topos. On appelle *point essentiel du topos* E tout point $p : P \to E$ de E tel que $p_!$ existe. Montrer que si $E = \mathrm{Top}(X)$, X espace topologique, et si p est le point de E défini par un $x \in X$, alors p est essentiel si et seulement si x admet un plus petit 415
voisinage ouvert U (ce qui signifie, si les points de X sont fermés, que x est un *point isolé* de X). Pour qu'un morphisme de topos $f : E \to F$ soit essentiel (a)), il faut que f transforme points essentiels en points essentiels, et cette condition est également suffisante lorsque E admet suffisamment de points essentiels (i.e. si la famille de ces points est conservative) (cf. d)).

c) Pour qu'un point p du topos E soit essentiel, il faut et il suffit que le foncteur fibre associé soit représentable par un objet X de E. Pour que le foncteur covariant $\varphi : E \to (\mathrm{Ens})$ représenté par un objet donné X de E soit un foncteur fibre (i.e. définisse un point, nécessairement essentiel, de E), il faut et il suffit que X soit connexe non vide (4.3.5), et projectif (i.e. que le foncteur φ transforme épimorphismes en épimorphismes). (Hint : montrer d'abord que pour que φ commute aux sommes, il faut et il suffit que X soit connexe non vide, puis utiliser le critère 4.9.4.) En conclure une équivalence entre la catégorie $\mathbf{Pointess}(E)$ et la sous-catégorie pleine P de E formée des objets connexes non vides projectifs.

d) Montrer que la topologie de P induite par celle de E est la topologie chaotique. En conclure l'équivalence des conditions suivantes sur E (due à J.E ROOS [12 c), prop. 1]) : (i) La famille des points essentiels de E est conservative ; (ii) La sous-catégorie pleine P de E formée des objets connexes-non vides projectifs est génératrice ; (iii) E est équivalent à un topos de la forme $\widehat{C}$, où C est une catégorie équivalente à une

catégorie $\in \mathscr{U}$ (ou, si on préfère, $C \in \mathscr{U}$). (Utiliser *c*) et le fait que si P est génératrice,
416 le foncteur naturel $E \to P^{\sim}$ est une équivalence de catégories.)

e) La catégorie des points essentiels d'un topos E est karoubienne (cf. (7.5 c)). Soit C une catégorie équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$. Prouver que le foncteur pleinement fidèle canonique (4.6.2)
$$C \longrightarrow \mathbf{Point}(\widehat{C})$$
se factorise par un foncteur
$$C \longrightarrow \mathbf{Pointess}(\widehat{C}),$$
qui fait de $\mathbf{Pointess}(\widehat{C})$ une *enveloppe de Karoubi* (7.5 b)) *de* C. En particulier, ce foncteur est une équivalence de catégories si et seulement si la catégorie C est karoubienne. (Hint : utilisant *c*), prouver que tout point isolé de $\widehat{C}$ est isomorphe à un facteur direct d'un $X \in \operatorname{ob} C$.)

f) Soient C et C' deux catégories équivalentes à des catégories $\in \mathscr{U}$. Prouver que le foncteur pleinement fidèle canonique (4.6.2)
$$\mathbf{Hom}(C, C') \longrightarrow \mathbf{Homtop}(\widehat{C}, \widehat{C}')$$
prend ses valeurs dans la sous-catégorie pleine $\mathbf{Homtopess}(\widehat{C}, \widehat{C}')$ des morphismes essentiels *de topos* (a)), et que le foncteur induit
$$\mathbf{Hom}(C, C') \longrightarrow \mathbf{Homtopess}(\widehat{C}, \widehat{C}')$$
est une équivalence de catégories si et seulement si C est vide ou C' est karoubienne. (Utiliser *g*) ci-dessous.)

g) Soient C une catégorie équivalente à une catégorie $\in \mathscr{U}$, et E un topos. Définir une équivalence entre la catégorie $\mathbf{Homtopess}(\widehat{C}, E)$ des morphismes essentiels de topos
417 $\widehat{C} \to E$, et la catégorie $\mathbf{Hom}(C, \mathbf{Pointess}(E))$. (Utiliser *b*) et le fait que $\widehat{C}$ a suffisamment de points essentiels).

h) Soit C une catégorie finie. Prouver que tout point de $\widehat{C}$ est essentiel, et que $\mathbf{Point}(\widehat{C})$ est équivalente à une catégorie finie. (Noter que l'enveloppe de Karoubi de C est finie, et utilisant (6.8.6.1), se ramener à prouver que si C est une catégorie karoubienne finie, alors le foncteur canonique $C \to \operatorname{Pro}(C)$ est une équivalence de catégories). Utilisant b), et conclure que *tout* morphisme de topos $\widehat{C}' \to \widehat{C}$ est essentiel, et $\mathbf{Hom}(C, C') \to \operatorname{Hom}(\widehat{C}, \widehat{C}')$ est une équivalence si et seulement si C est vide ou C' karoubienne.

i) Soit X un espace topologique, $f : \operatorname{Top}(X) \to P$ le morphisme de topos déduit de l'application continue de X dans l'espace ponctuel. Montrer que f est essentiel si et seulement si l'espace X est *localement connexe*, i.e. satisfait la condition suivante : pour tout $x \in X$ et tout voisinage ouvert U de x, la composante connexe de x dans U est un voisinage de x, ou encore : pour tout ouvert U de X, les composantes connexes de U sont ouvertes. (cf. 8.7 l) pour généralisation).

Exercice 7.7. — (*Points inhabituels d'un topos classifiant*)[7].

7. cf. aussi 7.2.6 d).

a) Soit G un monoïde. Pour que G contienne un élément g tel que $g \neq e$, $g^2 = g$, il faut et il suffit que le topos classifiant B_G admette un point essentiel qui n'est pas isomorphe au point banal (correspondant au foncteur fibre « oubli des opérations de G »). (Utiliser 7.6 e)).
b) Soit G le monoïde additif des entiers ≥ 0. Montrer que tout point essentiel du topos classifiant B_G est isomorphe au point banal. Construire un point de B_G qui n'est pas isomorphe au point banal. Montrer que la catégorie $\mathbf{Point}(B_G)$ n'est pas équivalente à une catégorie $\in \mathcal{U}$.

Exercice 7.8. — (*Topologie sur* Point(E), *et topos associés aux ensembles ordonnés*).

a) Soit E un topos. Désignons par Point(E) l'ensemble des classes, à isomorphisme près, de points de E. Pour tout ouvert U de E, soit U' l'ensemble des classes de points 418
p de E tels que $U_p \neq \phi$. Montrer que $U \mapsto U'$ est une application croissante de l'ensemble ordonné Ouv(E) des ouverts de E dans l'ensemble des parties de $X =$ Point(E), et que cette application commute aux Inf finis aux Sup quelconques. En conclure que l'ensemble des parties de X de la forme U' définit sur X une topologie (dite *topologie canonique sur l'ensemble des classes de points du topos* E). Montrer que si E a suffisamment de points, l'application $U \mapsto U'$ est un isomorphisme de l'ensemble ordonné Ouv(E) avec l'ensemble ordonné Ouv(X).
b) Soit $\mathcal{O} \in \mathcal{U}$ un ensemble ordonné admettant des Inf fins et des Sup quelconques, qui définit donc une catégorie cat$(\mathcal{O})$ ayant des produits finis et des sommes quelconques. Nous dirons qu'une famille de morphismes $U_i \to U$ de même but U est couvrante si U est le Sup des U_i. Supposant que dans cat$(\mathcal{O})$ les sommes sont universelles i.e. que dans $\mathcal{O}$ les Sup quelconques commutent aux Inf, on définit ainsi sur cat$(\mathcal{O})$ une topologie qui en fait un site, d'où un topos cat$(\mathcal{O})^\sim$, noté aussi simplement $\mathcal{O}^\sim$. Montrer que $\mathcal{O}$ est canoniquement isomorphe à Ouv$(\mathcal{O}^\sim)$.

   Montrer que la catégorie $\mathbf{Homtop}(E, \mathcal{O}^\sim)$ est équivalente à la catégorie associée à l'ensemble ordonné des morphismes d'ensembles ordonnés $\mathcal{O} \to$ Ouv(E) qui commutent aux Inf finis et aux Sup quelconques. (Utiliser le critère 4.9.4.) Si $\mathcal{O}'$ est un ensemble ordonné satisfaisant aux mêmes conditions que $\mathcal{O}$, conclure que $\mathbf{Homtop}(\mathcal{O}^\sim, \mathcal{O}'^\sim)$ est équivalente à la catégorie associée à l'ensemble ordonné de tous les morphismes d'ensembles ordonnés $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ qui commutent aux Inf finis et aux Sup quelconques.
c) Montrer que pour que le topos E soit équivalent à un topos de la forme $\mathcal{O}^\sim$, avec $\mathcal{O}$ 419
comme dans b), il faut et il suffit que la famille des ouverts de E soit génératrice dans E. Pour qu'il soit équivalent à un Top(X) pour $X \in \mathcal{U}$, il faut et il suffit qu'il satisfasse à la condition précédente et qu'il ait suffisamment de points. Supposant réalisée la première condition, exprimer la seconde en termes de la structure de l'ensemble ordonné $\mathcal{O} =$ Ouv(E), en utilisant la dernière assertion de b).
d) Définir un morphisme de topos canonique

$$E \longrightarrow \mathrm{Ouv}(E)^\sim,$$

   qui soit universel (à équivalence près) pour les morphismes de E dans des topos engendrés par leurs ouverts (cf. c)).

e) Soit X' un *petit* sous-ensemble de $X = \mathrm{Point}(E)$, qu'on munit de la topologie induit par celle de X. Définir un morphisme canonique de topos

$$\mathrm{Ouv}(E)^{\sim} \longrightarrow \mathrm{Top}(X'),$$

qui est une équivalence lorsque la famille X' de points de E est conservative. En conclure alors un morphisme canonique de topos

$$E \longrightarrow \mathrm{Top}(X').$$

Donner une caractérisation universelle (à équivalence près) de ce morphisme de topos pour les morphismes du topos E dans des topos de la forme $\mathrm{Top}(Y)$. (Noter à ce propos qu'à équivalence près, $\mathrm{Top}(X')$ ne dépend pas de la petite famille conservative de foncteurs fibres choisie, ou ce qui revient au même (4.2), que X'_{sob} ne dépend pas à homéomorphisme près du choix d'une telle famille).

420 f) Supposons que la catégorie $\mathbf{Point}(E)$ ne soit pas équivalente à une petite catégorie (cf. 7.3), et que E admette une petite famille conservative de foncteurs fibres. Montrer que si une telle famille est prise assez grande, la partie X' de $\mathbf{Point}(E)$ qu'elle définit n'est pas un espace topologique sobre pour la topologie induite.

g) Pour les relations avec l'exercice 7.6, cf. 8.

8. Localisation. Ouverts d'un topos

8.1. — Soit C une catégorie, et $T(X)$ une relation faisant intervenir un objet X de C. On dit que la relation $T(X)$ est *stable par changement de base* (en X), si pour tout morphisme $X' \to X$ de C, la relation $T(X)$ implique $T(X')$. Il revient au même de dire que la sous-catégorie pleine R de C, formée des objets X de C tels qu'on ait $T(X)$, est un *crible* (I 4.1).

Remarque 8.1.1. — Supposons que C soit une $\mathscr{U}$-catégorie (I 1.1), de sorte que C peut être identifié à une sous-catégorie pleine de $\widehat{C}$ (I 1.4). Il est parfois commode d'étendre la définition de la relation T dans $\mathrm{ob}\, C$ en une relation $\hat{T}$ portant sur un objet F de $\widehat{C}$, en désignant par $\hat{T}(F)$ la relation : pour toute flèche $X \to F$ dans $\widehat{C}$, avec $X \in \mathrm{ob}\, C$, on a $T(X)$. La relation $\hat{T}(F)$ est évidemment encore stable par changement de base en F. Désignant encore par R le sous-objet de l'objet final e de $\widehat{C}$ défini par le crible R de C (I 4.2.1), la relation $\hat{T}(F)$ peut aussi s'exprimer par $\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(F, R) \neq \varnothing$, i.e. elle signifie que l'unique morphisme $F \to e$ se factorise par le sous-objet R de e.

8.2. — Supposons maintenant que C soit un *site*. Une relation $T(X)$ en un argument $X \in$
421 $\mathrm{ob}\, C$ est dite *stable par descente* si pour toute famille couvrante $(X_i : X_i \to X)_{i \in I}$ d'un objet X de C, la relation « $T(X_i)$ pour tout $i \in I$ » implique la relation $T(X)$. On dit que T est une *relation de nature locale* si elle est stable par changement de base (8.1) et stable par descente. Lorsque C est une $\mathscr{U}$-catégorie, et que T est déjà supposée stable par changement de base, i.e. qu'elle est définissable par un crible R de C, qu'on identifiera à un sous-préfaisceau du préfaisceau final sur C, on voit aussitôt que C est de nature locale si et seulement si R est un *faisceau*. Ainsi, *les relations de nature locale en un argument $X \in \mathrm{ob}\, C$ correspondent exactement aux sous-faisceaux du faisceau final de C, i.e. aux sous-objets de l'objet final du topos $C^{\sim}$*. Elles ne dépendent donc essentiellement que du topos $C^{\sim}$ défini par le site C

(comme toutes les notions importantes associées à un site !). En termes du sous-faisceau R du faisceau final, la relation $T(X)$ s'exprime comme $\mathrm{Hom}(\epsilon(X), R) \neq \varnothing$. Elle se prolonge canoniquement en la relation $T^{\sim}(F)$: $\mathrm{Hom}(F, R) \neq \varnothing$ sur le topos $C^{\sim}$.

Remarque 8.2.1. — Avec la notation introduite dans 8.1.1, pour un préfaisceau F sur C, comme $\mathrm{Hom}(F, R) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{a}(F), R)$, la relation $\hat{T}(F)$ équivaut à la relation $\hat{T}(\underline{a}(F))$.

Définition 8.3. — *On appelle ouvert d'un $\mathscr{U}$-topos E tout sous-objet de l'objet final e_E de E ; si X est un objet de E, on appelle parfois ouvert de X tout ouvert du topos induit $E_{/X}$, i.e. tout sous-objet de X.*

On appelle ouvert d'un $\mathscr{U}$-site C un ouvert du $\mathscr{U}$-topos associé $C^{\sim}$.

On notera que, les objets finaux de E étant canoniquement isomorphes, l'ambiguïté introduite dans 8.3 par le choix de e_E inoffensive ; on peut aussi, de façon plus intrinsèque mais moins maniable du point de vue pratique, définir les ouverts de E comme étant les sous-catégories pleines R de E qui sont telles que la relation $F \in \mathrm{ob}\, R$ pour un objet F de E soit une relation de nature locale. De même, les ouverts d'un $\mathscr{U}$-site C correspondent biunivoquement aux sous-catégories pleines de C telles que la relation $F \in \mathrm{ob}\, R$ pour un objet de C soit de nature locale ; cette notion est donc essentiellement indépendante de l'univers choisi $\mathscr{U}$. Enfin, en vertu de ce qui a été dit dans 8.2, une relation de nature locale sur un topos (ou sur un site) est essentiellement la même chose qu'un ouvert dudit topos (ou du site). 422

8.4. Exemples d'ouverts. —

8.4.1. — Soit X un espace topologique, et interprétons $\mathrm{Top}(X)$ (2.1) comme la catégorie des espaces étales sur X. Comme il est clair que les monomorphismes dans $\mathrm{Top}(X)$ sont les applications injectives, il s'ensuit que les ouverts du topos $T(X)$ s'identifient aux ouverts de l'espace X. Plus généralement, les ouverts d'un topos $\mathrm{Top}(X, G)$ (2.4) s'identifient aux ouverts de X *invariants* par l'action de G.

8.4.2. — Les ouverts d'un $\mathscr{U}$-topos E forment un ensemble $\mathscr{U}$-petit (I 7.4) ordonné par l'inclusion, admettant des sup quelconques et des inf finis. Il admet l'objet initial (ou « objet vide ») ϕ_E comme plus petit élément, et l'objet final e_E de E comme plus grand élément. Ces deux éléments ne sont identiques que si E est un « topos vide » (2.2).

8.4.3. — Soit G un Monoïde dans E, d'où un topos B_G (2.6), catégorie des objets de E sur lesquels G opère à gauche. L'objet final e_G de B_G est l'objet final e_E de E avec opération triviale de G. On voit par suite que l'ensemble ordonné des ouverts de B_G est canoniquement isomorphe à la catégorie des ouverts de E. En particulier, si E est le topos ponctuel donc G est un monoïde ordinaire, l'ensemble des ouverts de B_G est exactement formé de deux éléments, savoir ϕ_{B_G} et e_G. 423

8.4.4. — Si E est un topos de la forme $\widehat{C}$, où C est une $\mathscr{U}$-catégorie, alors (8.1) l'ensemble ordonné des ouverts de E est isomorphe à l'ensemble ordonné des cribles de C.

8.4.5. — Soit X un espace topologique sobre non discret. Montrer que $\mathrm{TOP}(X)$ (2.5) a des ouverts qui ne proviennent pas d'ouverts de X, i.e. d'ouverts de $\mathrm{Top}(X)$, par image inverse à l'aide du morphisme canonique (4.10.1) $\mathrm{TOP}(X) \to \mathrm{Top}(X)$.

8.5. Exemples de relations de nature locale. — Pour tout objet X du topos E, on désigne par $F \to F_X$ le *foncteurs de localisation* $j_X^* : E \to E_{/X}$, $Y \mapsto Y \times X$ (5.2).

8.5.1. — Soit $u : F \to G$ un morphisme de E. La relation en l'argument $X \in \mathrm{ob}\, E$,

$u_X : F_X \to G_X$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme) est une relation de nature locale. En particulier, si G est un Groupe de E, la relation « G_X est le groupe unité sur X » est de nature locale ; l'ouvert de E qui lui correspond est appelé le *cosupport du Groupe* G.

424 *8.5.2.* — Soient $u, v : F \rightrightarrows G$ deux morphismes de E. La relation en l'argument $X \in \mathrm{ob}\, E$

$$u_X = v_X : F_X \longrightarrow G_X$$

est une relation de nature locale. En particulier, si G est un Groupe de E, et u une *section* de G (4.3.6), la relation en X

la section u_X du Groupe G_X de $E_{/X}$ est nulle

est de nature locale ; l'ouvert de E qui lui correspond est appelé le *cosupport de la section u du Groupe G*.

Remarque 8.5.3. — Lorsque $E = \mathrm{Top}(X)$, le cosupport d'un faisceau en groupes G, resp. d'une section d'un tel faisceau G, n'est autre que l'ouvert de X complémentaire du *support de G* resp. du *support de u* dans la terminologie classique [TF].

8.5.4. — Soit $P(f)$ une relation en l'argument $f \in \mathrm{fl}\, C$, C un site. Lorsque dans C les produits fibrés sont représentables, on dit que la relation $P(f)$ est *stable par changement de base (resp. stable par descente), resp. de nature locale) sur le but* (ou *sur la base*, ou « *en bas* »), si pour tout morphisme $f : X \to Y$ de C, la relation en l'argument $Y' \in \mathrm{ob}\, C_{/Y}$:

« le morphisme $f' : X' = X \times_Y Y' \to Y'$ déduit de f par changement de base par le morphisme structural $Y' \to Y$ satisfait $P(f')$ »

est stable par changement de base, resp. stable par descente, resp. est de nature locale. Lorsque la topologie de E est définie à l'aide d'une prétopologie, on dit que la relation $P(f)$ est *de nature locale sur la source* (ou « *en haut* ») si pour tout morphisme $f : X \to Y$ de C et
425 toute famille $(g_i : X_i \to X)_{i \in I}$ de $\mathrm{Cov}(X)$, la relation $P(f)$ équivaut à la relation « $P(fg_i)$ pour tout $i \in I$ ». Lorsque $\mathrm{Cov}(X)$ est formée de toutes les familles couvrantes de C, cette condition signifie donc aussi que la relation en l'objet X' du site induit $C_{/X}$

$P(fg)$, où $g : X' \to X$ est le morphisme structural

est de nature locale. Noter que si la relation $P(f)$ est de nature locale en haut, elle est a fortiori de nature locale en bas.

8.5.5. — Prenons par exemple $C = (\mathrm{Sch})$, catégorie des schémas $\in \mathscr{U}$, avec la topologie fidèlement plate quasi-compacte (SGA 3 IV 6.3) ou une topologie moins fine. Alors chacune des propriétés suivantes d'un morphisme est de nature locale en bas :

surjectif, radiciel, universellement ouvert, universellement finie, propre, quasi-compact, quasi-compact et dominant, homéomorphisme universel, séparé, quasi-séparé, localement de type fini, localement de présentation finie, de type fini, de présentation finie, un isomorphisme, un monomorphisme, une immersion ouverte, une immersion fermée, une immersion quasi-compacte, affine, quasi-affine, fini, quasi-fini, entier, plat, fidèlement plat, net, lisse, étale

(EGA IV 2.6.4, 2.7.1 et EGA IV 17.7.1). D'autre part, munissons (Sch) de la prétopologie pour laquelle, pour tout schéma $X \in \mathcal{U}$, $\mathrm{Cov}(X)$ est formé des familles de morphisme $(f_i : X_i \to X)_{i\in I}$ qui sont surjectives et telles que les f_i soient plats et localement de présentation finie. Alors chacune des propriétés suivantes est *de nature locale en haut* :

localement de type fini, localement de présentation finie, de type fini, plat, net, lisse, étale. (EGA IV 17.7.5, 17.7.7).

Exercice 8.6. — Soit $f : E \to F$ un morphisme de $\mathcal{U}$-topos. Considérons la relation en l'argument $X \in \mathrm{ob}\, F$: le morphisme induit $E_{/f^*(X)} \to F_{/X}$ est une équivalence de topos. Prouver que cette relation est de nature locale. 426

Exercice 8.7. — (*Partitions d'un topos, somme de topos*). Soit E un $\mathcal{U}$-topos. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E, i.e. de sous-objets de l'objet final e de E, est appelée une *partition de e* (ou encore, du topos E) si le morphisme canonique $\amalg_{i\in I} e_i \to e$ est un isomorphisme, i.e. (II 4.6.2)) si e est le sup des e_i et si $i \neq j$ implique $e_i \cap e_j = \varnothing_E$.

a) Montrer que pour que la famille $(e_i)_{i\in I}$ d'objets de E soit une partition de E, il faut et il suffit que le foncteur

$$E \longrightarrow \prod_i E_{/e_i} \tag{8.7.1}$$

défini par les foncteur de localisation $E \to E_{/e_i}$ soit une équivalence de catégories.

b) Soit réciproquement $(E_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{U}$-topos, avec $I \in \mathcal{U}$. Prouver que $E = \Pi_{i\in I} E_i$ est un $\mathcal{U}$-topos (qui sera appelé le *topos somme* de la famille des topos $(E_i)_{i\in I}$). Définir une partition $(e_i)_{i\in I}$ de E et des équivalences de catégories $E_{/e_i} \approx E_i$, de telle façon que les foncteurs de projection $E \to E_i$ s'identifient aux foncteurs de localisation $E \to E_{/e_i}$.

c) Soit E le topos somme de la famille des topos $(E_i)_{i\in I}$. Montrer que pour tout $i \in I$ le foncteur projection $E \to E_i$ est de la forme u_i^*, où

$$u_i : E_i \longrightarrow E \tag{8.7.2}$$

est un morphisme de topos. Prouver que pour tout $\mathcal{U}$-topos F, le foncteur $v \mapsto (v \circ u_i)_{i\in I}$ 427

$$\mathbf{Homtop}(E, F) \longrightarrow \prod_i \mathbf{Homtop}(E_i, F) \tag{8.7.3}$$

est une équivalence de catégories.

d) Soit $(e_i)_{i\in I}$ une partition du topos E. Pour tout morphisme de topos $g : F \to E$, la famille $(f_i)_{i\in I}$, avec $f_i = g^*(e_i)$, est une partition de F, et les morphismes induits $g_i : E_{/e_i} \to F_{/f_i}$ permettent de reconstituer g (à isomorphisme unique près), le foncteur g^* s'identifiant au produit cartésien des foncteurs g_i^* (compte tenu des équivalences du type (8.7 1)). En conclure une description complète de la catégorie $\mathbf{Homtop}(F, E)$, en termes des catégories de la forme $\mathbf{Homtop}(F', E_i)$, où F' est un topos de la forme $F_{/f}$ (f sommande directe de l'objet final de F) et $E_i = E_{/e_i}$.

e) En particulier, si F est connexe non vide (cf. 4.3.5) i.e. si pour toute partition $(f_i)_{i\in I}$ de F il existe un $i \in I$ et un seul tel que $f_i \neq \phi_F$, prouver que le foncteur canonique

$$\coprod_{i\in I} \mathbf{Homtop}(F, E_i) \longrightarrow \mathbf{Homtop}(F, E) \tag{8.7.4}$$

déduit des morphismes de topos (8.7.2) est une équivalence de catégories. Plus particulièrement, la famille des morphismes de topos (8.7.2) induit une équivalence de catégories

$$\coprod_{i\in I} \mathbf{Point}(E_i) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Point}(E).$$

428 f) Une partie I de l'ensemble des ouverts de E est appelée une *partition réduite* de E si la famille identique $(e_i)_{i\in I}$ indexée par I est une partition, et si les e_i sont $\neq \phi_E$. Montrer que la relation de raffinement (I 4.3.2) entre partitions réduites fait de l'ensemble P des partitions réduites un ensemble ordonné $\mathscr{U}$-petit, tel que la borne supérieure de deux éléments de P existe. On trouve ainsi un système projectif strict $(I_p)_{p\in P}$, qui sera considéré comme un pro-ensemble et noté $\pi_\circ(E)$. On l'appelle le *pro-$\pi_\circ$ du topos E.*

g) Prouver que $\pi_\circ(E)$ pro-représente le foncteur

$$T \longmapsto f_* f^*(T) = \Gamma(E, T_E) : (\mathscr{U}\text{-}\,\mathrm{Ens}) \longrightarrow (\mathscr{U}\text{-}\,\mathrm{Ens})$$

associé au morphisme canonique $f : E \to P$ de E dans le topos ponctuel P (4.3). En particulier, pour que ce foncteur soit représentable, il faut et il suffit que $\pi_\circ(E)$ soit essentiellement constant, i.e. isomorphe (en tant que pro-ensemble) à un ensemble « ordinaire », qui sera noté encore $\pi_\circ(E)$. Pour que $\pi_\circ(E)$ soit réduit à un point, il faut et il suffit que E soit « connexe non vide ». Pour que $\pi_\circ(E)$ soit vide, il faut et il suffit que E soit le « topos vide » (2.2).

h) Supposons E quasi-compact, i.e. que tout recouvrement de son objet final e admette un sous-recouvrement fini. Montrer qu'alors $\pi_\circ(E)$ est un ensemble profini, et peut s'identifier par suite (moyennant l'équivalence de catégories bien connue entre pro-objets de la catégorie des ensembles finis, et espaces compacts totalement discontinus) à un espace compact totalement discontinu, qu'on notera également $\pi_\circ(E)$.

i) Soit X un espace topologique, $\pi_\circ(X)$ l'ensemble des composantes connexes de X,
429 considéré comme un pro-ensemble constant. Définir un morphisme canonique de pro-ensembles

$$\pi_\circ(X) \longrightarrow \pi_\circ(\mathrm{Top}(X)), \tag{8.7.5}$$

ou ce qui revient au même, une application canonique

$$\pi_\circ(X) \longrightarrow \varprojlim \pi_\circ(\mathrm{Top}(X)). \tag{8.7.6}$$

Montrer que le premier morphisme est un isomorphisme si et seulement si X est homéomorphe à un espace somme d'espaces connexes (ce qui est le cas en particulier si X est localement connexe).

j) Supposons que X soit un schéma quasi-compact. Prouver qu'alors (8.7.6) est bijectif.

k) Établir le « caractère fonctoriel » en X des morphismes (8.7.5) et (8.7.6), en précisant pour commencer le sens de cette expression.

l) (Comparer 7.6 i)). Montrer que les deux conditions suivantes sur le $\mathcal{U}$-topos E sont équivalentes : (i) Le morphisme canonique de E dans le topos ponctuel est « essentiel » (exercice 7.6 a)) i.e. le foncteur $I \mapsto I_E$ de ($\mathcal{U}$-Ens) dans E commute aux produits indexés par des ensembles $\in \mathcal{U}$. (ii) Pour tout objet X de E, le topos induit $E_{/X}$ a un $\pi_\circ(E_{/X})$ qui est un ensemble ordinaire, i.e. X est isomorphe à la somme d'une famille d'objets connexes de E. - On dit alors que E est un *topos localement connexe* (comparer 2.7.5).

Exercice 8.8. — (*Morphismes dominants de topos*).

a) Soit $f : E' \to E$ un morphisme de topos. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :
   (i) $f_*(\phi_{E'}) = \phi_E$ (où $\phi_E, = \phi_{E'}$ désignent les objets initiaux de E, E').
   (ii) Pour tout objet X de E qui est « non vide » i.e. non isomorphe à ϕ_E, $f^*(X)$ est un objet non vide de E'. 430
   (ii′) Comme (ii), avec X un sous-objet de l'objet final e_E de E, i.e. X un ouvert du topos E.

   On dit alors que le morphisme f de topos est *dominant*.
b) Soit $f : X' \to X$ une application continue d'espaces topologiques, d'où un morphisme de topos $\mathrm{Top}(f) : \mathrm{Top}(X') \to \mathrm{Top}(X)$ (4.1). Montrer que $\mathrm{Top}(f)$ est dominant si et seulement si f est dominant, i.e. $f(X')$ est dense dans X.
c) Montrer que si $f : E' \to E$ est un morphisme « conservatif » de topos (6.4.0), i.e. tel que f^* soit fidèle, alors f est dominant. Montrer que le réciproque n'est pas nécessairement vraie, même pour un morphisme de localisation $E_{/U} \to E$, où U est un ouvert du topos E, ((Montrer que dans ce cas f n'est conservatif que si U est l'objet final de E (donc si f est une équivalence de topos), et utiliser l'exemple b).)
d) Soit $f : X' \to X$ une flèche dans un topos E. On dit que f est un *morphisme dominant* dans le topos E si le morphisme correspondant des topos induits $E_{/X'} \to E_{/X}$ (5.5.2) est dominant. Montrer que cette propriété ne dépend que de l'image $f(X')$ de X' dans X, en tant qu'élément de l'ensemble ordonné $\mathrm{ouv}(X)$ des sous-objets de X. Montrer que le morphisme $E_{/X'} \to E_{/X}$ est conservatif si et seulement si f est couvrant.

9. Sous-topos et recollement de topos

431

9.1. Sous-topos et plongement de topos. —

Définition 9.1.1. — a) *Un morphisme de topos $f : F \to E$ est appelé un plongement si le foncteur $f_* : F \to E$ est pleinement fidèle (i.e. si le morphisme d'adjonction $f^*f_* \to \mathrm{id}_F$ est un isomorphisme).*

b) *On appelle sous-topos d'un topos E une sous-catégorie strictement pleine E' de E qui est un topos et tel que le foncteur d'inclusion $\alpha : E' \to E$ soit de la forme i_*, où $i : E' \to E$ est un morphisme de topos (i.e. (3.1.1) α admet un adjoint à gauche i^* qui est exact à gauche). Le morphisme i (qui est déterminé à isomorphisme unique près) est alors appelé le morphisme d'inclusion du sous-topos E' dans E.*

Remarque 9.1.2. — a) Il est clair que le morphisme d'inclusion d'un sous-topos est un plongement, et qu'une sous-catégorie E' du topos E est un sous-topos si et seulement si c'est l'image essentielle d'un foncteur image directe f_* associé à un morphisme de topos $g : F \to E$ qui est un plongement.

b) Il résulte aussitôt des définitions qu'un morphisme de topos $f : F \to E$ est un plongement si et seulement s'il est isomorphe à un morphisme composé

$$F \xrightarrow{g} E' \xrightarrow{i} E,$$

où g est une équivalence de topos et i le morphisme d'inclusion d'un sous-topos E' de E. Ce dernier est déterminé de façon unique par les conditions précédentes, comme l'image essentielle de f_*, et la factorisation précédente est également unique à isomorphisme unique près. Bien entendu, il y a lieu en pratique d'identifier, au moyen de g, F au sous-topos E' de E (comparer 3.4.1).

c) Une équivalence de topos (3.4) $u : E \xrightarrow{\approx} E_1$ définit de façon évidente une bijection entre l'ensemble des sous-topos de E et l'ensemble des sous-topos de E_1. En effet,
432 u_* étant une équivalence de catégories, établit une bijection entre l'ensemble des sous-catégories strictement pleines de E et l'ensemble des sous-catégories strictement pleines de E_1 (à $E' \subset E$ correspondant l'image essentielle E'_1 de $u_*|E'$), et on constate aussitôt que E' est un sous-topos de E si et seulement si E'_1 est un sous-topos de E_1. On peut donc, pour l'étude des sous-topos, se ramener au cas où E est de la forme $\widetilde{C}$, où C est un petit site. Dans ce cas, il résulte de II 5.5 qu'une sous-catégorie strictement pleine E' de E est un sous-topos si et seulement si le foncteur d'inclusion $\alpha : E' \to E$ admet un adjoint à gauche qui est exact à gauche (cela implique donc déjà que E' est un topos), et que l'ensemble de ces sous-topos est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des topologies T' sur C qui sont plus fines que la topologie donnée T de C, en associant à toute telle T' la sous-catégorie strictement pleine $(C, T')^\sim$ de $C^\sim$, formée des faisceaux pour la topologie T'. Ceci montre en même temps, pour *tout* $\mathcal{U}$-topos E : une sous-catégorie strictement pleine E' de E est un sous-topos si et seulement si le foncteur d'inclusion $\alpha : E' \to E$ admet un adjoint à gauche qui est exact à gauche ; *l'ensemble ordonné* $\mathfrak{E}(E)$ *des sous-topos de* E *est* $\mathcal{U}$*-petit, et toute partie de* $\mathfrak{E}(E)$ *admet une borne supérieure et une borne inférieure.*

d) Si E' et E'' sont deux sous-topos du topos E, leur intersection est un sous-topos de E. En effet, comme cette intersection est strictement pleine, on est ramené au cas où E est de la forme $C^\sim$. Avec les notations de c), E' et E'' correspondent alors à deux topologies T', T'' sur C plus fines que T, et il suffit de voir qu'alors $E' \cap E''$ *est la catégorie des faisceaux pour la topologie* T''' *borne supérieure de* T' *de et de* T''. Indiquons la démonstration de ce fait (qui aurait dû figurer en corollaire après II 4.4 ou II 5.5 !). Soit E''' la catégorie des faisceaux pour T''', évidemment contenue dans E' et E'' donc dans $E' \cap E''$. Soit, pour toute sous-catégorie pleine D de E, $t(D)$ la
433 topologie la plus fine parmi celles pour lesquelles les éléments de D sont des faisceaux (II 2.2). Les inclusions $E''' \subset E' \cap E'' \subset E', E''$ impliquent évidemment $t(E'), t(E'') \leq t(E' \cap E'') \leq t(E''')$, d'autre part on a (II 4.4.4) $t(E') = T'$, $t(E'') = T''$, $t(E''') = T'''$, de sorte que les inégalités précédentes et la définition de T''' comme borne supérieure impliquent que $T''' = t(E' \cap E'')$, donc $E' \cap E'' \subset E'''$, C.Q.F.D.

Plus généralement, cet argument montre que si T' est une topologie borne supérieure d'une famille quelconque de topologies (T_i), la catégorie E' des faisceaux pour T' est l'intersection des catégories E_i de faisceaux pour les T_i. On en conclut en particulier :

Proposition 9.1.3. — Soit E un topos. Alors pour toute famille de sous-topos $(E_i)_{i\in I}$ de E, l'intersection $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un sous-topos de E.

Proposition 9.1.4. — *Soient $i : E' \to E$ un plongement de topos, et F un topos. Le foncteur*

(9.1.4.1) $$f \longmapsto i \circ f \ : \mathbf{Homtop}(F, E') \longrightarrow \mathbf{Homtop}(F, E)$$

est pleinement fidèle, et son image essentielle est formée des morphismes de topos $g : F \to E$ tels que l'image essentielle de g_* soit contenue dans celle de i_*.

Considérons en effet le diagramme commutatif évident

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Homtop}(F,E') \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbf{Homtop}(F,E) \arrow[d, hook] \\
\mathbf{Hom}(F,E') \arrow[r] & \mathbf{Hom}(F,E),
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les foncteurs $h \mapsto h_*$, qui sont pleinement fidèles par définition de **Homtop** (3.2). D'autre part la deuxième flèche horizontale $G \mapsto i_*G$ est pleinement fidèle, puisque i_* l'est, donc il en est de même de la première flèche horizontale. Reste à prouver la caractérisation de l'image essentielle de (9.1.4.1). La nécessité de la condition étant évidente par la formule $(if)_* = i_*f_*$, il reste à prouver que si l'image essentielle de g_* est contenue dans celle de i_*, i.e. si on peut écrire $g_* = f_*i_*$, avec $f_* : F \to E'$ un foncteur, alors g est dans l'image essentielle de (9.1.4.1). Il revient au même de dire que f_* admet un adjoint à gauche qui est exact à droite. Or il est clair que f_* admet g^*i_* comme adjoint à gauche, et ce foncteur est exact à gauche, comme composé des foncteurs exacts à gauche g^* et i_*, C.Q.F.D. **434**

Pour une réciproque de 9.1.4, cf. exercice 9.1.6.

Prenant pour F le topos ponctuel (2.2), on déduit en particulier de 9.1.5 :

Corollaire 9.1.5. — *Si $f : E' \to E$ est un morphisme de plongement de topos, le foncteur correspondant*

(9.1.5.1) $$\mathrm{Point}(f) : \mathbf{Point}(E') \longrightarrow \mathbf{Point}(E)$$

est pleinement fidèle.

Exercice 9.1.6. — (*Plongements de topos et 2-monomorphismes*).

Soit $i : E' \to E$ un morphisme de topos.

a) Si F et G sont deux topos *au-dessus de* E', définir (avec les notations de 5.14 a)) un foncteur canonique

(9.1.6.1) $$f \longmapsto f * i : \mathbf{Homtop}_{E'}(F, G) \longrightarrow \mathbf{Homtop}_E(F, G).$$

b) Supposons que i, en tant que 1-flèche de la 2-catégorie des $\mathscr{V}$-$\mathscr{U}$-topos (3.3.2), soit un 2-monomorphisme, i.e. tel que pour tout $\mathscr{U}$-topos F qui soit élément de $\mathscr{V}$, le foncteur (9.1.4.1) soit pleinement fidèle. Montrer que pour tout couple de $\mathscr{U}$-topos F, G (pas nécessairement $\in \mathscr{V}$) le foncteur (9.1.6.1) est pleinement fidèle.

c) Montrer que i est un plongement si et seulement si i est un 2-monomorphime. (Pour la suffisance, appliquer b) à des topos induits $E'_{/X'}$ et $E'_{/Y'}$, et utiliser 5.14 c)).

d) Soit $g : F \to E$ un morphisme de topos, et supposons que le 2-produit fibré (5.11) $F' = F \times^2_E E'$ existe (condition toujours vérifiée, comme l'a montré P. DELIGNE[8]). Soit $j : F' \to F$ le morphisme de projection. Prouver que si i est un plongement, il en est de même de j. (Utiliser c), et noter que la stabilité de la notion de 2-monomorphisme par 2-changement de base est formelle). Dans le cas où E' est un sous-topos de E et $i : E' \to E$ est le morphisme canonique d'inclusion, l'image essentielle de F' par j_*
435 (qui est un sous-topos de F qui ne dépend pas de l'indétermination dans la construction d'un produit 2-fibré) s'appelle le *sous-topos de F image inverse par $g : F \to E$ du sous-topos E' de E.*

e) Avec les notations de la fin de d), choisissons comme produit 2-fibré le sous-topos de F image inverse du sous-topos E' de E. Soit X un objet de F. Montrer que pour que X appartienne à F', il faut qu'il satisfasse la condition suivante : pour tout objet U de F, désignant par $g_U : F_{/U} \to E$ la morphisme de topos induit par f, on a $g_{U*}(X|U) \in \mathrm{Ob}\, E'$, où $X|U = (X \times U \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} U)$ est la « restriction de X à U ». (NB : On peut noter que si $i_U : F_{/U} \to F$ est l'inclusion canonique, on a $g_U = g \circ i_U$, d'où $g_{U*}(X|U) = g_*(i_{U*}(X|U)) = g_*(\mathbf{Hom}(U, X))$ où $\mathbf{Hom}(U, X)$ est l'objet défini dans 10.1 plus bas). *Problème* Réciproquement, la condition précédente sur X est-elle suffisante pour que X appartienne à F' ? Il revient au même de demander si la sous-catégorie strictement pleine de F formée par ces objets X est un *sous-topos* de F

f) Soient X un objet de E, $X' = i^*(X)$, et $i_{/X} : E'_{/X'} \to E_{/X}$ le morphisme de topos induit par i (5.10.1). Montrer que si i est un plongement, il en est de même de $i_{/X}$. (Utiliser d) et 5.11). Réciproquement, si $(X_\alpha)_\alpha$ est une famille d'objets couvrant l'objet final, et si pour tout α, $i_{/X\alpha}$ est un plongement, il en est de même de i.

Exercice 9.1.7. — (*Sous-topos et ensembles multiplicatifs de flèches*).

a) Soient $i : E' \to E$ un morphisme de topos, S l'ensemble des flèches u de E telles que $i^*(u)$ soit un isomorphisme, et considérons le foncteur canonique induit par i^* (cf. [2, Chap I] ou la preuve de VI 6.2) :

$$\rho : E[S^{-1}] \longrightarrow E'. \tag{9.1.7.1}$$

Montrer que i est un plongement si et seulement si le foncteur précédent ρ est une équivalence de catégories, et dans ce cas S admet un calcul des fractions à gauche et un calcul des fractions à droite. (Utiliser [2, Chap 1 1.3]). Dans ce cas, i'image essentielle
436 de i_* se retrouve à partir de S comme formée des $X \in \mathrm{Ob}(E)$ tels que pour tout $u : Y \to Y'$ dans S $\mathrm{Hom}(u, X) : \mathrm{Hom}(Y', X) \to \mathrm{Hom}(Y, X)$ soit bijective.

8. N.D.E. : Voir aussi [16] proposition 4.47.

b) Nous supposons désormais que i est un plongement. Montrer que pour tout topos F, le foncteur

$$f^* \longmapsto f^* i^* : \mathbf{Hom}(E', F) \longrightarrow \mathbf{Hom}(E, F)$$

induit une équivalence entre la catégorie des f^* provenant de morphismes de topos $f : F \to E'$ (i.e. exacts à gauche et admettant un adjoint à droite) et la catégorie des foncteurs $g^* : E \to F$ provenant de morphismes de topos $g : F \to E$, et tels que g^* transforme objets de S en isomorphismes.

c) Soit S une partie de $Fl\ E$, où E est un $\mathcal{U}$-topos. Montrer que S est associé à un sous-topos E' de E par le procédé de a) si et seulement si S satisfait aux conditions suivantes :

ST 1) S contient les flèches inversibles, est stable par composition et par changement de base.

ST 2) Si un composé vu est dans S, alors $u \in S$ si et seulement si $v \in S$.

ST 3) Si $u : X \to Y$ est tel qu'il existe une famille couvrante $Y_i \to Y$, $i \in I$, tel que $u_i : X_i = X \times_Y Y_i \to Y_i$ est dans S pour tout $i \in I$, alors $u \in S$.

Montrer qu'on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre l'ensemble des sous-topos E' de E, et l'ensemble des parties S de $Fl\ E$ satisfaisant aux conditions ST 1), ST 2), ST 3). (S étant donné, lui associer une $\mathcal{U}$-topologie T', plus fine que la topologie canonique T de E, dont les familles couvrantes $(X_i \to X)_{i \in I}$ sont celles pour lesquelles l'inclusion $X' \hookrightarrow X$ de l'image des X_i est $\in S$. Montrer que la catégorie des faisceaux pour T' est équivalente à un sous-topos E' de E, et utiliser II 4.4. pour prouver que celui-ci redonne S.

d) Montrer que S est connu quand on connaît la partie S_0 de S formée des *monomorphismes*. Montrer que l'application $S \mapsto S_0$ établit une bijection entre l'ensemble des parties S de $Fl\ E$ satisfaisant les conditions ST 1) à ST 3) de c), et l'ensemble des parties de $Fl\ E$ formées de monomorphismes et satisfaisant aux mêmes conditions ST 1) 437
à ST 3).

e) Soit $(E'_i)_{i \in I}$ une famille de sous-topos de E, et $(S_i)_{i \in I}$ la famille des parties correspondantes de $Fl\ E$. Montrer que $\bigcap_{i \in I} S_i$ satisfait aux conditions ST 1) à ST 3) de c), donc correspond à un sous-topos E' de E, et que ce dernier est le *sous-topos engendré par les* E_i, i.e. *la borne supérieure* (cf. 9.1.2 c)) des sous-topos E'_i.

f) Soit A une partie de $Fl\ E$. Montrer qu'il existe une plus petite partie S de $Fl\ E$ parmi celles contenant A et satisfaisant aux conditions ST 1) à ST 3), et que S correspond au plus grand sous-topos E' de E tel que la partie multiplicative de $Fl\ E$ correspondante contienne S. Montrer que S est égale à la réunion des parties A_n ($n \geq 0$) de $Fl\ E$, construites par récurrence de la façon suivante : $A_0 = A$, A_{n+1} est formée des flèches $u : X \to Y$ qui sont d'un des trois types suivants (i) à (iv) :

(i) u est inversible, ou le composé de deux flèches de A_n, ou déduit par changement de base d'une flèche de A_n.

(ii) u est l'un des facteurs d'une flèche composées dont l'autre facteur ainsi que le composé sont dans A_n.

(iii) u est une somme d'une petite famille de flèches $\in A_n$.

(iv) Il existe un épimorphisme $Y' \to Y$, tel que $u' = X' = X \times_Y Y' \to Y'$ déduit de u par changement de base soit dans A_n.

g) Avec les notations de e), soient A la réunion des S_i, S la partie de $Fl\ E$ déduite de A par le procédé de f), et E' le sous-topos correspondant de E. Montrer que E' est l'intersection (= borne inférieure) des sous-topos E'_i.

Exercice 9.1.7.2. — (*Factorisation canonique d'un morphisme de topos*).

a) Soit $f : F \longrightarrow E$ un morphisme de topos. Montrer qu'on peut trouver une factorisation de f, à isomorphisme près, en

(9.1.7.3)
$$F \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{i} E,$$

438 où f' est *conservatif* (i.e. (6.4.0) f'^* est conservatif, ou encore fidèle) et où i est un plongement, et que cette factorisation est unique à équivalence près (cf. 9.1.4). Pour ceci, introduire l'ensemble $S_f \subset Fl\ E$ des flèches u de E telles que $f^*(u)$ soit un isomorphisme, prouver que S_f satisfait aux conditions de 9.1.7. c), prendre pour E' le sous-topos correspondant de E, et définir f'^* par (9.1.7.1), qui correspond à un morphisme de topos f' grâce à 9.1.7 b).

b) Le sous-topos de E défini par le plongement i est appelé le sous-topos de E *image du morphisme de topos* f. Montrer que c'est le plus petit des sous-topos E_1 de E tels que f se factorise, à isomorphisme près, à travers E_1, i.e. (9.1.4) le plus petit des sous-topos de E contenant l'image de f_* (ou encore, l'image essentielle de f_*). Pour que f soit un plongement, il faut et il suffit que f induise une équivalence f' de E avec son image ; pour que f soit conservatif, il faut et il suffit que son image soit égale à E tout entier.

c) Supposons que $f = \mathrm{Top}(f_0)$ soit associé à une application continue d'espaces topologiques sobres $f_0 : Y \to X$ (4.1) Considérons la factorisation canonique de f_0 en

$$Y \xrightarrow{f'_0} X' = f_0(Y) \xrightarrow{i_0} X,$$

où i_0 est l'inclusion. Montrer que la factorisation canonique de f s'identifie alors à la factorisation correspondante

$$\mathrm{Top}(Y) \xrightarrow{\mathrm{Top}(f'_0)} \mathrm{Top}(X') \xhookrightarrow{\mathrm{Top}(i_0)} \mathrm{Top}(X).$$

Soit Z le plus petit sous-espace sobre de X contenant $X' = f(Y)$, i.e. l'ensemble des points x de X tels que $\{\overline{x}\} \cap X'$ soit dense dans $\{\overline{x}\}$. (On notera que $Z = X'$ si les points de X sont fermés, ou si X' est une partie *constructible* de X supposé localement noethérien). Alors f est conservatif, i.e. le sous-topos de $E = \mathrm{Top}(X)$ image de $F = \mathrm{Top}(Y)$ par $f = \mathrm{Top}(f_0)$ est égal à E lui-même, si et seulement si $Z = X$, i.e. si et seulement si $f(Y)$ est *très dense* (EGA IV 10.13) dans X. Ceci précise dans quelle mesure il est licite de regarder la notion de morphisme conservatif de topos comme la généralisation naturelle de la notion d'application continue *surjective* d'espaces topologiques.

439 d) Soit

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d] & Y' \arrow[l] \arrow[d] \\ X & X' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien d'espaces topologiques. Si Y et X' sont des espaces discrets, donc Y' discret, alors le diagramme correspondant de topos est 2-cartésien (5.11). (NB. Pour un contre-exemple lorsque l'on ne suppose plus Y, X' discrets, Y, X' étant des sous-espaces de l'espace séparé X, cf. 9.1.10 c)). En déduire un exemple d'un diagramme 2-cartésien de topos

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "f"'] & F' \arrow[l] \arrow[d, "f'"] \\ E & E' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

tel que f soit conservatif, mais f' non conservatif, plus précisément $E' =$ topos ponctuel, $F' =$ topos vide (2.2). (Prendre Y tel que l'image de Y dans X soit très dense et $\neq X$, et prendre X' réduit à un point qui n'est pas dans l'image).

e) Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-topos d'un topos E. Prouver que E est le sup des E_i si et seulement si la famille des morphismes de plongement $E_i \to E$ est conservative (6.4.0).

Exercice 9.1.8. — (*Sous-topos et points de E. Cas des espaces topologiques*).

Soit E un topos.

a) Soit Z une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Point}(E)$ (ou ce qui revient au même : une partie de $\mathrm{Ob}\,\mathbf{Point}(E)$). Montrer que l'ensemble $S(Z)$ des flèches de E qui sont transformées en bijections par les foncteurs fibre correspondants aux $z \in \mathrm{Ob}\,Z$ satisfait aux conditions de 9.1.7. c), et définit donc un sous-topos E_Z de E. Montrer que celui-ci admet suffisamment de points, et que Z est équivalente à une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Point}(E_Z)$. Montrer qu'on peut obtenir par le procédé précédent tout sous-topos E' de E qui admet suffisamment de points. (Prendre pour Z l'image essentielle du foncteur (9.1.5.1.)). Montrer qu'on obtient une bijection entre l'ensemble des sous-topos E' 440
de E admettant suffisamment de points, et un sous-ensemble de l'ensemble des sous-catégories strictement pleines Z de $\mathbf{Point}(E)$ qui sont stables par facteurs directs (I 10.6) et par petites limites projectives filtrantes (cf. 7.3.). (Problème : Quelles sont les sous-catégories de $\mathbf{Point}(E)$ qu'on trouve ainsi ? C'est essentiellement, sous une autre forme, le problème déjà soulevé dans 6.5.3., compte-tenu du dictionnaire 9.1.2 c). Noter qu'en plus des conditions nécessaires signalées à l'instant, il y a aussi des conditions plus subtiles sur la nature topologique de $\mathrm{Point}(E)$, genre, sobriété, cf. e)).

b) Soit $(Z_i)_{i \in I}$ une famille de sous-catégories pleines de $\mathbf{Point}(E)$, et soit Z la sous-catégorie pleine réunion des Z_i. Montrer que le sous-topos correspondant E_Z défini en a) est le sous-topos de E engendré par les E_{Z_i}. (Utiliser 9.1.7. e)). En conclure que le sous-topos de E engendré par une famille de sous-topos ayant suffisamment de points, a également suffisamment de points.

c) Soit $f : E' \to E$ un plongement de topos. Montrer que l'application $U \mapsto f^*(U)$

$$\mathrm{Ouv}(E) \longrightarrow \mathrm{Ouv}(E') \tag{9.1.8.1}$$

est surjective, et en conclure que l'application

$$\mathrm{Point}(E') \longrightarrow \mathrm{Point}(E) \tag{9.1.8.2}$$

induite par f sur les classes d'isomorphie de points induit un homéomorphisme de $\mathrm{Point}(E')$ sur un sous-espace de $\mathrm{Point}(E)$, pour les topologies définies dans 7.8 a). (Pour l'injectivité, utiliser 9.1.5.).

d) Soit $f : X' \to X$ une application continue, d'où un morphisme de topos (4.1)

$$\mathrm{Top}(f) : \mathrm{Top}(X') \longrightarrow \mathrm{Top}(X).$$

Prouver que ce dernier est un plongement si et seulement si la topologie de X' est image inverse par f de celle de X (i.e. , lorsque X' est un espace de Kolmogoroff, par exemple un espace sobre, si et seulement si f induit un homéomorphisme de X' sur
441 un sous-espace de X). (Pour la nécessité, utiliser c), pour la suffisance, 9.1.7.2 c)).

e) Soit X un espace topologique sobre, et $E = \mathrm{Top}(X)$. Utilisant a) et d), établir un isomorphisme d'ensembles ordonnés $X' \mapsto E_{X'}$ entre l'ensemble des sous-espaces sobres X' de X (i.e. , lorsque X est séparé, entre l'ensemble de *toutes* les parties de X et l'ensemble des sous-topos de E ayant suffisamment de points. Montrer que $E_{X'}$ est équivalent à $\mathrm{Top}(X')$. Si $(X'_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces sobres de X, montrer qu'il existe un plus petit sous-espace sobre X' de X contenant les X'_i, égal à la réunion des X'_i si I est fini ou X est séparé, et que $E_{X'}$ est le sous-topos de E engendré par les $E_{X'_i}$. (Utiliser b)).

f) Donner un exemple d'un topos E de la forme $\mathrm{Top}(X)$, et d'un sous-topos E' qui n'a pas suffisamment de points, et même qui est non vide (2.2) sans points. (Prendre E de la forme $\widehat{U}$, $E' = U^{\sim}$, où U est l'ensemble ordonné défini dans 7.4. Ou mieux, prendre l'exemple de 9.1.10 b), qui montre qu'on peut prendre pour X n'importe quel espace compact non vide sans point isolé).

Exercice 9.1.9. — (*Cas des topos définis par un ensemble ordonné*).

a) On utilise le yoga de 7.8 b) et c), donnant un dictionnaire entre, d'une part les topos engendrés par leurs ouverts et les morphismes de tels topos, d'autre part les ensembles ordonnées ayant des Sup quelconques, des Inf finis et où le Inf de deux éléments est distributif par rapport aux Sup quelconques, les morphismes entre de tels ensembles ordonnés étant les applications croissantes commutant aux Inf finis et aux Sup quelconques.

b) Soit E un topos, $f : E' \to E$ un plongement de topos. Montrer que pour toute famille génératrice $(X_i)_{i\in I}$ dans E, la famille $(f^*(X_i))_{i\in I}$ est génératrice. En déduire que si E est engendré par ses ouverts, il en est de même de E' (Utiliser 9.1.8. c)).

c) Soit $f : E' \to E$ un morphisme de topos engendrés par leurs ouverts, associé à un morphisme $g : \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ sur les ensembles ordonnés correspondants. Montrer que f
442 est un plongement si et seulement si g est surjectif, *et* g est surjectif sur les graphes des relations d'ordre, i.e. l'ordre de $\mathcal{O}'$ est quotient de celui de $\mathcal{O}$.

d) Soit E un topos de la forme $\mathcal{O}^{\sim}$ comme dans a). Déduire de b) et c) une correspondance biunivoque entre l'ensemble des sous-topos de E, et l'ensemble des relations d'équivalence R dans $\mathcal{O}$ ayant les propriétés suivantes, analogues aux conditions ST 1) à ST 3) de 9.1.7 c) :

Q0 1) La relation R est compatible avec les Inf finis, ou encore : si U, U' sont équivalents par R, il en est de même de $U \cap V$ et $U' \cap V$ pour tout $V \in \mathcal{O}$.

Q0 2) La relation R est compatible aux Sup quelconques, ou encore : si U_i est équivalent à U'_i pour tout $i \in I$, alors $\operatorname{Sup}_i U_i$ est équivalent à $\operatorname{Sup}_i U'_i$.

Montrer que si des sous-topos $E_i^!$ de E correspondent aux relations d'équivalence R_i, alors le sous-topos engendré par les $E_i^!$ correspond à la relation intersection des R_i.

Exercice 9.1.10. — (*Intersection de sous-espaces ; nouveaux topos sans points ; non existence du complémentaire d'un sous-topos*).

Soient X un espace topologique, $E = \mathrm{Top}(X) = \mathrm{Ouv}(X)^{\sim}$ (2.1).

a) Soit R la relation suivante sur $\mathrm{Ouv}(X)$: $(U, U') \in R \iff U \cap U'$ est dense dans U et dans U'. Montrer que R est une relation d'équivalence satisfaisant les conditions Q0 1) et Q0 2) de 9.1.9 d), et définit donc un sous-topos E' de E. Montrer que pour un point $x \in X$, le point correspondant est dans l'image essentielle de $\mathbf{Point}(E')$ si et seulement si x est *épais* i.e. appartient à l'adhérence de l'intérieur de $\overline{x}$. Montrer que E' est le topos vide (2.2) si et seulement si X est vide.

b) Si X est sobre, montrer que la catégorie $\mathbf{Point}(E')$ est équivalente à la catégorie définie par le sous-ensemble ordonné de X (pour la relation de spécialisation) défini par les points épais de X. Montrer que si les points de X sont fermés (resp. si X est noethérien) alors les points épais de X sont les points isolés de X i.e. tel que $\{x\}$ soit ouvert (resp. sont les points maximaux de X). En conclure que si X est un espace topologique 443 séparé non vide sans points isolés, alors le sous-topos E' de $E = \mathrm{Top}(X)$ est un topos non « vide » qui n'a pas de points.

c) Soit X' une partie de X, et $E_{X'}$ le sous-topos de E associé à X' par le procédé 9.1.8. a). Montrer que si X' est dense, alors $E_{X'}$ contient E'. Montrer que si X est sobre et si X' et X'' sont deux parties sobres de X, leur intersection $X' \cap X''$ est sobre et $E_{X' \cap X''} \subset E_{X'} \cap E_{X''}$, et que l'inclusion peut être stricte [(8)]. (Prendre un espace séparé X non vide admettant deux parties disjointes denses X', X''). Montrer que l'inclusion précédente est une égalité si et seulement si le sous-topos $E_{X'} \cap E_{X''}$ a assez de points. Montrer qu'il en est ainsi si X' ou X'' est une partie *localement fermée* de X.

d) Soit X' une partie de X, et X'' le complémentaire de X'. Un sous-topos F de E contient les $E_{\{x\}}$ pour $x \in X''$ si et seulement si il contient $E_{X''}$ (cf. 9.1.8 b)). En conclure que si X'' est réunion de parties localement fermées de X (par exemple si les points de X'' sont fermés), alors l'ensemble des sous-topos F de E dont l'intersection avec $E_{X'}$ est le sous-topos vide $\mathrm{Top}(\varnothing)$ contient un plus grand élément (qui mérite alors le nom de sous-topos de E *complémentaire faible de* $E_{X'}$ cf. 9.1.13), *que si* $E_{X'} \cap E_{X''}$ est le sous-topos vide (condition qui n'est pas satisfaite si $X \neq \varnothing$ et si X' et X'' sont tous deux denses dans X, X, X', X'' étant sobres, cf. c)). Montrer que lorsque cette condition est en défaut, alors dans l'ensemble ordonné des sous-topos de E, le Inf de deux éléments n'est pas distributif par rapport aux Sup quelconques. (Le rédacteur ignore s'il est distributif par rapport aux Sup finis ; cf. cependant 9.1.11 e) et 9.1.12 d)).

Exercice 9.1.11. — (*Sous-topos des topos localement noethériens. Cas des espaces noethériens*).

a) Soit $f : E' \to E$ un plongement de topos. Montrer que si X est un objet prénoethérien de E (i.e. (VI 1.30) toute suite croissante de sous-objets de x est stationnaire) 444

8. Voir cependant 9.1.11 b) ci-dessous pour le cas X localement noethérien.

alors $X' = f^*(X)$ est un objet prénoethérien de E'. (Introduisant les topos induits $E'_{/X'}$ et $E_{/X}$, et utilisant 9.1.6 e), se ramener d'abord au cas où X est l'objet final e de E, donc X' est l'objet final e' de E'. Noter ensuite que toute suite croissante de sous-objets de e' définit, par application de f_*, une suite croissante de sous-objets de $f_*(e') = e$). En conclure que si E admet une famille génératrice formée d'objets prénoethériens (resp. si E est un topos noethérien, resp. localement noethérien (VI 2.11) alors E' satisfait à la même condition. (Utiliser 9.1.9 b)).

b) Soit E un topos localement noethérien (VI 2.11). Montrer que tout sous-topos de E est de la forme E_Z (9.1.8 a)), pour une sous-catégorie pleine convenable Z de $\mathbf{Point}(E)$. (Utiliser a) et le théorème de Deligne que tout topos localement noethérien admet suffisamment de points). En conclure que si E est de la forme $\mathrm{Top}(X)$, où X est un espace topologique sobre localement noethérien, alors $Z \mapsto E_Z$ est un isomorphisme de l'ensemble ordonné des sous-espaces sobres de X, avec l'ensemble ordonné des sous-topos de X. (Utiliser 9.1.8 e)). L'intersection de sous-espaces sobres Z_i (est nécessairement sobre et) définit l'intersection des sous-topos E_{Z_i} (contrairement à ce qui peut se passer dans le cas général (9.1.10 c)).

c) Soient X un espace sobre localement noethérien, X' une partie de X, X'' son complémentaire. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) X' est constructible.
   (ii) X' et X'' sont sobres.
   (iii) X' est sobre, et le sous-topos $E_{X'} \approxeq \mathrm{Top}(X')$ de $E = \mathrm{Top}(X)$ admet un sous-topos « complémentaire » (cf. 9.1.13.
   (iv) L'intersection des sous-topos $E_{X'} \approx \mathrm{Top}(X')$ et $E_{X''} \approx \mathrm{Top}(X'')$ de $E = \mathrm{Top}(X)$ est le sous-topos « vide » de E.

   Montrer que si E' et E'' sont deux sous-topos de E, ils sont complémentaires faibles si et seulement si ils sont complémentaires (9.1.13).

445 d) Soit X un espace sobre noethérien. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :
   (i) Tout sous-espace sobre X' de X est constructible, i.e. (c)) son complémentaire est sobre.
   (i bis) Pour tout point maximal x de X, $X - \{x\}$ est sobre, i.e. $\{x\}$ est constructible.
   (ii) X est fini.
   (iii) Tout sous-topos de $\mathrm{Top}(X)$ admet un sous-topos complémentaire (cf. 9.1.13).
   (iv) Dans l'ensemble ordonné des sous-topos de $\mathrm{Top}(X)$, le Inf de deux éléments est distributif par rapport aux Sup quelconques.

   (Utiliser l'argument de 9.1.10 d), grâce à la formule d'intersection prouvée en b)).

e) Soit X un espace localement noethérien. Montrer que dans l'ensemble ordonné des sous-topos de $\mathrm{Top}(X)$, le Inf de deux éléments est distributif par rapport aux Sup *finis*. (Se ramener au cas X sobre, et utiliser b)).

f) Pour tout sous-espace sobre Z de l'espace sobre localement noethérien X, soit T_Z la topologie sur la catégorie $\mathrm{Ouv}(X)$ des ouverts de X pour laquelle une famille d'inclusions $U_i \to U$ est couvrante si et seulement si on a $U \cap Z = \bigcup_i U_i \cap Z$. Montrer que $Z \mapsto T_Z$ établit une bijection (renversant les relations d'inclusion) entre l'ensemble des sous-espaces sobres Z de X, et l'ensemble des topologies sur $\mathrm{Ouv}(X)$ plus fines que la topologie canonique T_X. (Utiliser b) et 9.1.2 c)).

g) Soit X un espace topologique sobre. Une partie X' de X est sobre si et seulement si son complémentaire est réunion de parties localement fermées ; si X est localement noethérien, cela signifie aussi que X' est « proconstructible » (EGA IV 1.9.4). Montrer qu'il existe sur X une topologie $T_{\mathrm{cons}'}$, de telle façon que les parties fermées de $X_{\mathrm{cons}'} = (X, T_{\mathrm{cons}'})$ soient les parties sobres de X. Supposons désormais X localement noethérien, $X_{\mathrm{cons}'}$ n'est donc autre que l'espace X_{cons} de EGA IV 9.1.13. Déduire 446
alors de b) et c) que l'ensemble ordonné Σ des sous-topos de $\mathrm{Top}(X)$ est isomorphe à l'ensemble ordonné des parties fermées de X_{cons}, et dans cette correspondance, les sous-topos admettant un complémentaire correspondent aux parties à la fois ouvertes et fermées de X_{cons}. Montrer que X_{cons} est localement compact, et qu'il est compact si et seulement si X est noethérien i.e. le topos $\mathrm{Top}(X)$ est noethérien.

h) Soit E un topos localement noethérien. Supposons qu'il ait la propriété envisagée dans 9.1.14 b) (condition peut-être toujours remplie...). Montrer que les images essentielles des foncteurs canoniques $\mathbf{Point}(E') \to \mathbf{Point}(E)$, où E' parcourt l'ensemble Σ des sous-topos de E, définissent dans l'ensemble $X = \mathrm{Point}(E)$ des classes d'isomorphie de points de E un ensemble de parties, qui est l'ensemble des parties fermées pour une *topologie* T_{cons} *sur* X, et qu'on obtient de cette façon un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble Σ des sous-topos de E et l'ensemble des parties fermées de X_{cons}. En conclure que dans Σ, le Sup de deux éléments est distributif par rapport aux Inf *quelconques*. Montrer que X_{cons}, qui n'est pas nécessairement $\mathscr{U}$-petit, a un espace sobre associé (4.2.1) qui est $\mathscr{U}$-petit.

Exercice 9.1.12. — (*Topos finis*). Un topos E est dit *fini* s'il est équivalent à un topos de la forme $\widehat{C}$, avec C une catégorie finie.

a) (Dictionnaire). Soit $\mathscr{V}$ un univers tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{V}$. Soit (Karfiness) la 2-catégorie définie comme 2-sous-catégorie pleine de la catégorie $(\mathrm{Cat})_{\mathscr{V}}$, formée des catégories éléments de $\mathscr{V}$, qui sont *Karoubiennes et équivalentes à une catégorie finie* et (Topfin) la 2-catégorie définie comme la 2-sous-catégorie pleine de ($\mathscr{V}$-$\mathscr{U}$- Top) (3.3.1) formée des $\mathscr{U}$-topos *finis* qui sont $\in \mathscr{V}$. Montrer qu'on a des 2-équivalences quasi-inverses l'une de l'autre :

(9.1.12.1) $$C \longmapsto \widehat{C} : (\mathrm{Karfiness}) \longrightarrow (\mathrm{Topfin})$$

(9.1.12.2.) $$E \longmapsto \mathbf{Point}(E) : (\mathrm{Topfin}) \longrightarrow (\mathrm{Karfiness}).$$

(Utiliser 7.6 h), e)).

b) Montrer qu'un topos fini est noethérien VI 2.11. 447

c) Montrer que tout sous-topos d'un topos fini E est un topos fini. Plus précisément, si E est équivalent à $\widehat{C}$, où C est une catégorie karoubienne finie (ou, plus généralement, équivalente à une catégorie finie), montrer qu'on obtient un isomorphisme ordonné entre l'ensemble des sous-topos E' de E et l'ensemble des sous-catégories strictement pleines C' de C qui sont karoubiennes (ou, ce qui revient au même, stables dans C par facteurs directs), en associant à toute C' l'image essentielle de $f_* : \widehat{C}' \to \widehat{C}$, où $f : C' \to C$ est le foncteur d'inclusion. (Utiliser 5.6. pour s'assurer que f_* est pleinement fidèle, et b) et 9.1.11 b) pour le fait que tout sous-topos E' de E s'obtient comme indiqué).

d) Soit E un topos fini. Construire sur l'ensemble fini $X = \mathrm{Point}(E)$ des classes d'isomorphie de points de E une topologie qui en fasse un espace topologique sobre, et telle que l'ensemble ordonné des sous-topos de E soit canoniquement isomorphe à l'ensemble des parties fermées de X. (Prendre la « topologie constructible » $\mathcal{C}_{\mathrm{cons}}$ de X, définie via la relation d'ordre $(x \leq y) \Leftrightarrow$ (x est un facteur direct de y), pour laquelle l'adhérence d'un point x est formée des y tels que $y \leq x$). En particulier l'ensemble Σ des sous-topos de E est fini, et le Inf y est distributif par rapport aux Sup quelconques.

e) Soit C une catégorie équivalente à une catégorie finie. Montrer que pour toute sous-catégorie pleine C' de C, il existe sur C une topologie $T_{C'}$ pour laquelle une famille $(X_i \to X)_{i \in I}$ est couvrante si et seulement si pour tout $Y \in \mathrm{Ob}\, C'$, la famille des applications $\mathrm{Hom}(Y, X_i) \to \mathrm{Hom}(Y, X)$ $(i \in I)$ est surjective. Montrer que la catégorie des faisceaux sur $(C, T_{C'})$ est équivalente à $\widehat{C}'$, et que $C' \mapsto T_{C'}$ est une bijection (renversant les relations d'ordre) entre l'ensemble des sous-catégories strictement pleines C' de C qui sont karoubiennes (ou, ce qui revient au même, stables dans C par facteurs directs), et l'ensemble des topologies (II 1.1) sur la catégorie C. (Utiliser c) et 9.1.2
448 c)). En particulier, si C est un site dont la catégorie sous-jacente est équivalente à une catégorie finie, alors le topos $C^{\sim}$ est un topos fini.

f) Soit $f : C' \to C$ un foncteur de $\mathcal{U}$-catégories, avec C équivalente à une catégorie finie. Montrer que le morphisme de topos $\hat{f} : \widehat{C}' \to \widehat{C}$ (4.6) est conservatif si et seulement si tout objet de C est isomorphe à un facteur direct d'un objet dans l'image de f. (Se ramener au cas où f est une inclusion $f : C' \hookrightarrow C$, avec C' comme dans c)).

g) Soit C la catégorie ayant deux objets e (l'objet final) et a, et, en plus des flèches identiques, trois flèches $f : a \to e$, $g : e \to a$, $p = gf$ (donc $p^2 = p$). Montrer que $E = \widehat{C}$ a, en plus des sous-topos E et $\mathrm{Top}(\varnothing)$, exactement un sous-topos E', savoir $E' = \widehat{\{e\}}$; par suite, pour tout sous-topos E'' de E, $E'' \neq \mathrm{Top}(\varnothing)$, on a $E' \cap E'' \neq \mathrm{Top}(\varnothing)$.

Exercice 9.1.13. — (*Sous-topos complémentaires d'un topos*).

Soient E un topos, E' et E'' deux sous-topos. On dit que E' et E'' sont *complémentaires* l'un de l'autre si $E' \cap E'' = \mathrm{Top}(\varnothing)$, $E' \vee E'' = E$ (où le signe $\vee$ désigne le Sup dans l'ensemble ordonné des sous-topos de E).

On supposera que dans l'ensemble Σ des sous-topos de E, le Inf de deux éléments est distributif par rapport au Sup fini.

a) Si E' et E'' sont complémentaires, E'' est le plus grand parmi les sous-topos E''_1 de tels que $E' \cap E''_1 = \mathrm{Top}(\varnothing)$ (i.e. E'' est un complémentaire faible de E', dans la terminologie de 9.1.10 d)).

b) Montrer que les conditions suivantes sur E sont équivalentes :
   (i) Si E' et E'' sont deux sous-topos de E tels que E'' soit un complémentaire faible de E', alors E'' est un complémentaire de E'.
   (ii) Pour tout sous-topos E' de E tel que $E' \neq E$, il existe un sous-topos E'' de E tel que $E'' \neq \mathrm{Top}(\varnothing)$ et $E' \cap E'' = \mathrm{Top}(\varnothing)$.
   (i bis) Si E' et E'' sont deux sous-topos de E tels que E'' soit maximal dans l'ensemble des sous-topos E''_1 tels que $E' \cap E''_1 = \mathrm{Top}(\varnothing)$, alors E'' est un complémentaire de E.

449 Montrer que même si E est un topos fini (9.1.12), ces conditions ne sont pas néces-

sairement vérifiées (9.1.12 g)). Elles le sont cependant si E est de la forme $\mathrm{Top}(X)$, X un espace localement noethérien. (Utiliser 9.1.11 b)).

c) Un sous-topos E' de E est appelé *complémenté* s'il admet un complémentaire (comparer 9.1.12 c)). Prouver que l'ensemble des sous-topos complémentés est stable par Inf et Sup finis, et par complémentarité, et que cette dernière transforme Inf en Sup, Sup en Inf.

d) Énoncer les duales des observations a), b), c) (qui étaient en fait des énoncés généraux triviaux sur un ensemble ordonné abstrait Σ ; noter que l'hypothèse faite sur Σ est en fait autoduale).

9.1.14. — *Questions ouvertes*[9]. Soit E un topos.

a) Dans l'ensemble des sous-topos de E, le Inf de deux éléments est-il distributif par rapport aux Sup finis ?

b) Soient E', E'' deux sous-topos de E tels que $E = E' \vee E''$. Alors est-il vrai que tout point de E est isomorphe à l'image d'un point de E' ou d'un point de E'' ?

On notera que si la réponse à b) est affirmative pour E et tout ses sous-topos, alors la réponse à a) est affirmative du moins pour le cas de sous-topos ayant suffisamment de points (donc pour tous les sous-topos, si E est localement noethérien (9.1.11 b)). La réponse à a) (et, à fortiori à b)), n'est pas connue cependant pour tous les topos noethériens. Cependant la réponse à a) et b) est affirmative si E est de la forme $\mathrm{Top}(X)$, X est un espace localement noethérien (9.1.11), ou si E est un topos fini (9.1.12).

On notera que a) peut se reformuler sous la forme suivante (appliquée à tous les sous-topos F de E) :

a′) Si E' et E'' sont deux sous-topos d'un topos F, tels que le morphisme canonique (cf. 8.7 b))

$$E' \amalg E'' \longrightarrow F \tag{9.1.14.1}$$

soit conservatif (ce qui signifie aussi $E = E' \vee E''$ (9.1.7.2 e)), alors il en est de même pour le morphisme déduit par 2-changement de base $F_1 \hookrightarrow F$, où F_1 est un sous-topos 450
de F.

On a une reformulation analogue b′) de b), en prenant un changement de base $F_1 \to F$ par un topos *ponctuel* F_1 (2.2). On voit donc qu'une réponse affirmative à a), b) résulterait d'une réponse affirmative à la question suivante (où on prend pour F n'importe quel sous-topos de E) :

c) Si E' et E'' sont deux sous-topos du topos F, dont le Sup soit F i.e. tel que le morphisme de topos (9.1.14.1) soit conservatif, alors ce morphisme est-il même *universellement conservatif*, i.e. reste-t-il conservatif après tout 2-changement de base $F_1 \to F$?

Cet énoncé a un sens, grâce au résultat de Deligne (voir [16] proposition 4.47) affirmant l'existence des 2-produits-fibrés de topos. Voir cependant l'exemple 9.1.7.2 d).

D'autre part, on voit par 9.1.11 h) qu'une réponse affirmative à b) fournirait dans le cas localement noethérien une réponse affirmative à la question suivante :

9. N.D.E. : Des réponses positives aux questions a) et d) ont été apportées dans [17].

d) Dans l'ensemble ordonné Σ des sous-topos de E, le Inf de deux éléments est-il distributif par rapport aux Sup *quelconques* (pas nécessairement finis) ?

Cela signifie aussi que Σ s'interprète comme l'ensemble ordonné des « sous-topos fermés » d'un topos convenable $E_{\mathrm{cons}'}$ (savoir $\Sigma^{0\sim}$, où l'ensemble ordonné opposé Σ^0 de Σ, considéré comme une catégorie, est munie de sa topologie canonique, cf. 7.8 b)), qui est engendré par les sous-objets de l'objet final, donc est très proche d'un espace topologique ordinaire. Il resterait à étudier ce topos $E_{\mathrm{cons}'}$, en s'inspirant des exemples 9.1.11 g) et 9.1.12 d), et notamment à déterminer s'il est noethérien si E l'est, ce qui revient à la question suivante pour les sous-topos F de E, qui a un sens indépendamment de d) :

e) Soient F un topos noethérien, $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-topos de E dont l'intersection soit Top(∅). Alors existe-t-il une sous-famille finie ayant la même propriété ?

451 Dans un ordre d'idées assez différent, rappelons également la question soulevée dans (9.1.6 e)), qui mériterait d'être éclaircie.

9.2. Cas des sous-topos ouverts. —

9.2.1. — Soit U un ouvert d'un topos E, i.e. un sous objet de l'objet final e de E (8.3). Considérons le morphisme de localisation (5.2)

$$j : E_{/U} \longrightarrow E. \tag{9.2.2}$$

Comme $U \to e$ est ici un monomorphisme, le foncteur $j_!$ (qui s'interprète comme le foncteur oubli) est pleinement fidèle, donc son biadjoint j_* l'est également (I 5.7). En d'autres termes, *le morphisme de localisation* j (9.2.2) *associé à un ouvert* U *du topos* E *est un plongement de topos* (9.1.1 a)).

Un plongement de topos $F \to E$ est appelé un *plongement ouvert* s'il est isomorphe au plongement de topos défini par un ouvert U de E. Un sous-topos E' (9.1.1 b)) de E est appelé un *sous-topos ouvert* s'il est défini à l'aide d'un ouvert de E, i.e. si le morphisme d'inclusion canonique $E' \to E$ est un plongement ouvert. On notera que l'ouvert U de E associé à un plongement ouvert de topos $j : E' \to E$ est déterminé de façon unique comme égal au sous-objet $j_!(e')$ de e, où e' désigne l'objet final de E'. Par suite, on trouve une correspondance biunivoque entre ouverts U de E et sous-topos ouverts de E.

Remarque 9.2.3. — Conformément aux définitions précédentes, le sous-topos ouvert de E associé à l'ouvert U de E est la sous-catégorie strictement pleine de E image essentielle du foncteur image directe

$$j_* : E_{/U} \longrightarrow E$$

On se gardera de confondre cette sous-catégorie de E avec la sous-catégorie strictement pleine, image essentielle de $j_!$, formée des objets X de E tels que le morphisme structural $X \to e$ se factorise par U. Il est clair cependant que ces deux sous-catégories se déterminent mutuellement, et qu'elles sont canoniquement équivalentes. C'est pourquoi certains auteurs ont pu être tentés d'appeler (voire, ont pu appeler) « sous-topos ouvert défini par U » la sous-catégorie strictement pleine image essentielle de $j_!$, dont la description en termes de
452 U est plus simple que celle de l'image essentielle de j_*. Cette terminologie ne présente pas d'inconvénient tant qu'on ne se propose pas d'étudier d'autres sortes de sous-topos que

des sous-topos ouverts. Comme ce n'est pas notre cas, nous ne suivrons pas ici les auteurs sus-mentionnés.

Pour la commodité du lecteur, nous allons résumer les propriétés spéciales les plus importantes des plongements ouverts :

Proposition 9.2.4. — *Soit*

$$j : \mathcal{U} \longrightarrow E$$

un plongement ouvert de topos (9.2.1). *Alors le foncteur $j_!$ adjoint à gauche de j^* existe, de sorte qu'on a une suite de trois foncteurs adjoints*

$$j_!, \quad j^*, \quad j_* :$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[rr, shift left=4, "j_!"] \arrow[rr, shift right=4, "j_*"'] & & E \arrow[ll, "j^*"'] \end{tikzcd}$$

De plus :

a) *Le foncteur $j_!$ et le foncteur j_* sont pleinement fidèles.*
b) *Le foncteur $j_!$ commute aux produits fibrés, aux produits indexés par des petits ensembles $I \neq \phi$, et aux limites projectives relatives à de petites catégories d'indices co-filtrantes (I 2.7).*
c) *Pour tout objet X de E, le morphisme d'adjonction*

$$j_! j^*(X) \longrightarrow X$$

est un monomorphisme.

Démonstration. On peut supposer que j est le morphisme de localisation défini par un ouvert U de E. Alors a) est mis pour mémoire, b) provient de l'interprétation de $j_!$ comme un foncteur oubli et du fait que $U \to e$ est un monomorphisme. Enfin c) est immédiat en notant que la morphisme envisagé n'est autre que le morphisme déduit de l'inclusion $U \to e$ par le changement de base $X \to e$, compte tenu que par changement de base un monomorphisme est transformé en monomorphisme.

Remarque 9.2.4.1. — On peut trouver des plongements de topos $j : E' \to E$ tels que $j_!$ existe, mais que $j_!$ ne commute pas aux produits de deux objets, ni aux limites projectives cofiltrantes (exercice 9.5.9 c)).

9.2.5. — Soit maintenant 453

$$g : E' \longrightarrow E$$

un morphisme de topos quelconque, et soit $U' = g^*(U)$ l'image inverse de l'ouvert U de E. On a vu dans 5.11 que le diagramme de topos

$$\begin{tikzcd} E'/_{U'} \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "g_U"'] & E' \arrow[d, "g"] \\ E/_U \arrow[r, "j"] & E \end{tikzcd}$$

est 2-cartésien. On en conclut en particulier que l'image inverse par g d'un sous-topos ouvert de E (cf. 9.1.6 d)) est un sous-topos ouvert de E', ou ce qui revient au même, que la notion de plongement ouvert de topos (9.2.1) est stable par 2-changements de base dans la 2-catégorie des $\mathscr{U}$-topos (éléments d'un univers donné $\mathscr{V}$).

Notons aussi que pour que le morphisme de topos $g : E' \to E$ se factorise, à isomorphisme près, par $j : E_{/U} \to E$, il faut et il suffit évidemment que $j' : E'_{/U'} \to E'$ soit une équivalence de catégories, ce qui signifie encore que l'inclusion $U' \hookrightarrow e'$ (= objet final de E') est un isomorphisme. Ceci précise donc 9.1.4, en caractérisant de façon simple l'image essentielle du foncteur envisagé dans *loc. cit.*

9.2.6. — Appliquons 9.2.5 au cas où E' est de la forme $E_{/V}$, où V est un deuxième ouvert de E, g étant le morphisme de localisation. Alors $U' = U \cap V$, et on trouve que le produit 2-cartésien de $E_{/U}$ et $E_{/V}$ sur E s'identifie à $E_{/U\cap V}$. On en conclut *qu'une intersection finie de sous-topos ouverts de E est un sous-topos ouvert de E*, plus précisément l'application (9.2.6.1)

$$U \longmapsto \text{ sous-topos de } E \text{ défini par } U$$

commute aux intersections finies.

Exercice 9.2.7. — Prouver que l'application (9.2.6.1) commute également aux Sup *quelconques.* (Utiliser 9.1.7.2 e)).

454

9.3. Construction du sous-topos fermé complémentaire d'un sous-topos ouvert. —

9.3.1. — Soient T un espace topologique, et U un ouvert de T, de sorte que $\mathrm{Top}(U)$ s'identifie à un sous-topos ouvert de $\mathrm{Top}(\mathsf{T})$ (notations de 2.1). Soit Y le sous-espace topologique fermé de T complémentaire de U. On peut alors, (à équivalence près) considérer $\mathrm{Top}(Y)$ comme un sous-topos de $\mathrm{Top}(\mathsf{T})$, savoir le sous-topos formé des objets F de $\mathrm{Top}(\mathsf{T})$ dont la restriction à U est l'objet final de U. Cette description d'une sous-catégorie de $E = \mathrm{Top}(\mathsf{T})$ garde un sens chaque fois qu'on a un topos et un ouvert U de celui-ci, et on verra qu'elle fournit toujours un sous-topos de E. De plus, il est immédiat dans le cas particulier envisagé d'abord (et avec la terminologie introduite dans l'exercice 9.1.13) que $\mathrm{Top}(Y)$ et $\mathrm{Top}(U)$ sont des sous-topos complémentaires l'un de l'autre (utiliser 9.2.5 et 9.1.7.2 e)). Il en sera encore de même dans le cas général, et nous verrons que cette propriété caractérise de façon unique le sous-topos envisagé. Il mérite donc à tous points de vue, le nom de sous-topos fermé complémentaire de l'ouvert envisagé U, ou du sous-topos ouvert défini par U. Le détail de la construction de ce topos $\mathcal{F}$, et du foncteur image inverse $i^* : E \to \mathcal{F}$, sera donné dans la présente section, tandis que la section 9.4 en développera les premières propriétés.

9.3.2. — Soient donc, comme dans 9.2.1, E un topos, U un ouvert de E, et considérons le morphisme de localisation

$$j : \mathcal{U} = E_{/U} \longrightarrow E, \tag{9.3.2.1}$$

qui est un plongement ouvert.

Pour tout objet X de E, posons

$$X_{\complement U} = U \coprod_{U \times X} X, \tag{9.3.2.2}$$

où l'amalgamation est faite pour les projections canoniques

$$\mathrm{pr}_1 : U \times X \longrightarrow U, \quad \mathrm{pr}_2 : U \times X \longrightarrow X$$

On a donc un diagramme *cocartésien* (I 10) dans E, dépendant fonctoriellement de X : 455

$$\begin{tikzcd} U \times X \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & X \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X_{\complement U} \end{tikzcd} \tag{9.3.2.3}$$

On notera que dans l'exemple envisagé dans 9.3.1, $X_{\complement U}$ est canoniquement isomorphe à $i_* i^*(X)$ (où $i : Y \to T$ est l'inclusion), et $X \to X_{\complement U}$ s'identifie au morphisme d'adjonction.

Proposition 9.3.3. — *Avec les notations précédentes, on a ce qui suit :*

a) *Pour tout objet X de E, les conditions suivantes sont équivalentes :*
   (i) *Il existe un objet Y de E et un isomorphisme $X \simeq Y_{\complement U}$.*
   (ii) *Le morphisme canonique $X \xrightarrow{m} X_{\complement U}$ est un isomorphisme.*
   (iii) *Le morphisme canonique $\mathrm{pr}_2 : X \times U \to U$ est un isomorphisme (i.e. $j^*(X)$ est un objet final de $E_{/U}$).*

b) *Pour tout morphisme*

$$m : E \longrightarrow X'$$

dans E, les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i′) *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "m"] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ X_{\complement U} \arrow[r] & X'_{\complement U} \end{tikzcd}$$

   est cartésien.
   (ii′) *Le morphisme $m \times \mathrm{id}_U : X \times U \to X' \times U$ est un isomorphisme, i.e. $j^*(m)$ est un isomorphisme.*

c) *le foncteur*

$$X \longrightarrow X_{\complement U}$$

de E dans E est exact à gauche, transforme les familles épimorphiques en familles épi-
456 *morphiques, commute aux limites inductives filtrantes et aux sommes amalgamées.*

Démonstration. On démontre d'abord la proposition dans le cas où E est de la forme $\widehat{C}$, où C est une petite catégorie, et pour cela on est ramené par I.3.1 au cas où E est le topos « ponctuel » (Ens), où la proposition est évidente. On passe de là au cas général par les procédés standard de II 4, par utilisation du foncteur « faisceau associé ».

Proposition 9.3.4. — *Avec les notations de* 9.3.2, *la sous-catégorie strictement pleine $\mathcal{F}$ de E définie par les sous-objets X de E tels que $j^*(X)$ soit un objet final de $\mathcal{U}$* (cf. 9.3.3 a)) *est un sous-topos de E, i.e.* (9.1.1)) *c'est un topos, et le foncteur d'inclusion $i_* : \mathcal{F} \to E$ est le foncteur image directe par un morphisme de topos $i : \mathcal{F} \to E$, dont le foncteur image réciproque est le foncteur $X \mapsto i^*X = X_{\complement U}$. Le morphisme d'adjonction $X \to i^*i_*X$ est le morphisme canonique $X \to X_{\complement U}$ de* (9.3.2.3)

Démonstration : Pour tout objet X de E, désignons par $u(X)$ le morphisme canonique $X \to X_{\complement U}$. Le morphisme $u(X)$ est fonctoriel en X et pour tout objet X, $u(X_{\complement U})$ est un isomorphisme. Il résulte alors formellement et trivialement de ces deux propriétés que le foncteur i^* est adjoint à gauche au foncteur i_* et que le morphisme d'adjonction est $u(X)$. Comme le foncteur $X \to X_{\complement U}$ est exact à gauche, le foncteur i^* est exact à gauche. Il résulte alors de II 5.5 que $\mathcal{F}$ est un topos, et de la définition 3.1 que le couple (i^*, i_*) est un morphisme de topos.

9.3.5. — Le sous-topos $\mathcal{F}$ de E décrit dans 9.3.4 est appelé le *sous-topos fermé de E complémentaire de l'ouvert U de E,* ou (au choix) du sous-topos ouvert de E correspondant à U. Conformément à 9.1.1 b), le morphisme $i : \mathcal{F} \to E$ construit dans 9.3.4 est appelé le *morphisme d'inclusion.* Une sous-catégorie pleine $\mathcal{F}$ de E est appelé un *sous-topos fermé* de E s'il existe un ouvert U de E tel que $\mathcal{F}$ soit le sous-topos fermé complémentaire de U. On notera que cet U est déterminé de façon unique comme $i_*(\phi_{\mathcal{F}})$, où $\phi_{\mathcal{F}}$ est l'objet initial de
457 $\mathcal{F}$, égal à $i^*(\phi_E)$; on l'appelle aussi *l'ouvert de E complémentaire du sous-topos fermé $\mathcal{F}$* et le sous-topos de E défini par U s'appelle aussi le *sous-topos ouvert de E complémentaire de $\mathcal{F}$.* Enfin, un plongement de topos (9.1.1 a)) $i : F \to E$ est dit *plongement fermé* si le sous-topos correspondant de E est fermé.

Si G est un Groupe sur E, $s \in \mathrm{Hom}(e_E, G)$, on appelle *support* de G (resp. de s) le sous-topos fermé de E complémentaire de l'ouvert cosupport de G (resp. s) (8.5.1, 8.5.2).

9.3.6. — Avec les notations de 9.3.2 et 9.3.4 on trouve donc deux morphismes de topos

$$\mathcal{U} \xrightarrow{j} E \xleftarrow{i} \mathcal{F}, \tag{9.3.6.1}$$

définissant cinq foncteurs formant deux suites de foncteurs adjoints $(j_!, j^*, j_*)$ et (i^*, i_*) :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, shift left=2, "j_!"] \arrow[r, shift right=2, "j_*"'] & E \arrow[l, "j^*" description] \arrow[r, shift left, "i^*"] & \mathcal{F}. \arrow[l, shift left, "i_*"] \end{tikzcd} \tag{9.3.6.2}$$

Le foncteur

$$\rho = i_* j^* : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F} \tag{9.3.6.3}$$

est appelé le *foncteur de recollement* relatif à l'ouvert U de E ; plus généralement si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ sont deux topos quelconques, un foncteur $\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ est appelé *foncteur de recollement* s'il est exact à gauche et accessible (I.9.2), ou ce qui revient au même (I 8), s'il admet un pro-adjoint. Les raisons de cette terminologie vont apparaître dans 9.4.1 d) et 9.5.4 ci-dessous.

9.4. Premières propriétés du sous-topos fermé $\mathcal{F}$ et de $i : \mathcal{F} \to E$. —

Proposition 9.4.1. — *Les notations sont celles de 9.3.2 et 9.3.4*

a) *Le foncteur $i_* : \mathcal{F} \to E$ transforme les familles épimorphiques en familles épimorphiques. Il commute à la formation des sommes amalgamées et des limites inductives filtrantes.*
b) *Pour tout objet X de E tel que le morphisme de projection $U \times X \to U$ soit un épimorphisme, le morphisme d'adjonction $X \to i_* i^* X$ est un épimorphisme.*
c) *Le couple de foncteurs (i^*, j^*) de E dans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{U}$ respectivement est conservatif* (I 6.1) **458**
i.e. un morphisme m de E est un isomorphisme si et seulement si $i^*(m)$ et $j^*(m)$ sont des isomorphismes (ceci équivaut à dire que le couple de foncteurs (i^*, j^*) est fidèle (6.4.0)*).*
d) *Le foncteur de recollement $\rho = i^* j_* : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ est un foncteur exact à gauche et accessible* (I 9.2)*, ou ce qui revient au même* (I 8.) *il admet un pro-adjoint σ :* $\mathrm{Pro}\,\mathcal{F} \to \mathrm{Pro}\,\mathcal{U}$.

Démonstration : a) résulte le 9.3.3 c). Pour démontrer b) il suffit de se reporter à la définition (9.3.2.2) de $X_{\complement U}$ compte-tenu de ce que $i_* i^* X = X_{\complement U}$ (9.3.4). L'assertion c) résulte de 9.3.3 b). Les foncteurs i_* et j_* sont exacts à gauche et par suite ρ est exact à gauche. Le foncteur j_* est un foncteur image directe par un morphisme de topos et par suite il est accessible (I 9.5) ; on note qu'un topos est une catégorie accessible (I 9.11.3)). Comme le foncteur i^* commute aux limites inductives (c'est un foncteur image réciproque), le foncteur ρ composé de deux foncteurs accessibles est accessible.

Proposition 9.4.2. — *Soit E' un topos. Alors le foncteur $h \mapsto i \circ h$:*

$$\mathrm{Homtop}(E', \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Homtop}(E', E)$$

est pleinement fidèle, et son image essentielle est formée des morphismes de topos $g : E' \to E$ tels que $g^*(U)$ soit un objet initial $\phi_{E'}$ de E'.

Par 9.1.4, on sait que le foncteur envisagé est pleinement fidèle et que g est dans son image essentielle si et seulement si pour tout objet X' de E', l'objet $g_*(X')$ de E appartient à $\mathcal{F}$, i.e. qu'on a

$$j^*(g_*(X')) \simeq e_{\mathcal{U}} \text{ pour tout } X' \in \mathrm{Ob}\, E'. \tag{*}$$

Or, posons $U' = g^*(U)$, et considérons le diagramme de topos

$$\begin{tikzcd} E'_{/U'} \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "g_U"'] & E' \arrow[d, "g"] \\ E_{/U} \arrow[r, "j"] & E \end{tikzcd} ,$$

459 il est clair qu'on a un isomorphisme canonique

$$j^*(g_*(X')) \simeq g_{U_*}(j'^*(X')),$$

d'autre part il est immédiat aussi que le foncteur j'^* est essentiellement surjectif, donc la condition (**) équivaut à la condition

$$(**) \qquad g_{U*}(Y') \simeq e_{\mathcal{U}} \text{ pour tout } Y' \in \operatorname{Ob} E'_{/U'}.$$

Utilisant la propriété d'adjonction de g_{U*} et g_U^*, on voit aussitôt que cela signifie que $g_U^*(Y)$ est un objet initial de $E'_{/U'}$ pour tout objet Y de $E_{/U}$, ou encore (utilisant que l'objet initial de $E'_{/U'}$ est strict (II 4.5) qu'il en est ainsi pour $Y = e_{\mathcal{U}}$, objet final de $\mathcal{U}$. Mais cela signifie aussi que l'objet final U' de $E'_{/U'}$ est initial, ou, ce qui revient manifestement au même, si et seulement si U' est un objet initial $\phi_{E'}$ de E'. C.Q.F.D.

Corollaire 9.4.3. — *Soient $g : E' \to E$ un morphisme de topos $U' = g^*(U)$, $\mathcal{U}' = E'_{/U'}$ et $\mathcal{F}'$ le sous-topos fermé de E' complémentaire de l'ouvert U', enfin $i' : \mathcal{F}' \to E'$ le morphisme d'inclusion. Alors le morphisme de topos $g \circ i' : \mathcal{F} \to E$ se factorise à isomorphisme près en un morphisme de topos $g_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$, et le diagramme de topos correspondant*

$$(9.4.3.1) \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}' & \xrightarrow{i'} & E' \\ {\scriptstyle g_{\mathcal{F}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{i} & E \end{array}$$

est 2*-cartésien* (cf. 5.11).

Résulte formellement de 9.4.2 et des définitions.

Avec la terminologie introduite dans 9.1.6 d), on peut donc dire, en particulier, que l'image inverse par un morphisme de topos $g : E' \to E$ d'un sous-topos *fermé* $\mathcal{F}$ de E est un sous-topos *fermé* $\mathcal{F}'$ de E' (savoir le sous-topos fermé complémentaire de l'ouvert $U' = g^*(U)$, où U est l'ouvert de E complémentaire de $\mathcal{F}$).

Corollaire 9.4.4. — *Soient E un topos, $\mathcal{U}$ un sous-topos ouvert de E, $\mathcal{F}$ le sous-topos fermé complémentaire.*

460 a) *On a*

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{F} \approxeq \operatorname{Top}(\varnothing) \quad , \quad \mathcal{U} \vee \mathcal{F} = E,$$

où le signe $\vee$ désigne le Sup *dans l'ensemble de tous les sous-topos de E* (9.1.2 c)). *(Avec la terminologie introduite dans* 9.1.13, *$\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ sont des sous-topos de E complémentaires l'un de l'autre).*

b) *$\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{F}$) est le plus-grand parmi les sous-topos E' de E tels que l'on ait $E' \cap \mathcal{F} \approxeq$* $\operatorname{Top}(\varnothing)$ *(resp. $\mathcal{U} \cap E' \approxeq$* $\operatorname{Top}(\varnothing)$*).*

Démonstration.

a) la première relation revient à dire que si E' est un topos et $g : E' \to E$ est un morphisme de topos qui se factorise à isomorphisme près par $\mathcal{U}$ et par $\mathcal{F}$, alors $E' \approxeq \operatorname{Top}(\varnothing)$; or en vertu de 9.2.5 et 9.4.2, l'hypothèse signifie que $g^*(U)$ est à la fois un objet initial et un objet final de E', d'où la conclusion. Pour la deuxième relation, on note que par 9.1.7.2 e) elle équivaut à 9.4.1 c).

b) Supposons que $E' \cap \mathcal{F} \approxeq \mathrm{Top}(\varnothing)$; en vertu de 9.4.3 $E' \cap \mathcal{F}$ est équivalent au sous-topos de E' complémentaire de $g^*(U)$, où $g : E' \to E$ est le morphisme d'inclusion, donc la condition envisagée signifie que $U' = g^*(U)$ est un objet final de E', i.e. (9.2.5) que $E' \subset \mathcal{U}$. Supposons que $\mathcal{U} \cap E' \approxeq \mathrm{Top}(\varnothing)$; en vertu de 5.11 $\mathcal{U} \cap E'$ est équivalent à $E'_{/U'}$, donc la condition envisagée signifie que U' est objet initial de E', i.e. (9.4.2) que $E' \subset \mathcal{F}$.

Corollaire 9.4.5. — *Soit $(\mathcal{F}_i)_{i\in 1}$ une famille de sous-topos fermés du topos E, et pour tout $i \in 1$, soit U_i l'ouvert de E complémentaire de $\mathcal{F}_i$. Alors le sous-topos de E intersection de $\mathcal{F}_i$* (9.1.3) *est un sous-topos fermé, dont l'ouvert complémentaire est $U = \mathrm{Sup}_i U_i$.*

Cela résulte formellement de la propriété universelle de l'intersection comme 2-produit et de 9.4.2, compte tenu que pour un morphisme de topos $g : E' \to E$, $g^*(U) = \mathrm{Sup}_i g^*(U_i)$ est un objet initial si et seulement si les $g^*(U_i)$ le sont.

On prouve de façon analogue :

Corollaire 9.4.6. — *Avec les notations de* 9.4.5 *supposons I fini. Alors le sous-topos de E borne supérieure de $\mathcal{F}_i$* (9.1.2 c)) *est un sous-topos fermé de E, dont l'ouvert complémentaire est égal à $\bigcup_i U_i$.* 461

Exercice 9.4.7. — (*Recollement de sous-topos*). Soit E un topos.

a) Soient E' un sous-topos de E, $(S_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de E recouvrant l'objet final, et pour tout $i \in I$, soit S'_i l'image inverse de S_i dans E', et $E'_i \approxeq E'_{/S'_i}$ le sous-topos de $E_i = E_{/S_i}$ image inverse par le morphisme de localisation $E_i \to E$ du sous-topos E' de E (9.1.6 d) et 5.11). Montrer que pour un objet X de E, X appartient à E' si et seulement si pour tout $i \in I$, l'image inverse $X|S_i$ de X dans E_i appartient à E'_i.

b) Supposons que E soit de la forme $C^\sim$, où C est un $\mathcal{U}$-site. Montrer que le préfaisceau sur C

$$S \mapsto \text{ensemble des sous-topos du topos } (C_{/S})^\sim \approxeq E^\sim_{/\varepsilon(S)}$$

est un faisceau. E étant de nouveau quelconque, en conclure qu'il existe un élément de E qui représente le foncteur

$$S \mapsto \text{ensemble des sous-topos du topos } E_{/S};$$

c) Avec les notations de a), montrer que pour que le sous-topos E' de E soit un sous-topos ouvert (resp. un sous-topos fermé), il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, il en soit de même du sous-topos induit E'_i de E_i.

Exercice 9.4.8. — (*Intérieur, extérieur, adhérence et frontière d'un sous-topos.*) Soient E un topos, E' un sous-topos, $i : E' \to E$ le morphisme d'inclusion.

a) Montrer que $i_*(\phi_{E'})$ est le plus grand ouvert U de E tel que l'on ait $E'|\mathcal{U} \approxeq \mathrm{Top}(\varnothing)$, où $\mathcal{U}$ est le sous-topos ouvert de E défini par U. On appellera cet U, ou $\mathcal{U}$, l'*extérieur* du sous-topos E' de E, et le sous-topos fermé de E complémentaire de U l'*adhérence* de E'.

b) Montrer qu'il existe un plus grand ouvert V de E tel que le sous-topos ouvert correspondant $\mathcal{V}$ de E soit contenu dans E'. (Utiliser 9.2.7) On appellera ce V, ou $\mathcal{V}$, l'*intérieur* du sous-topos E' de E. Les ouverts U et V de E sont disjoints ($U \cap V = \phi_E$) ; le sous-
462 topos fermé de E complémentaire de $\mathrm{Sup}(U, V) = \mathcal{U} \amalg \mathcal{V}$ s'appelle la *frontière* du sous-topos E' de E.

c) Pour que E' soit un sous-topos ouvert (resp. fermé) de E, il faut et il suffit qu'il soit égal à son intérieur (resp. qu'il soit égal à son adhérence). Pour que la frontière de E' soit vide, il faut et il suffit que E' soit un sous-topos ouvert et fermé de E, ou encore, qu'il soit le sous-topos ouvert de E défini par un ouvert V de E qui soit *sommande direct* de l'objet final e, i.e. tel qu'il existe un sous-objet V de e avec $e \simeq U \amalg V$. Pour que l'extérieur de E' soit « vide » i.e. pour que l'adhérence soit égale à E, il faut et il suffit que $i : E' \to E$ soit dominant (8.8).

d) Soient S un objet de E, $F = E_{/S}$ le topos induit, $F' \simeq F_{/S'}$ le sous-topos de F induit par le sous-topos E' de E. Montrer que l'extérieur (resp. l'adhérence, resp. l'intérieur, resp. la frontière) de F' est induit par l'extérieur (resp. ...) de E'.

Exercice 9.4.9. — (*Sous-topos localement fermés d'un topos.*) Un sous-topos F d'un topos E est dit *sous-topos localement fermé* de E s'il est une intersection d'un sous-topos ouvert et d'un sous-topos fermé.

a) Prouver que l'intersection d'une famille finie de sous-topos localement fermés de E est localement fermé. Si $g : E' \to E$ est un morphisme de topos, prouver que l'image inverse (9.1.6 d)) d'un sous-topos localement fermé de E est un sous-topos localement fermé de E'.

b) Soient X un espace topologique, et $E = \mathrm{Top}(X)$. Pour toute partie X' de X, considérons le sous-topos $T(X')$ de E image essentielle de $\mathrm{Top}(X')$ dans $\mathrm{Top}(X)$. Montrer que si X' est une partie localement fermée, $T(X')$ est un sous-topos localement fermé de E, la réciproque étant vraie si on suppose de plus X et X' sobres. Prouver que $X' \mapsto T(X')$ établit un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des parties localement fermées X' de X et l'ensemble des sous-topos localement fermés de E.

463 c) Soit F un sous-topos de E. Monter que tout sous-topos ouvert de F est induit par un sous-topos ouvert de E. (Utiliser 9.1.8 c)). Montrer que F est un sous-topos localement fermé de E si et seulement si c'est un sous-topos ouvert de son adhérence (9.4.8 a)). En conclure, en utilisant 9.4.8 d), que la propriété pour F d'être un sous-topos localement fermé de E est une propriété locale sur E.

d) Soit F un sous-topos localement fermé de E. Montrer que parmi toutes les façons d'écrire F comme un intersection d'un sous-topos ouvert $\mathcal{U}$ et d'un sous-topos fermé $\mathcal{F}$ de E, il en est une avec $\mathcal{U}$ le plus grand possible, et $\mathcal{F}$ le plus petit possible. (Prendre $\mathcal{F}$ = adhérence de F, et $\mathcal{U}$ = plus grand sous-topos ouvert induisant sur $\mathcal{F}$ le sous-topos F.) Compatibilité de la formation de $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ avec la localisation sur E.

Exercice 9.4.10. — Développer la notion de *sous-topos constructible, localement constructible, quasi-constructible, localement quasi-constructible*, sur le modèle des notions familières dans le cas des espaces topologiques (EGA 0_{III} 9.1, EGA IV 10.1). Dans le cas d'un topos de la forme Top(X), on retrouvera une bijection entre l'ensemble des parties constructibles (resp. ...) de X, et l'ensemble des sous-topos constructibles (resp. ...) de Top(X).

9.5. Le théorème de recollement. —

9.5.1. — Soit $f : A \to B$ un foncteur entre deux catégories. Désignons par (B, A, f) la catégorie suivante : les objets de (B, A, f) sont les triples

$$(X, Y, u)$$

où X est un objet de B, Y un objet de A, et u un morphisme de X dans $f(Y)$; les morphismes entre deux objets (X, Y, u) et (X', Y', u') sont les couples (m, m'), où m est un morphisme de X dans X' et m' un morphisme de Y dans Y', tels que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "m"'] & f(Y) \arrow[d, "f(m')"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & f(Y') \end{tikzcd}$$

la composition des morphismes est définie de la manière évidente. 464

9.5.2. — Remarquons que la catégorie (B, A, f) dépend de manière fonctorielle du système des données A, B, f, en un sens que nous laissons au lecteur le soin de préciser. En particulier, si f' est un deuxième foncteur de A dans B, alors tout morphisme de foncteurs

$$f \xrightarrow{u} f'$$

définit un foncteur $(A, B, f) \to (A, B, f')$, qui est un isomorphisme si $u : f \to f'$ l'est.

9.5.3. — Revenons à la situation de 9.3, et considérons la catégorie $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho)$ définie dans 9.5.1. À chaque objet X de E correspond un objet $(i^*X, j^*X, h(X) : i^*X \to \rho j^*X)$ de $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho)$ où $h(X)$ s'obtient en transformant par le foncteur i^* le morphisme d'adjonction $X \to j_*j^*(X)$ (on a $\rho = i^*j_*$ 9.3.6.3). On a donc défini ainsi un foncteur

$$\Phi : E \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho). \tag{9.5.3.1}$$

Théorème 9.5.4. — a) *Soient E un topos, $\mathcal{U}$ un sous-topos ouvert de E, $\mathcal{F}$ le sous-topos fermé complémentaire. Le foncteur*

$$\rho = i^*j_* : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}$$

est exact à gauche et accessible et le foncteur Φ (9.5.3.1) *est une équivalence de catégories.*

b) *Réciproquement, soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ deux topos et $\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ un foncteur de recollement* (9.3.6) *(i.e. accessible* (I 9.2) *et exact à gauche). La catégorie $E = (\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho)$ est un topos. Soient $\phi_{\mathcal{F}}$ un objet initial de $\mathcal{F}$, $e_{\mathcal{U}}$ un objet final de $\mathcal{U}$, et soit $U = (\phi_{\mathcal{F}}, e_{\mathcal{U}}, \phi_{\mathcal{F}} \to \rho(e_{\mathcal{U}})) \in \mathrm{Ob}\, E$. Le foncteur $X \mapsto (\phi_{\mathcal{F}}, X, \phi_{\mathcal{F}} \to \rho(X))$ induit une équivalence de $\mathcal{U}$ sur $E_{/U}$, donc avec le sous-topos ouvert $\mathcal{U}'$ de E défini par U. Le foncteur $Y \mapsto (Y, e, Y \to \rho(e))$ est un plongement fermé* (9.3.5)*, i.e. induit une équivalence de $\mathcal{F}$ avec un sous-topos fermé $\mathcal{F}'$ de E. Les sous-topos $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{F}'$ sont complémentaires. Soit $\rho' : \mathcal{U}' \to \mathcal{F}'$* 465 *le foncteur de recollement. Les foncteurs ρ et ρ' sont compatibles avec les équivalences explicitées ci-dessus.*

Définition 9.5.5. — *Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ deux topos et $\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ un foncteur de recollement* (9.3.6). *Le topos $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho)$ est appelé le topos construit à partir de $\mathcal{U}$ et de $\mathcal{F}$ par recollement à l'aide du foncteur ρ.*

9.5.6. — *Démonstration de* 9.5.4 a) [9] La première assertion n'est qu'un rappel de 9.4.1 d). Le couple de foncteurs (i^*, j^*) est conservatif, ou encore, fidèle (9.4.1 c)). A fortiori le foncteur $\boldsymbol{\Phi}$ est fidèle. Montrons qu'il est pleinement fidèle. Il résulte de 9.3.3 b) que, pour tout objet X de E, le diagramme ci-après est cartésien :

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & j_*j^*X \\ \downarrow & & \downarrow \\ i_*i^*X & \longrightarrow & i_*i^*j_*j^*X; \end{array}$$

Soient alors X et Y deux objets de E, et (m, m') :

$$\begin{array}{ccc} i^*X & \longrightarrow & i^*j_*j^*X \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i^*j_*m'} \\ i^*Y & \longrightarrow & i^*j_*j^*Y; \end{array}$$

un morphisme entre $\boldsymbol{\Phi}(X)$ et $\boldsymbol{\Phi}(Y)$. En utilisant la fonctorialité du produit cartésien et les diagrammes $(*)$, on obtient un morphisme $w : X \to Y$ qui rend commutatif les diagrammes ci-après :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ w\ } & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ j_*j^*X & \xrightarrow{j_*m'} & j_*j^*Y, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ w\ } & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ i_*i^*X & \xrightarrow{i_*m} & i_*i^*Y \end{array}$$

466 En appliquant respectivement les foncteurs j^* et i^* on obtient : $j^*w = m'$, $i^*w = m$. Montrons maintenant que le foncteur $\boldsymbol{\Phi}$ est essentiellement surjectif. Soit $(Y, X, u : Y \to i^*j_*(X))$ un objet de $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, i^*j_*)$. On en déduit un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & j_*X \\ & & \downarrow \\ i_*Y & \xrightarrow{i_*u} & i_*i^*j_*X \end{array}$$

9. Pour un énoncé de recollement plus général que 9.5.5, cf. exercice[10].

D'où, en prenant le produit fibré, un diagramme cartésien :

$$(**)\qquad \begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & j_*X \\ \downarrow & & \downarrow \\ i_*Y & \xrightarrow{i_*u} & i_*i^*j_*X \end{array}$$

Nous laissons au lecteur, le soin de montrer que $\Phi(W)$ est isomorphe à $(Y, X, u : Y \to i^*j_*(X))$ et que le diagramme $(**)$ est isomorphe au diagramme $(*)$ relatif à W.

9.5.7. — *Démonstration* de 9.5.4 b). Nous nous bornerons à montrer que $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho)$ est un topos. La démonstration des autres assertions est laissée au lecteur. Vérifions les propriétés a), b), c), d) de 1.1.2.

a) *Les limites projectives finies sont représentables* : Clair car les catégories $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ sont des topos et ρ commute aux limites projectives finies.

b) *Les sommes directes sont représentables, disjointes et universelles* : Soit $(Y_i \xrightarrow{u_i} \rho(X_i))$, $i \in I$, une famille d'objets de $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho)$. Par définition des limites inductives, on a un morphisme canonique

$$\coprod_{i\in I} \rho(X_i) \longrightarrow \rho(\coprod_{i\in I} X_i)$$

d'où, en composant avec le morphisme $\coprod u_i$, un morphisme 467

$$n : \coprod_{i\in 1} Y_i \longrightarrow (\coprod_{i\in I} X_i).$$

On vérifie immédiatement que ce dernier objet est la somme directe de la famille considérée, et que cette somme directe est disjointe et universelle.

c) *Les relations d'équivalence sont effectives et universelles* :

Soit

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \rightrightarrows & Y \\ \downarrow & & \downarrow w \\ \rho(R_2) & \overset{f(u)}{\underset{f(v)}{\rightrightarrows}} & \rho(X) \end{array}$$

une relation d'équivalence sur l'objet $Y \xrightarrow{w} \rho(X)$. La relation $R_1 \rightrightarrows Y$ est alors une relation d'équivalence sur Y dans $\mathcal{F}$, et la relation $R_2 \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} X$ est un relation d'équivalence sur X dans $\mathcal{U}$. Les quotients Y/R_1, $\rho(X)/\rho(R_2)$, X/R_2 sont représentables dans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{U}$ car ces catégories sont des topos. De plus, par définition des limites inductives, le morphisme canonique $\rho(X) \to \rho(X/R_2)$ se factorise par $\rho(X)/\rho(R_2)$. On en déduit, par la fonctorialité des limites inductives, un morphisme canonique $Y/R_1 \xrightarrow{t} \rho(X/R_2)$. On vérifie que ce dernier objet est le quotient de $Y \xrightarrow{w} \rho(X)$ par la relation d'équivalence considérée, que ce quotient est effectif (I 10) et que toutes ces propriétés sont conservées par changement de base.

d) $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho)$ *admet une petite famille génératrice.* Cette propriété résulte de I 9.25 (compte tenu de ce que ρ est accessible), en prenant $B = \Delta_1 = (0 \xrightarrow{f} 1)$, $E_0 = \mathcal{F}$, $E_1 = \mathcal{U}$, $f^* = \rho : E_1 \to E_0$, d'où $\mathbf{Hom}_B(B, E) = (\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho)$.

On peut aussi éviter le recours à I 9.25 (dont la démonstration donnée était assez pénible !) et utiliser l'hypothèse sur ρ sous la forme que ρ admet un pro-adjoint

$$\sigma \,:\, \mathrm{Pro}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Pro}(\mathcal{U}),$$

468 (cette interprétation (I 8) reposant sur (I 9), dont la démonstration est nettement plus compréhensible). Il suffit alors de noter que si C' (resp. C'') est une sous-catégorie génératrice de $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{F}$), et si pour tout $X'' \in \mathrm{Ob}\, C''$, on représente $\sigma(X'')$ sous forme d'un système projectif $(\sigma(X'')_i)_{i \in I(X')}$, où $I(X')$ est un petit ensemble ordonné filtrant, alors la famille des objets de E qui sont, soit de la forme $(\phi_{\mathcal{F}}, X', \phi_{\mathcal{F}} \to \phi(X'))$ avec $X' \in \mathrm{Ob}\, C'$, soit de la forme $(X'', \sigma(X'')_i, u_{X''} \,:\, X'' \to \rho(\sigma(X'')_i)$, où $X'' \in \mathrm{Ob}\, C''$, $i \in I(X'')$, et $u_{X''}$ correspond par adjonction au morphisme canonique $\sigma(X'') \to \sigma(X'')_i$, –est une famille génératrice (évidemment petite) si C', C'' sont choisis petits. La vérification de ce fait est effectivement immédiate, et laissée au lecteur.

9.5.4.8. — Utilisons les notations de 9.5.7 b), et montrons comment on peut expliciter, à isomorphismes canoniques près de foncteurs, le système de foncteurs (9.3.6.2), où on fait $E = (\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho)$. Le détail des vérifications des assertions ci-dessous (essentiellement mécaniques à l'aide de 9.5.4) est laissé au lecteur.

9.5.8.1. — Le foncteur

$$i^* \,:\, (\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho) \longrightarrow \mathcal{F}$$

est donné par

$$i^*(X, Y, u \,:\, X \longmapsto \rho(Y)) = X.$$

9.5.8.2. — Le foncteur

$$i_* \,:\, \mathcal{F} \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho)$$

est donné par $i_*(X) = (X, e, X \to \rho(e))$ (e = objet final de $\mathcal{U}$).

9.5.8.3. — Le morphisme d'adjonction

$$\mathrm{id} \longrightarrow i_* i^*$$

est isomorphe au morphisme fonctoriel

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "id"'] & \rho(Y) \arrow[d] \\ X \arrow[r] & \rho(e) \end{tikzcd}$$

469 *9.5.8.4.* — Le foncteur

$$j^* \,:\, (\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho) \longrightarrow \mathcal{U}$$

est donné par $\quad j^*(X, Y, u \,:\, X \longrightarrow \rho(Y)) = Y.$

9.5.8.5. — Le foncteur

$$j_! : \mathcal{U} \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho)$$

est donné par $\quad j_!(Y) = (\phi_{\mathcal{F}}, Y, \phi_{\mathcal{F}} \longrightarrow \rho(Y))$
(ϕ objet initial de)

9.5.8.6. — Le foncteur

$$j_* : \mathcal{U} \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho)$$

est donné par $\quad j_*(Y) = (\rho(Y), Y, \mathrm{id} : \rho(Y) \longrightarrow \rho(Y)).$

9.5.8.7. — Le morphisme d'adjonction

$$j_! j^* \longrightarrow \mathrm{id}$$

est isomorphe au morphisme fonctoriel

$$\begin{tikzcd} \phi_{\mathcal{F}} \arrow[r] \arrow[d] & \rho(Y) \arrow[d, "\rho(\mathrm{id})"] \\ X \arrow[r, "u"] & \rho(Y) \end{tikzcd} \quad .$$

9.5.8.8. — Le morphisme d'adjonction

$$\mathrm{id} \longrightarrow j_* j^*$$

est isomorphe aux morphisme fonctoriel

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"'] & \rho(Y) \arrow[d, "\rho(\mathrm{id})"] \\ \rho(Y) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \rho(Y) \end{tikzcd}$$

Exercice 9.5.9. — (*Propriétés d'exactitude d'un topos recollé.*) Soient $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ deux topos, $\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ un foncteur de recollement, $E = (\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho)$ le topos recollé, $j : \mathcal{U} \to E$ et $i : \mathcal{F} \to E$ les morphismes de topos canoniques, de sorte que $\rho = i^* j_*$.

a) Prouver que i^* commute aux (petits) produits (i.e. (1.8 ou I 8) le foncteur i^* admet un adjoint à gauche $i_!$) si et seulement si il en est de même de ρ, i.e. (*loc. cit.*) si et seulement si ρ admet un adjoint à gauche $\sigma : \mathcal{F} \to \mathcal{U}$ (ou encore si et seulement si le proadjoint de ρ restreint à $\mathcal{F}$ (9.6.3) se factorise à isomorphisme près par $\mathcal{U}$) : on a alors 470
$\sigma = j^* i_!$. Donc les foncteurs de recollement ρ ayant cette propriété correspondent à isomorphisme près aux foncteurs $\sigma : \mathcal{F} \to \mathcal{U}$ qui ont un adjoint à droite, i.e. (1.6) qui commutent aux $\mathscr{U}$-limites inductives, ou encore qui sont continus. Lorsque $\mathcal{F}$ est équivalent à un topos $C^\sim$, où C est un $\mathscr{U}$-site, ces foncteurs correspondent donc à isomorphisme près aux foncteurs continus $C \to \mathcal{U}$ (III 1.2 et III 1.7).

b) Supposons que le foncteur $i_!$ soit défini. Montrer que pour que $i_!$ commute à un type déterminé de petites limites projectives, il faut et il suffit que $\sigma : \mathcal{F} \to \mathcal{U}$ y commute. (Pour la nécessité, utiliser que j^* commute aux petites limites projectives ; pour la suffisance, utiliser la description équivalente de E en termes de σ comme formé des triples (Y, X, u) avec $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}$, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$, $u : \sigma(Y) \to X$.)

c) Déduire de a) et b) un exemple de plongement fermé de topos $i : \mathcal{F} \to E$ tel que $i_!$ existe, mais ne commute ni aux produits fibrés, ni aux limites projectives filtrantes. (Il suffit de trouver un foncteur continu entre deux topos qui ne possède aucune de ces deux propriétés d'exactitude.)

Exercice 9.5.10. — (*Recollement de topos de la forme* $\widehat{C}$.) Soient C une petite catégorie, et $E = \widehat{C}$, qui est un $\mathcal{U}$-topos.

a) Se rappeler que les ouverts U de E correspondent aux *cribles* C' de C (I 4.1, 8.4.4, $E_{/U}$ étant alors équivalent à $\widehat{C'}$, le foncteur $j^* : E \to E_{/U}$ s'identifiant au foncteur restriction ??, i.e. le morphisme d'inclusion $j : E_{/U} \to E$ étant $\hat{f} : \widehat{C'} \to \widehat{C}$ (4.6.1), où $f : C' \to C$ est l'inclusion. Soit C'' la sous-catégorie pleine de C complémentaire de C' (i.e. $\mathrm{Ob}\, C''$ est le complémentaire de $\mathrm{Ob}\, C'$ dans $\mathrm{Ob}\, C$), $g : C'' \to C$ l'inclusion. Alors le sous-topos fermé $\mathcal{F}$ de $E = \widehat{C}$, complémentaire du sous-topos ouvert défini par C', est canoniquement équivalent à $\widehat{C''}$, le morphisme d'inclusion $i : \mathcal{F} \to E$ s'identifiant à $\hat{g} : \widehat{C''} \to \widehat{C}$.

471 b) Considérer le foncteur

$$h : {C'}^0 \times C'' \longrightarrow (\mathrm{Ens}), \quad h(X', X'') = \mathrm{Hom}_C(X', X''), \tag{9.5.10.1}$$

et noter que C se reconstitue à isomorphisme près, avec sa sous-catégorie pleine C', par la connaissance des catégories C', C'' et du bifoncteur h (ce dernier pouvant être choisi arbitrairement). (Comparer 9.7.1 plus bas.) La donnée de h équivaut à celle d'un foncteur $C'' \to \widehat{C'} = \mathbf{Hom}({C'}^0, (\mathrm{Ens}))$, ou encore (III 1.2 et III 1.7) à celle d'un foncteur

$$\sigma : \widehat{C}'' \longrightarrow \widehat{C}' \tag{9.5.10.2}$$

continu, i.e. (1.6) commutant aux petites limites inductives, ou encore, admettant un adjoint à droite.

$$\rho : \widehat{C}' \longrightarrow \widehat{C''}. \tag{9.5.10.3}$$

Montrer que ρ n'est autre que le foncteur de recollement associé au sous-topos ouvert $\widehat{C}'$ de $E = \widehat{C}$.

c) Déduire de a) et b) que si on se donne un foncteur de recollement (9.5.10.3) entre deux catégories de préfaisceaux, d'où un topos recollé E, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) E est équivalent à un topos de la forme $\widehat{C}$.

(ii) Le foncteur ρ commute aux petits produits (ou encore, il admet un adjoint à gauche (9.5.10.2).

(iii) Le morphisme d'inclusion $i : \widehat{C''} \to E$ est « essentiel » i.e. i^* commute aux produits, ou encore i^* admet un adjoint à gauche $i_!$.

Lorsqu'il en est ainsi, expliciter une catégorie C telle que $E \approx \widehat{C}$ à l'aide du bifoncteur (9.5.10.1) défini par la restriction de (9.5.10.2) à C''.

d) Montrer qu'un topos obtenu en recollant deux topos ponctuels n'est pas nécessairement équivalent à un topos de la forme $\widehat{C}$.

Exercice 9.5.11. — (Morphisme d'un topos recollé dans un topos.)

a) Soient : $\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ un foncteur entre deux catégories, $E = (\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho)$ la catégorie « recollée » de 9.5.1, et F une catégorie quelconque. Considérer le foncteur $f \mapsto \rho \circ f$: 472

$$\overline{\rho} : \overline{\mathcal{U}} = \mathbf{Hom}(F, \mathcal{U}) \longrightarrow \overline{\mathcal{F}} = \mathbf{Hom}(F, \mathcal{F}),$$

et définir une équivalence de catégories

$$\mathbf{Hom}(F, E) \xrightarrow{\approx} (\overline{\mathcal{U}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\rho}).$$

b) Soit $f : F \to E$ un foncteur, et considérons ses composés avec les foncteurs canoniques $j^* : E \to \mathcal{U}$ et $i^* : E \to \mathcal{F}$. Montrer que f commute à un type déterminé de limites inductives (supposé représentable dans $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$, donc dans E) si et seulement si $j^* f$ et $i^* f$ y commutent. Montrer que si ρ commute à un type déterminé de limites projectives (qui est donc représentable dans E), alors f y commute si et seulement si il en est de même de $j^* f$ et $i^* f$.

c) Supposons maintenant que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ soient des topos, et ρ un foncteur de recollement. Soit F un topos, $f : F \to E$ un foncteur. Conclure de b) que f est un foncteur image inverse associé à un morphisme de topos $E \to F$ si et seulement si il en est de même des foncteurs $j^* f : F \to \mathcal{U}$ et $i^* f : F \to \mathcal{F}$. Conclure de ceci et de a) que l'on a une équivalence entre la catégorie $\mathbf{Homtop}(E, F)$, et la catégorie des triples (f', f'', u), où f' (resp. f'') est un objet de $\mathbf{Homtop}(\mathcal{U}, F)$ (resp. $\mathbf{Homtop}(\mathcal{F}, F)$), et où $u : f''^* \to \rho \circ f'^*$ est un homomorphisme de foncteurs $F \to \mathcal{F}$: si f est un objet de $\mathbf{Homtop}(E, F)$, (f', f'', u) le triple correspondant, alors $f' = f \circ j$, $f'' = f \circ i$.

d) Préciser en quel sens on peut dire que c) fournit une caractérisation à équivalence près (dans une 2-catégorie de topos) du topos E en termes du triple $(\mathcal{U}, \mathcal{F}, \rho)$.

Exercice 9.5.12. — (*Recollement de deux espaces topologiques.*)

a) Soient X un espace topologique, $\rho : \mathrm{Top}(X) \to (\mathrm{Ens}) = \mathrm{Top}(pt)$ un foncteur de recollement, i.e. (I 8) un foncteur proreprésentable, $A \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Pro}(\mathrm{Top}(X))$ l'objet qui le pro-représente, E le topos déduit de ρ par recollement. Montrer que E est équivalent à un topos de la forme $\mathrm{Top}(Y)$ si et seulement si A est isomorphe à un objet de $\mathrm{Pro}(\mathrm{Ouv}(X))$. En conclure que si X n'est pas vide, on peut trouver ρ tel que E ne soit 473
pas équivalent à un topos de la forme $\mathrm{Top}(Y)$.

b) Plus généralement, considérons un foncteur recollement $\rho : \mathrm{Top}(X) \to \mathrm{Top}(Y)$, avec X, Y deux espaces topologiques. En déduire une application

$$\phi : X \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathrm{Pro}(\mathrm{Top}(Y))$$

(composée de $X \to \mathrm{Ob}\,\mathbf{Point}(\mathrm{Top}(X)) \to \mathrm{Ob}\,\mathrm{Pro}(\mathrm{Top}(X))$ (6.8.5) et du pro-adjoint σ de ρ. (N.B. pour $x \in X$, $\phi(x)$ s'identifie à la *fibre en x du faisceau de recollement* (9.6.4) *défini par ρ*.) Montrer que si E est équivalent à un topos de la forme $\mathrm{Top}(Z)$, alors ϕ prend ses valeurs dans l'image essentielle de $\mathrm{Pro}(\mathrm{Ouv}(Y))$.

Problème. — A-t-on une réciproque ?

9.6. Faisceau de recollement. — Nous avons vu dans 9.5.4 que la donnée d'un topos E muni d'un ouvert U revient essentiellement à celle de deux topos $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ et d'un foncteur de recollement

$$\rho : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F} \tag{9.6.1}$$

i.e. d'un foncteur admettant un pro-adjoint

$$\sigma : \mathrm{Pro}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Pro}(\mathcal{U}). \tag{9.6.2}$$

D'après le sorite sur les foncteurs proadjoints (I 8), le foncteur ρ est connu à isomorphisme unique près (et par suite le topos recollé $E = (\mathcal{F}, \mathcal{U}, \rho)$ est connu à équivalence de topos près) quand on connaît le foncteur σ, ou encore, le foncteur induit par σ

$$\sigma_\circ : \mathcal{F} \longrightarrow \mathrm{Pro}(\mathcal{U}). \tag{9.6.3}$$

Le foncteur σ est déterminé, à isomorphisme unique près, par la propriété de commuter aux petites limites projectives filtrantes et de prolonger le foncteur $\sigma_\circ$. D'autre part, pour qu'un foncteur donné (9.6.3) soit isomorphe à un pro-adjoint, il faut et il suffit évidemment que pour tout objet X de $\mathcal{U}$, le foncteur contravariant

$$Y \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(\mathcal{U})}(\sigma_\circ(Y), X)$$

474 sur $\mathcal{F}$ soit représentable, ou encore, que ce soit un faisceau sur $\mathcal{F}$ pour la topologie canonique (1.2 iii)). On voit tout de suite que ceci signifie aussi que le foncteur opposé

$$\sigma_\circ^\circ : \mathcal{F}^\circ \longrightarrow \mathrm{Pro}(\mathcal{U})^\circ \subset \check{\mathcal{U}} = \mathbf{Hom}(\mathcal{U}, (\mathrm{Ens})) \tag{9.6.4}$$

est un *faisceau* sur $\mathcal{F}$ à valeurs dans $\mathrm{Pro}(\mathcal{U})^\circ$ (II 6.1). Ainsi, *la donnée d'un foncteur de recollement* (9.6.1) *équivaut aussi* (à isomorphisme près) *à celle d'un faisceau sur* $\mathcal{F}$ *à valeurs dans* $\mathrm{Pro}(\mathcal{U})^\circ$. Le faisceau ainsi associé à un foncteur de recollement (ou à une situation $(E, U, \mathcal{F})$ comme dans (9.3) s'appelle le *faisceau de recollement* associé au foncteur de recollement envisagé ρ (resp. à l'ouvert U du topos E).

Exercice 9.6.5. — Préciser 9.5.4 en un énoncé de 2-équivalence de 2-catégories, entre la 2-catégorie formée des couples (E, U) d'un topos E et d'un ouvert U dudit, et la 2-catégorie formée des triples $(\mathcal{U}, \mathcal{F}, \rho)$ de topos $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ et d'un foncteur de recollement $\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ (la description explicite des 2-catégories en question étant à la charge du lecteur). Donner une variante de cet énoncé faisant intervenir la 2-catégorie des triples $(\mathcal{U}, \mathcal{F}, \phi)$, où ϕ est maintenant un faisceau sur $\mathcal{F}$ à valeurs dans $\mathrm{Pro}(\mathcal{U})^\circ$.

9.7. Points d'un topos recollé. —

9.7.1. — Soient C une catégorie, et

$$u : D' \longrightarrow C \quad , \quad v : D'' \longrightarrow C$$

deux foncteurs pleinement fidèles, tels que les images essentielles C', C'' de u et de v soient telles que

$$\mathrm{Ob}\, C' \cap \mathrm{Ob}\, C'' = \phi \quad , \quad \mathrm{Ob}\, C' \cup \mathrm{Ob}\, C'' = \mathrm{Ob}\, C.$$

Supposons de plus que

$$X' \in \mathrm{Ob}\, C' \quad , \quad X'' \in \mathrm{Ob}\, C'' \Rightarrow \mathrm{Hom}(X'', X') = \phi,$$

ou ce qui revient au même, qu'on ait

$$\mathrm{Hom}(v(A''), u(A')) = \phi \text{ pour } A' \in \mathrm{Ob}\, D', A'' \in \mathrm{Ob}\, D''.$$

475 Il est alors immédiat que la catégorie C se reconstitue, à isomorphisme canonique près, par

la connaissance des catégories C' et C'' et du foncteur

$$(X', X'') \longmapsto \mathrm{Hom}(X', X'') : C'^{\circ} \times C'' \longrightarrow (\mathrm{Ens});$$

de même, C se reconstitue à équivalence près (celle-ci définie à isomorphisme unique près) par la connaissance de D', D'' et du foncteur

$$(A', A'') \longmapsto \mathrm{Hom}(u(A'), v(A'')) : D'^{\circ} \times D'' \longrightarrow (\mathrm{Ens}).$$

Cette remarque s'applique en particulier à la situation décrite dans la proposition suivante, et nous montre que la catégorie **Point**(E) est déterminée, à équivalence près, par la connaissance des catégories **Point**$(\mathcal{U})$ et **Point**$(\mathcal{F})$ et d'un certain foncteur

$$\mathbf{Point}(\mathcal{U})^{\circ} \times \mathbf{Point}(\mathcal{F}) \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

déduit du foncteur de recollement $\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$.

Proposition 9.7.2. — *Soient E un topos, U un ouvert de E, $\mathcal{U} = E_{/U}$ et $\mathcal{F}$ le sous-topos fermé de E complémentaire de U. Considérons les foncteurs $p \mapsto p \circ j$ et $q \mapsto q \circ i$ induits par les morphismes d'inclusion $j : \mathcal{U} \to E$ et $i : \mathcal{F} \to E$:*

(9.7.2.1) $$u : \mathbf{Point}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbf{Point}(E), \quad v : \mathbf{Point}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbf{Point}(E).$$

Alors on a ce qui suit :

a) *Les foncteurs précédents u et v sont pleinement fidèles, et tout point de E appartient à l'image essentielle de l'un ou l'autre des foncteurs u et v exclusivement.*

b) *Soient p et q deux points de E, tels que p (resp. q) appartienne à l'image essentielle de u (resp. de v). Alors on a*

(9.7.2.2) $$\mathrm{Hom}(q, p) = \phi.$$

c) *Soient p (resp. q) un point de $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{F}$). On a alors un isomorphisme, fonctoriel en (q, p) :*

(9.7.2.3) $$\mathrm{Hom}(u(p), v(q)) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Pro}(\rho)(p), q) \simeq \mathrm{Hom}(p, \sigma(q)),$$

où

$$\sigma : \mathrm{Pro}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Pro}(\mathcal{U})$$

est le foncteur (9.6.2) *pro-adjoint du foncteur de recollement $\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$, et où*

$$\rho : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F},$$

on a identifié (à équivalence près) les catégories **Point**$(\mathcal{U})$, **Point**$(\mathcal{F})$ *à des sous-* 476
catégories pleines de $\mathrm{Pro}(\mathcal{U})$, $\mathrm{Pro}(\mathcal{F})$ *respectivement (6.8.5).*

Démonstration

a) La pleine fidélité de u et v est connue (9.1.4). L'assertion sur les images essentielles de u, v résulte des critères 9.2.5 et 9.2.4 pour qu'un point $P \to E$ se factorise à isomorphisme près par $\mathcal{U}$ resp. $\mathcal{F}$, compte tenu du fait que le topos ponctuel P n'a que deux ouverts, savoir l'objet initial et l'objet final de P.

b) Compte tenu de a), l'assertion signifie que si le point $p : P \to E$ se factorise par $\mathcal{U}$, il en est de même de tout point $p' : P \to E$ tel que $\mathrm{Hom}(p', p) \neq \phi$. Or si $\alpha : p' \to p$ il induit $p^*(e_{\mathcal{U}}) \to p'^*(e_{\mathcal{U}})$, et alors $p^*(e_{\mathcal{U}}) = e_p$ implique $p'^*(e_{\mathcal{U}}) = e_p$, C.Q.F.D.

c) Grâce au lemme 9.7.2.4 ci-dessous, appliqué aux inclusions $j : \mathcal{U} \to E$ et $i : \mathcal{F} \to E$, on a un diagramme de foncteurs commutatif à des isomorphismes canoniques près

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Point}(\mathcal{U}) \arrow[r, "u"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Point}(E) \arrow[d, hook] & \mathrm{Point}(\mathcal{G}) \arrow[l, "v"'] \arrow[d, hook] \\ \mathrm{Pro}(\mathcal{U}) \arrow[r, "\mathrm{Pro}(j_*)"] & \mathrm{Pro}(E) & \mathrm{Pro}(\mathcal{G}), \arrow[l, "\mathrm{Pro}(i_*)"'] \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales désignent les foncteurs pleinement fidèles canoniques (6.8.5). D'autre part, comme i_* admet un adjoint à gauche i^*, $\mathrm{Pro}(i_*)$ admet un adjoint à gauche $\mathrm{Pro}(i^*)$ **??**, et on obtient finalement des isomorphismes fonctoriels

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(u(p), v(q)) \simeq\, & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(E)}(\mathrm{Pro}(j_*)(p), \mathrm{Pro}(i_*)(q)) \\ & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(\mathcal{F})}(\mathrm{Pro}(i^*)(\mathrm{Pro}(j_*)(p)), q) \\ & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(\mathcal{F})}(\mathrm{Pro}(i^* j_*)(p), q), \end{aligned}$$

ce qui n'est autre que la première formule (9.7.2.3), la deuxième étant alors triviale par définition de σ comme pro-adjoint de ρ. Cela prouve donc 9.7.2, modulo le

Lemme 9.7.2.4. — *Soit $f : F \to E$ un morphisme de topos. Alors le diagramme de foncteurs*

(9.7.2.4.1)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Point}(F) \arrow[r, "p \mapsto f \circ p"] \arrow[d] & \mathrm{Point}(E) \arrow[d] \\ \mathrm{Pro}(F) \arrow[r, "\mathrm{Pro}(f_*)"] & \mathrm{Pro}(E) \end{tikzcd}$$

477 *est commutatif à isomorphisme canonique près (les flèches verticales désignant les foncteurs pleinement fidèles 6.8.5).*

La vérification est immédiate à partir des définitions, et laissée au lecteur.

Corollaire 9.7.3. — *Soit E un topos admettant assez de points, alors il en est de même pour tout sous-topos fermé $\mathcal{F}$ de E. Plus précisément, si $(p_i)_{i \in I}$ est une famille conservative de points de E, alors la famille des points de $\mathcal{F}$, définie par la sous-famille $(p_i)_{i \in J}$ formée des p_i qui proviennent de points de $\mathcal{F}$, est conservative. (Comparer 6.7.3, 6.7.4.)*

En effet, soit $f : X \to Y$ une flèche de $\mathcal{F}$ transformée en isomorphisme par les foncteurs fibre associés aux points envisagés de $\mathcal{F}$. Comme $i^* i_* \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$, on voit que $i_*(f) : i_*(X) \to i_*(Y)$ est transformé en isomorphisme par les foncteurs fibre associés aux p_i avec $i \in J$; il en est de même pour les p_i avec $i \in I - J$, i.e. provenant de points de U, puisque $j^* i_*$ est le foncteur constant de valeur l'objet final. Donc $i_*(f)$ est un isomorphisme, donc aussi $f \simeq i^* i_*(f)$, C.Q.F.D.

Remarque 9.7.4. — Si E est un topos ayant assez de points, il est clair qu'un ouvert U de E est déterminé quand on connaît la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Point}(E)$ image essentielle de $\mathbf{Point}(E_{/U})$; en fait, si C est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Point}(E)$ définissant une famille conservative de points de E, il suffit même de connaître la sous-catégorie $C_{/U}$ des éléments de C appartenant à l'image essentielle de $\mathbf{Point}(U)$. De ceci et de 9.7.2 a) il résulte qu'un sous-topos fermé $\mathcal{F}$ de E est déterminé quand on connaît l'image essentielle de $\mathbf{Point}(\mathcal{F})$ dans $\mathbf{Point}(E)$ ou même seulement l'intersection de celle-ci avec C.

Exercice 9.7.5. — Soit E un topos. Pour tout sous-topos F de E, soit $P(F)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Point}(E)$ formé des classes d'isomorphie de points de E qui se factorisent par F. Ainsi, $P(F)$ est homéomorphe à $\mathrm{Point}(F)$ (9.1.8 c)). Montrer que si F est un sous-topos ouvert (resp. fermé, resp. localement fermé (9.4.9)) de E, alors $P(F)$ est une partie ouverte (resp. fermée, resp. . localement fermée) de $\mathrm{Point}(E)$. Montrer que lorsque E a **478**
suffisamment de points, il en est de même de tout sous-topos localement fermé de E, et l'application $F \mapsto P(F)$ induit une bijection entre l'ensemble des sous-topos ouverts (resp. fermés, resp. localement fermés) de E, et l'ensemble des parties ouvertes (resp. fermées, resp. localement fermées) de $\mathrm{Point}(E)$. Généraliser les considérations précédentes au cas où on remplace $\mathrm{Point}(E)$ par n'importe quel sous-espace X de $\mathrm{Point}(E)$ correspondant à une famille conservative de points de E.

9.8. Compléments sur certains topos liés aux espaces topologiques. — Nous indiquons dans ce numéro quelques compléments, qui seront donnés sous forme d'exercices. Il est conseillé au lecteur de les parcourir, pour s'habituer au point de vue des topos dans diverses situations de type classique.

Exercice 9.8.1. — (*Descente de faisceaux sur un espace topologique.*)

Soit $f : X \to Y$ une application continue d'espaces topologiques $\in \mathscr{U}$, d'où un foncteur

$$f^* : \mathrm{Top}(Y) \longrightarrow \mathrm{Top}(X).$$

a) Les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) f^* est fidèle.
   (ii) f^* est conservatif.
   (iii) $f(X)$ est une partie très dense (EGA IV 10.1.3) de Y.

   Il suffit pour ceci que f ou f_{sob} soit surjectif. Donner un exemple où f^* est fidèle et où $f = f_{\mathrm{sob}}$ n'est pas surjectif (prendre X discret, f injectif, $f(X)$ = ensemble des points fermés de Y, Y un espace topologique noethérien non discret). Donner un exemple où f_{sob} est surjectif mais non f, un autre où f est surjectif mais non f_{sob}.
b) Supposons $f(X)$ très dense dans Y, et sa topologie quotient de celle de X. Prouver que la flèche f de (Esp) est un morphisme de descente pour la catégorie fibrée des faisceaux d'ensembles sur des espaces variables, i.e. que le foncteur f^* induit un foncteur *pleinement fidèle* de la catégorie $\mathrm{Top}(Y)$ dans la catégorie des objets de $\mathrm{Top}(X)$ munis **479**
   d'une donnée de descente relativement à $f : X \to Y$. Se ramener un cas f surjectif, et calquer le raisonnement de VIII 9.1 donné dans le contexte des topologies étales de schémas.) Donner une réciproque.
c) Supposons que $f(X)$ soit très dense dans Y, que sa topologie soit quotient de celle de X, et que les fibres de f soient connexes. Prouver que le foncteur f^* est pleinement fidèle. (Calquer le raisonnement de SGA 1 IX 3.4.) Donner une réciproque, tout au moins si les points de Y sont fermés.
d) Supposons que Y soit réunion d'ouverts Y_i au-dessus desquels X admette des sections. Prouver qu'alors f est un *morphisme de descente effective* pour la catégorie fibrée des faisceaux d'ensembles sur des espaces topologiques variables, i.e. que le foncteur envisagé dans *c*) est même une équivalence de catégories.

Exercice 9.8.2. — (*Topos quotients d'espaces topologiques. Étendues topologiques.*)

a) Soit

$$X_2 \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; X_1 \;\underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}}\; X_0 \tag{9.8.5.1}$$

un objet semi-simplicial tronqué à l'ordre 2 de la catégorie (Esp) des espaces topologiques $\in \mathscr{U}$, d'où par les foncteurs images inverses un diagramme de catégories de faisceaux

$$\mathrm{Top}(X_0) \;\underset{p_2^*}{\overset{p_1^*}{\rightrightarrows}}\; \mathrm{Top}(X_1) \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; \mathrm{Top}(X_2),$$

(de façon plus précise, on a une catégorie cofibrée sur la catégorie des simplexes-types Δ_n, $0 \leq n \leq 2$). Montrer que la catégorie $\varprojlim$ de ce diagramme (i.e. la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X_0, *munis* d'une donnée de descente relativement au diagramme 9.8.2.1, i.e. d'un isomorphisme $p_1^*(F) \simeq p_2^*(F)$ tel que...), est un $\mathscr{U}$-topos T. (Pour un énoncé plus général de stabilité des topos par opérations $\varprojlim$, cf. VI 8
480 Définir un morphisme de topos $q : \mathrm{Top}(X_0) \to T$, et prouver que pour tout $\mathscr{U}$-topos E, **Homtop**(T, E) est équivalent via q^* à la catégorie $\varprojlim$ du diagramme suivant de catégories, déduit de (9.8.2.1) :

$$\mathbf{Homtop}(\mathrm{Top}(X_o), E) \rightrightarrows \mathbf{Homtop}(\mathrm{Top}(X_1), E) \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; \mathbf{Homtop}(\mathrm{Top}(X_2), E).$$

b) En particulier, soit R une relation d'équivalence dans un objet X de (Esp), i.e. (I 10.9) un sous-objet R de $X \times X$ (N.B. l'inclusion $R \hookrightarrow X \times X$ est continue, mais la topologie de R n'est pas nécessairement induite par celle de $X \times X$), tel que pour tout objet Y de (Esp), $\mathrm{Hom}(Y, R)$ soit le graphe d'une relation d'équivalence dans $\mathrm{Hom}(Y, X)$. On en déduit un diagramme de la forme (9.8.2.1), avec $X_0 = X$, $X_1 = R$, $X_2 = (R, p_2) \times_X R, p_1$, où p_1, p_2 sont les deux projections de R dans X, d'où un topos, qu'on notera $\mathrm{Top}(X)/R$, ou même $\mathrm{Top}(X/R)$, voire X/R, par abus de notations, et qui joue le rôle d'un quotient de X par R, en un sens précisé par a). Supposons que la topologie de R soit induite par celle de $X \times X$, et que, désignant par X/R l'espace topologique quotient ordinaire, X admette localement des sections sur X/R, prouver qu'alors T est équivalent à $\mathrm{Top}(X/R)$. (Utiliser 9.8.1 d)).

c) Soit $H \to X$ un morphisme injectif de groupes topologiques, i.e. un monomorphisme d'objets groupes dans (Esp), et soit R la relation d'équivalence qu'il définit dans X, i.e. $R = H \times X$, avec $p_1 = \mathrm{pr}_1$ et p_2 défini par l'action de H sur X via translations à gauche. Montrer que pour que la topologie de R soit induite par celle de $X \times X$, il faut et il suffit que la topologie de H soit induite par celle de X. Donner des exemples où cette condition n'est pas remplie, et où la topologie quotient ordinaire de X/H est la topologie grossière avec a) $H = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}$, et b) $H = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, avec $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, (« géodésiques du tore »). Prouver que les deux topos obtenus sont équivalents et ne sont pas équivalents à $\mathrm{Top}(X/H)$ (qui est un topos final (2.2), ni à aucun topos de la forme $\mathrm{Top}(Y)$).

d) Soit G un groupe topologique opérant sur un espace topologique X, d'où de façon bien connue un objet semi-simplicial

$$\ldots G \times G \times X \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; G \times X \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow}\; X.$$

Montrer que le topos T qui s'en déduit en vertu de a) s'identifie à la catégorie des espaces X' à groupe d'opérateurs G au-dessus de X, tels que $X' \to X$ soit un étalement (compatible à l'action de G). En particulier, lorsque G est discret, on retrouve le topos $\mathrm{Top}(X, G)$ de 2.3. 481

Les considérations qui précèdent justifient la notation $\mathrm{Top}(X)/G$, voire $\mathrm{Top}(X/G)$ ou même simplement X/G, pour le topos précédent T. On fera attention cependant que lorsque G est un groupe discret (pour fixer les idées) opérant *proprement* sur X, de sorte que l'espace quotient ordinaire X/G possède des propriétés assez raisonnables, le morphisme de topos naturel $T \to \mathrm{Top}(X/G)$ déduit de la caractérisation universelle a) de T n'est une équivalence de topos que si G opère librement i.e. sans points fixes, i.e. lorsque $G \times X \to X \times X$ est un monomorphisme ; donc dans le cas d'une « pré-relation d'équivalence » (ou « groupoïde » au sens de (SGA 3 V 1) qui n'est pas une relation d'équivalence, la notion de passage au quotient au sens des topos (ou « passage au quotient fin ») ne correspond pas en général (via la correspondance $X \to \mathrm{Top}(Y)$) au passage au quotient topologique habituel.

e) Soit T un $\mathscr{U}$-topos. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) Il existe une famille $(S_i)_{i\in I}$ d'objets de T couvrant l'objet final de E, telle que pour tout $i \in I$, le topos induit $T_{/S_1}$ soit équivalent à un topos de la forme $\mathrm{Top}(X)$, avec $X \in (\mathrm{Esp})$.
   (i′) Il existe un $S \in \mathrm{Ob}\, E$ couvrant l'objet final tel que le topos induit $T_{/S}$ soit équivalent à un topos de la forme $\mathrm{Top}(X)$.
   (ii) Il existe un espace topologique X, et une pré-relation d'équivalence R dans X (au sens de la catégorie (Esp)) qui soit *étale* (i.e. telle que $p_1 : R \to X$ soit un étalement), tels que T soit équivalent à $\mathrm{Top}(X/R)$, où les notations sont celles de b).

   On dira alors que le topos T est *localement un espace topologique,* ou encore que T est une *étendue topologique* (ou simplement une *étendue,* si aucune confusion n'est à craindre). 482

f) Montrer que le topos T construit dans a) a suffisamment de points, et plus précisément, qu'il admet une famille conservative de points paramétrée par le (petit) ensemble X_0. En particulier, toute étendue à une petite famille conservative de points, donc a suffisamment de points. Lorsqu'une étendue T est réalisée sous la forme $\mathrm{Top}(X/R)$ comme dans e) ii), prouver que tout point de T est isomorphe à l'image d'un point de $\mathrm{Top}(X)$, donc est défini par un point ordinaire de X_{sob} (ou encore de X, lorsque X est sobre).

g) Montrer que le topos $\mathrm{Top}(X/G)$ de 2.3 est une étendue. (Utiliser sa description d) ou 7.1.10 c).) Montrer que pour tout $x \in X$, le monoïde des endomorphismes du point de $\mathrm{Top}(X, G) = \mathrm{Top}(X)/G$ défini par x est canoniquement isomorphe au groupe de stabilité G_x de x. En particulier, les points d'une étendue peuvent avoir des groupes d'automorphismes non triviaux. Déterminer $\mathbf{Point}(J)$ pour l'étendue T définie par une prérelation d'équivalence étale dans un espace X, et montrer que tout endomorphisme d'un point de T est un automorphisme.

h) Soit T un topos. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   i) Pour tout point p de T, tout endomorphisme de p (resp. tout automorphisme de p) est l'identité.
   ii) Pour tout topos S ayant suffisamment de point, et tout morphisme de topos $f : S \to T$, tout endomorphisme de f (resp. tout automorphisme de f) est l'identité.

   Montrer de même que les conditions suivantes sont équivalentes :
   i′) Pour deux points p, q de T, il existe au plus un morphisme de p dans q.
483 ii′) Pour deux morphismes $f, g : S \rightrightarrows T$ d'un topos S ayant suffisamment de points dans T, il existe au plus un morphisme de f dans g.

   Lorsque ces dernières conditions sont vérifiées, on dit que le topos T est *ponctuellement rigide,* ou simplement *rigide*. Montrer que si X est un espace topologique muni d'une pré-relation d'équivalence étale R, l'étendue quotient $T = \mathrm{Top}(X)/R$ est rigide si et seulement si R est une relation d'équivalence.

i) Soient (X, G) un espace topologique à groupe discret d'opérateurs, H un sous-groupe distingué de G tel que l'opération induite de H sur X soit propre et libre, et soient $X' = X/H$, $G' = G/H$, de sorte que G' opère sur X' de façon évidente. Prouver que le morphisme de topos

$$\mathrm{Top}(X, G) \longrightarrow \mathrm{Top}(X', G')$$

   induit par le morphisme canonique $(X, G) \to (X', G')$ d'espaces à opérateurs (4.1.2) est une équivalence de topos.

   Montrer que l'ensemble des ouverts du topos $\mathrm{Top}(X/G)$ s'identifie à l'ensemble des ouverts de X stables par l'action de G, ou encore à l'ensemble des ouverts de l'espace topologique quotient X/G. En conclure que $\mathrm{Top}(X/G)$ est connexe si et seulement si toute partie de X à la fois ouverte et fermée et stable sous l'action de G est vide ou égale à X. Lorsque les composantes connexes de X sont ouvertes, $\mathrm{Top}(X/G)$ est connexe si et seulement si G opère transitivement sur l'ensemble $\pi_0(X)$ des composantes connexes de X ; plus généralement $\pi_0(\mathrm{Top}(X/G))$ (8.7 g)) est un pro-ensemble essentiellement constant isomorphe à l'ensemble quotient $\pi_0(X)/G$.

   Montrer que lorsque X est localement connexe et localement simplement connexe, et $T = \mathrm{Top}(X, G)$ connexe i.e. G transitif sur $\pi_0(X)$, alors parmi toutes les façons de réaliser T à l'aide d'un espace à opérateurs (X', G') (cf. ci-dessus pour certaines telles façons), il y en a une, unique à isomorphisme non unique près, pour laquelle X' est connexe et simplement connexe. Montrer que le choix d'un tel (X', G') revient au choix d'un « revêtement universel » de l'objet final de T, et que G' est isomorphe au groupe $\pi_1(T)$ relatif à ce revêtement universel (cf. 2.7.5).
484 (Hint : montrer que la donnée d'une équivalence de T avec un $\mathrm{Top}(X, G)$ revient à la donnée d'un G_T-torseur P dans T, et que si (X, G) et P se correspondent, on a une équivalence canonique $\mathrm{Top}(X) - T/P$).

   Conclure de ceci une démonstration triviale de la dernière assertion de c). Caractériser les topos T équivalents à des $\mathrm{Top}(X, G)$, où G est un groupe discret opérant sur un espace topologique localement connexe et localement simplement connexe en permutant transitivement les composantes connexes, comme étant les étendues connexes, localement connexes et localement simplement connexes dont le revêtement universel P de l'objet final e_T de T soit tel que le topos induit $T_{/P}$ soit équivalent à un topos de la forme $\mathrm{Top}(X)$ (ou, comme on dira simplement par abus de langage $T_{/P}$ « est » un espace topologique).

Donner un exemple d'une étendue, localement isomorphe à $\mathbb{R}$, qui est connexe et simplement connexe mais qui n'est pas un espace topologique. (Prendre le revêtement universel de la droite $\mathbb{R}$ avec origine dédoublée.)

j) Un topos annelé $(T, \mathcal{O}_T)$ (cf. § 11) est appelé une *étendue différentiable* (resp. une *étendue analytique réelle.* resp. une *étendue analytique complexe*) s'il existe des objets S_i de T couvrant l'objet final, tels que le topos annelé induit $(T_{/E}, \mathcal{O}_T/E)$ soit équivalent au topos annelé défini par une variété différentiable avec son faisceau de fonctions réelles C^∞ (resp. au topos annelé défini par un espace analytique réel, resp. au topos annelé défini par un espace analytique complexe). Donner une description constructive de ces topos annelés, du type de e) ii) (où on prendra pour X respectivement une variété différentiable, un espace analytique complexe ou un espace analytique réel). Donner des exemples de tels topos annelés qui ne soient pas équivalents à des topos annelés associés à des espaces topologiques, en reprenant les exemples envisagés dans c).

Exercice 9.8.3. — (*Topos associés aux relations d'équivalence locales et aux feuilletages*) [(10)]. 485

Soit X un espace topologique.

a) Pour tout ouvert U de X, soit $\mathrm{Quot}(U)$ l'ensemble des relations d'équivalence dans U, et pour un ouvert $V \subset U$, considérons l'application naturelle $\mathrm{Quot}(U) \to \mathrm{Quot}(V)$, d'où un préfaisceau Quot_X sur X. Soit Q_X ou simplement Q le faisceau associé, et soit r une section de Q (« *relation d'équivalence locale sur X* »). De la relation d'ordre sur l'ensemble $\mathrm{Quot}(U)$ des relations d'équivalence sur un ouvert U de X, déduire sur le préfaisceau Quot, et sur le faisceau associé Q, une structure d'ordre i.e. une structure de préfaisceau resp. de faisceau à valeurs dans la catégorie des ensembles ordonnés.

b) Considérer, pour toute relation d'équivalence R sur X, la section $\mathrm{loc}(R)$ de Q qu'elle définit. Soit $E(r)$ l'ensemble des relations d'équivalence sur X telles que $\mathrm{loc}(R)$ soit moins fine que r, et soit $\mathrm{glob}(r)$ la relation d'équivalence borne supérieure de $E(r)$, (dont le graphe est l'intersection des graphes des $R \in E(r)$). Soit $(U_x)_{x\in X}$ une famille de voisinage ouverts des $x \in X$, et pour tout $x \in X$ soit R_x une relation d'équivalence dans U_x dont le germe en x soit r_x. Pour toute famille $\mathscr{V}$ d'ouverts V_x ($x \in X, x \in V_x \subset U_x$), soit $R_{\mathscr{V}}$ la relation d'équivalence dans X engendrée par la famille des relations $R_x|V_x$. Montrer que si $\mathscr{V}' \leq \mathscr{V}$ (dans un sens évident) on a $R_{\mathscr{V}'} \geq R_{\mathscr{V}}$, et que $\mathrm{glob}(r)$ est la borne supérieure de la famille filtrante croissante de relations d'équivalence $R_{\mathscr{V}}$. Donner un exemple où $\mathrm{glob}(r)$ n'est pas dans $E(r)$, i.e. où il existe un $a \in X$ tel que, pour tout voisinage ouvert $W \subset U_a$ de a, il existe un $\mathscr{V} = (V_x)$ et deux points y, z de 486
W qui sont équivalents pour R_a, mais qui ne sont pas équivalents pour $R_{\mathscr{V}}$. Montrer que pour toute $R \in \mathrm{Quot}(X)$ on a $\mathrm{glob}\,\mathrm{loc}(R) \geq R$.

10. Cet exercice est donné sous toutes réserves, ayant été rédigé hâtivement et insuffisamment vérifié. Monsieur N. Saavedra a vérifié les parties a) à e). Prière au lecteur de nous communiquer ses observations éventuelles.

c) On dit que r est une *relation d'équivalence locale précohérente (resp. cohérente)* si $\mathrm{glob}(r) \in E(r)$ i.e. $\mathrm{loc}(\mathrm{glob}(r)) \leq r$ (resp. si pour tout ouvert U de X, la restriction de r à U est précohérente). On dit que r est globalement cohérente si elle est cohérente, et si, de plus, $r = \mathrm{loc}\,\mathrm{glob}(r)$. On dit qu'une relation d'équivalence R sur X est *localement cohérente* si $r = \mathrm{loc}(R)$ est cohérente, *cohérente* si de plus $R = \mathrm{glob}(r)$ i.e. $R = \mathrm{glob}(\mathrm{loc}(R))$. Montrer que les relations d'équivalence *localement* cohérentes r sur X correspondent biunivoquement aux relations d'équivalence cohérentes R sur X, par $r \mapsto \mathrm{glob}(r)$ et $R \mapsto \mathrm{loc}(R)$;

d) Montrer que pour que r soit cohérente il suffit que pour tout $a \in X$ et tout voisinage ouvert $W' \subset U_a$ de a, il existe un voisinage ouvert $W \subset W'$ de a, tel que toute classe d'équivalence de $R_a|W$ soit contenue dans une composante connexe d'une classe d'équivalence de $R_a|W'$ (à fortiori, il suffit qu'il existe une famille fondamentale de voisinages ouverts $W_a \subset U_a$ de a tels que les fibres de la relations d'équivalence induite $R_a|W_a$ soient connexes). (Hint : se ramener à établir la pré-cohérence dans le cas où r est définie par une $R \in \mathrm{Quot}(X)$, et noter dans ce cas que les fibres des relations d'équivalence $R_{\mathscr{V}}$ sont des parties relativement ouvertes - donc aussi relativement fermées- des fibres de R). Montrer que pour qu'une relation d'équivalence globale R soit cohérente, il suffit qu'elle soit localement cohérente et que ses fibres soient connexes ; prouver que cette condition est nécessaire si les fibres sont fermées. Donner un exemple d'une relation d'équivalence à fibres connexes et localement connexes, et qui n'est pas localement cohérente (?).

487 e) Soit $f : X' \to X$ une application continue. Définir un homomorphisme de préfaisceaux naturel $f_*(\mathrm{Quot}_{X'}) \leftarrow \mathrm{Quot}_X$, induisant un homomorphisme de faisceaux $f_*(Q_{X'}) \leftarrow Q_X$ d'où $f^*(Q_X) \to Q_{X'}$. Si r est une relation d'équivalence locale sur X, on dit que f est une « *application fibre* » pour la relation d'équivalence locale r sur X, si l'image inverse de r est la relation d'équivalence locale grossière sur X'. Soit, pour tout espace topologique X', $\mathrm{Homfib}_r(X', X)$ l'ensemble des applications continues de X' dans X qui sont des applications fibres relativement à r. Montrer que pour X' variable, on obtient un contrafoncteur en X'.

f) Supposons r cohérente. Montrer que le foncteur précédent est représentable par un espace topologique X^r au-dessus de X. Montrer que l'application fibre universelle $\Phi : X^r \to X$ est bijective, et que tout $x \in X^r$ admet un voisinage ouvert U tel que l'application $U \to X$ induite par Φ soit un homéomorphisme de U sur son image. Montrer que les composantes connexes X^r sont ouvertes et correspondent par la bijection Φ aux fibres de la relation d'équivalence $R = \mathrm{glob}(r)$. Donner un exemple où la restriction de Φ aux composantes connexes de X^r n'induit pas des homéomorphismes de ces espaces avec leurs images dans X.

g) La relation d'équivalence locale r est dite *ouverte* si elle est une section du sous-faisceau Qouv_X de Q provenant du sous-préfaisceau $\mathrm{Quotouv}_X$ de Quot_X dont la valeur en tout ouvert U de X est l'ensemble des relations d'équivalence *ouvertes* de U. On dira que la relation d'équivalence locale r est *strictement ouverte* si elle est cohérente et ouverte ou ce qui revient au même, si elle est cohérente et si pour tout ouvert U de X, $\mathrm{glob}(r|U)$ est une relation d'équivalence ouverte dans U. On dit que la relation d'équivalence R dans X est *strictement ouverte* si elle est cohérente et si $\mathrm{loc}(R)$ est

une relation d'équivalence locale strictement ouverte. Prouver que pour que r supposée ouverte soit strictement ouverte, il suffit qu'elle satisfasse à la condition envisagée 488
dans d) ; si r est localement définie par une R à fibres fermées, alors cette condition est aussi nécessaire.

h) Soit F un faisceau d'ensembles sur X. Pour tout ouvert U de X, soit $\mathrm{Quot}(U, F)$ l'ensemble des couples formés d'une relation d'équivalence R_U dans U et d'une relation d'équivalence $R_{F|U}$ dans $F|U$ (F étant interprété comme espace étalé sur X) tels que le morphisme structural $p : F|U \to U$ soit compatible avec les relations d'équivalence R_U, $R_{F|U}$, et que le diagramme correspondant d'espaces topologiques

$$\begin{tikzcd} F|U \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & (F|U)/R_{F|U} \arrow[d, "q"] \\ U \arrow[r] & U/R_U \end{tikzcd}$$

soit cartésien avec q un étalement (de sorte que $F|U$ s'identifie à l'image inverse du faisceau $(F|U)/R_{F|U}$ sur U/R_U). Montrer que les $\mathrm{Quot}(U, F)$ pour U variable définissent un préfaisceau sur X, dont le faisceau associé sera noté $Q(F/X)$. Définir un homomorphisme de faisceaux $Q(F/X) \to Q_X$. Pour une section donnée r de Q_X, on appelle *r-structure* sur le faisceau F toute section de $Q(F/X)$ au-dessus de la section donnée r de Q_X. Définir la catégorie $\mathrm{Top}(X/r)$ des r-faisceaux sur X, et définir un foncteur conservatif en fidèle : « oubli de la r-structure » $\mathrm{Top}(X/r) \to \mathrm{Top}(X)$. Prouver que dans $\mathrm{Top}(X/r)$ les limites projectives finies et les limites inductives finies sont représentables, et que le foncteur précédent commute aux dites limites. En conclure que dans $\mathrm{Top}(X/r)$ les sommes finies sont disjointes et universelles et les relations d'équivalence sont effectives universelles. Prouver que $\mathrm{Top}(X/r)$ admet une petite famille génératrice. Donner un exemple avec r cohérente, où $\mathrm{Top}(X/r)$ n'admet pas des sommes directes infinies (?), donc n'est pas un topos.

i) Soit $f : X \to Y$ une application continue compatible avec $R = \mathrm{glob}(r)$. Définir un foncteur

$$f_r^* : \mathrm{Top}(Y) \longrightarrow \mathrm{Top}(X/r)$$

dont le composé avec le foncteur d'inclusion $\mathrm{Top}(X/r) \to \mathrm{Top}(X)$ soit f^*. Montrer que 489
si r est globalement cohérente et strictement ouverte (i.e. si R est strictement ouverte et $r = \mathrm{loc}(R)$), et si f est l'application canonique $X \to Y = X/R$, alors f_r^* est une équivalence de catégories, donc $\mathrm{Top}(X/r)$ est un $\mathscr{U}$-topos, et $\mathrm{Top}(X/r) \to \mathrm{Top}(X)$ est le foncteur image inverse d'un morphisme de topos.

j) Conclure de i) que si r est strictement ouverte, alors $\mathrm{Top}(X/r)$ est un topos, et le foncteur d'inclusion $\mathrm{Top}(X/r) \to \mathrm{Top}(X)$ est le foncteur image inverse associé à un morphisme de topos

$$p : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathrm{Top}(X/r).$$

k) Définir une loi fonctorielle du topos $\mathrm{Top}(X/r)$ et du morphisme de topos précédent p, par rapport au couple (X, r) d'un espace topologique X muni d'une relation d'équivalence locale strictement ouverte. Montrer que si $X' \to X$ est un étalement et si r' est l'image inverse de r dans X', alors le morphisme induit $\mathrm{Top}(X'/r') \to \mathrm{Top}(X/r)$ est équivalent à un morphisme de localisation $\mathrm{Top}(X/r)_{/E} \to \mathrm{Top}(X/r)$, où E est un objet de $\mathrm{Top}(X/r)$ (déterminé à isomorphisme unique près). Pour que E couvre l'objet final de $\mathrm{Top}(X/r)$, il faut et il suffit que le saturé sous $R = \mathrm{glob}(r)$ de l'image de X' dans X soit égal à X.

l) Déduire de k) que $\mathrm{Top}(X/r)$ est une *étendue rigide* (9.8.2 h)). Montrer que si X est sobre l'ensemble des classes d'isomorphie de points de $\mathrm{Top}(X/r)$ est homéomorphe, pour sa topologie canonique (7.8) à l'espace topologique quotient $X/\mathrm{glob}(r)$, et que pour deux points de $\mathrm{Top}(X/r)$, provenant de points x et x' de X, il existe au plus un morphisme de l'un dans l'autre ; il y en a effectivement un si et seulement si x' et x sont équivalents mod $\mathrm{glob}(r)$ à des points x'_1 et x_1 tels que x_1 générise x'_1.

490 m) Étudier le morphisme de topos canonique $\mathrm{Top}(X) \to \mathrm{Top}(X/r)$, en notant que pour tout objet U de $\mathrm{Top}(X/r)$ tel que le topos induit sur U « soit » un espace topologique ordinaire, le morphisme induit $\mathrm{Top}(X)_{/p^*(U)} \to \mathrm{Top}(X/r)/U$ « est » une application continue d'espaces topologiques ordinaires $X_U \to U$. Montrer que les fibres de l'application $X_U \to U$ sont homéomorphes à des composantes connexes de l'espace X^r de f.

n) Soit X une variété différentiable munie d'un feuilletage, i.e. d'un sous-faisceau F localement facteur direct du faisceau tangent de X, stable par crochets. Définir sur X une relation d'équivalence locale strictement ouverte associée au feuilletage, et définir sur le topos quotient $T = \mathrm{Top}(X/r)$ un Anneau qui en fasse une *étendue différentiable* (9.8.2 j)). Définir une équivalence de la catégorie des Modules localement libres sur l'étendue différentiable T (appelés aussi fibrés vectoriels différentiables sur T), et la catégorie des Modules localement libres sur X munis d'une connexion relativement au sous-fibré F donné du fibré tangent. Donner des variantes dans le cas analytique réel et analytique complexe.

10. Faisceaux de morphismes

491

Proposition 10.1. — *Soient E un topos, X et Y deux objets de E ; le foncteur $Z \mapsto \mathrm{Hom}_E(Z\times X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{E_{/Z}}(X_Z, Y_Z)$ est représentable.*

En effet, les limites inductives sont universelles dans E (II 4.3). Le foncteur $Z \mapsto Z \times X$ commute donc aux limites inductives. Par suite, le foncteur $Z \mapsto \mathrm{Hom}_E(Z \times X, Y)$ transforme les limites inductives de l'argument Z en limites projectives. Il est donc représentable (1.2.1).

10.2. — L'objet représentant le foncteur $Z \mapsto \mathrm{Hom}_E(Z \times X, Y)$ est noté $\mathbf{Hom}_E(X, Y)$ (ou plus simplement $\mathbf{Hom}(X, Y)$) et est appelé le *faisceau des morphismes de X dans Y*. C'est un bifoncteur en X et Y. On a donc un isomorphisme trifonctoriel.

$$\mathrm{Hom}_E(Z, \mathbf{Hom}_E(X, Y)) \simeq \mathbf{Hom}_E(Z \times X, Y). \tag{10.2.1}$$

Il résulte alors de la formule (10.2.1) que le bifoncteur $(X, Y) \mapsto \mathbf{Hom}(X, Y)$ transforme les limites inductives de l'argument X (resp. les limites projectives de l'argument Y) en limites projectives dans E.

Proposition 10.3. — *Soit $v : E \to E'$ un morphisme de topos. Pour un objet variable X de E et un objet variable Y de E', on a un isomorphisme bifonctoriel.*

$$v_* \mathbf{Hom}_E(v^*Y, X) \simeq \mathbf{Hom}_{E'}(Y, v_*X). \tag{10.3.1}$$

Démonstration. Pour tout objet Z de E', on a une suite d'isomorphismes, fonctoriels en tout les arguments :

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{Hom}_{E'}(Z, v_* \mathbf{Hom}_E(v^*Y, X)) & \simeq \mathrm{Hom}_E(v^*Z, \mathbf{Hom}_E(v^*Y, X)) & \text{(adjonction)} \\
\mathrm{Hom}_E(v^*Z, \mathbf{Hom}_E(v^*Y, X)) & \simeq \mathrm{Hom}_E(v^*Z \times v^*Y, X) & \text{(10.2.1)} \\
\mathrm{Hom}_E(v^*Z \times v^*Y, X) & \simeq \mathrm{Hom}_E(v^*(Z \times Y), X) & (v^* \text{ exact à gauche}) \\
\mathrm{Hom}_E(v^*(Z \times Y), X) & \simeq \mathrm{Hom}_{E'}(Z \times Y, v_*X) & \text{(adjonction)} \\
\mathrm{Hom}_{E'}(Z \times Y, v_*X) & \simeq \mathrm{Hom}_{E'}(Z, \mathbf{Hom}_{E'}(Y, v_*X)) & \text{(10.2.1)}
\end{array}$$

Les deux membres de (10.3.1) représentent donc des foncteurs isomorphes, C.Q.F.D.

Corollaire 10.4. — *Soient $\mathbf{C}$ un $\mathscr{U}$-site, X un $\mathscr{U}$-préfaisceau sur $\mathbf{C}$, Y un $\mathscr{U}$-faisceau sur $\mathbf{C}$,* 492
$\mathscr{V}$ un univers contenant $\mathscr{U}$ tel que $\mathbf{C}$ soit $\mathscr{V}$-petit, $\mathbf{C}\hat{}_{\mathscr{V}}$ le topos des $\mathscr{V}$-préfaisceaux sur $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}^{\sim}_{\mathscr{U}}$ le topos des $\mathscr{U}$-faisceaux sur $\mathbf{C}$. Le préfaisceau $\mathbf{Hom}_{\mathbf{C}\hat{}_{\mathscr{V}}}(X, Y)$ est un $\mathscr{U}$-faisceau. Soit $X \to \underline{a}X$ le morphisme canonique de X dans son faisceau associé. Le morphisme correspondant $\mathbf{Hom}_{\mathbf{C}\hat{}_{\mathscr{V}}}(\underline{a}X, Y) \to \mathbf{Hom}_{\mathbf{C}\hat{}_{\mathscr{V}}}(X, Y)$ est un isomorphisme. On a un isomorphisme canonique $\mathbf{Hom}_{\mathbf{C}\hat{}_{\mathscr{V}}}(\underline{a}X, Y) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathbf{C}^{\sim}_{\mathscr{U}}}(\underline{a}X, Y)$.

10.4.1. — Supposons d'abord que $\mathbf{C}$ soit un petit site et que $\mathscr{V} = \mathscr{U}$. On a alors un morphisme de topos : $\mathbf{C}^{\sim}_{\mathscr{U}} \to \mathbf{C}\hat{}_{\mathscr{U}}$ (4.8), d'où (10.3.1) les assertions dans ce cas. Pour passer de là au cas général, on remarque tout d'abord que le foncteur « faisceau associé » ne dépend pas de l'univers (II 3.6) et que le topos des $\mathscr{V}$-faisceaux sur $\mathbf{C}$ est équivalent au topos des $\mathscr{V}$-faisceaux sur $\mathbf{C}^{\sim}_{\mathscr{U}}$ (III 4 et 1). Il suffit donc de démontrer le lemme suivant :

Lemme 10.4.2. — *Soient E un $\mathscr{U}$-topos, $\mathscr{V}$ un univers contenant $\mathscr{U}$, $E^{\sim}_{\mathscr{V}}$ le topos des $\mathscr{V}$-faisceaux sur E, X et Y deux objets de E. Il existe un isomorphisme canonique $\mathbf{Hom}_E(X, Y) \simeq \mathbf{Hom}_{E^{\sim}_{V}}(X, Y)$.*

10.4.3. — Le foncteur $\epsilon_E : E \to E_{\widetilde{\mathscr{V}}}$ est pleinement fidèle et exact à gauche. Par suite on a, pour tout objet Z de E un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{E_{\widetilde{\mathscr{V}}}}(\epsilon_E Z, \epsilon_E \mathbf{Hom}_E(X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{E_{\widetilde{\mathscr{V}}}}(\epsilon_E Z \times \epsilon_E X, \epsilon_E Y)$$

Mais tout objet de $E_{\widetilde{\mathscr{V}}}$ est limite inductive d'objets provenant de E, d'où (10.2.1) l'assertion.

10.5. — Soit $v : E \to E'$ un morphisme de topos. On se propose de définir quatre morphismes bifonctoriels.

$$\begin{array}{llll} \Phi_v : v^* \mathbf{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathbf{Hom}(v^*X, v^*Y) & , & X \text{ et } Y \text{ objets de } E', \\ \Psi_v : v_* \mathbf{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathbf{Hom}(v_*X, v_*Y) & , & X \text{ et } Y \text{ objets de } E, \\ \Xi_v : \mathbf{Hom}(v_!X,Y) \longrightarrow v_* \mathbf{Hom}(X, v^*Y) & , & X \in \mathrm{ob}\, E, Y \in \mathrm{ob}\, E', \\ \Lambda_v : v_!(X \times v^*Y) \longrightarrow v_!(X) \times Y & & X \in \mathrm{ob}\, E, Y \in \mathrm{ob}\, E', \end{array}$$

493 où, pour définir les morphismes Ξ_v et Λ_v on suppose que le foncteur v^* image réciproque par v admet un adjoint à gauche $v_!$.

10.5.1. — Définition de Ψ_v. Soit X un objet de E. On a un morphisme d'adjonction $v^*v_*X \to X$, d'où, pour tout objet Z de E', un morphisme bifonctoriel $v^*(Z \times v_*X) \to (v^*Z) \times X$. On a donc, pour tout objet Y de E, un morphisme trifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_E((v^*Z) \times X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(v^*(Z \times v_*X), Y).$$

On en déduit, par adjonction, un morphisme trifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{E'}(Z, v_* \mathbf{Hom}(X,Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E'}(Z, \mathbf{Hom}(v_*X, v_*Y));$$

d'où le morphisme Ψ_v.

10.5.2. — Définition de Λ_v. Pour tout objet X de E, on a un morphisme d'adjonction $X \to v^*v_!X$, d'où, pour tout objet Y de E, un morphisme bifonctoriel $X \times v^*Y \to v^*v_!(X) \times v^*Y \simeq v^*(v_!(X) \times Y)$; d'où, par adjonction, le morphisme Λ_v.

10.5.3. — Définition de Ξ_v. Soient X un objet de E, Z et Y deux objets de E'. Le morphisme $\Lambda_v : v_!(X \times v^*Z) \to v_!(X) \times Z$ fournit un morphisme trifonctoriel $\mathrm{Hom}_{E'}(v_!(X) \times Z, Y) \to \mathrm{Hom}_{E'}(v_!(X \times v^*Z), Y))$; d'où, par adjonction, un morphisme trifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{E'}(Z, \mathbf{Hom}(v_!X, Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E'}(Z, v_* \mathbf{Hom}(X, v^*Y));$$

d'où le morphisme Ξ_v.

10.5.4. — Définition de Φ_v. Le morphisme trifonctoriel de (10.5.3)

$$\mathrm{Hom}_{E'}(v_!(Z) \times X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E'}(v_!(Z \times v^*X), Y);$$

où Z est un objet de E et X, Y sont des objets de E', permet d'obtenir, par adjonction, un morphisme trifonctoriel,

$$\mathrm{Hom}_E(Z, v^* \mathbf{Hom}(X,Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(Z, \mathbf{Hom}(v^*X, v^*Y));$$

d'où une définition du morphisme Φ_v. Il existe une deuxième manière de définir Φ_v. Soient X, Y, Z trois objets de E'. Le foncteur $v^* : E' \to E$ fournit un morphisme trifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{E'}(Z \times X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(v^*(Z) \times v^*(X), v^*Y);$$

d'où, par adjonction, un morphisme trifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{E'}(Z, \mathbf{Hom}(X,Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E'}(Z, v_* \mathbf{Hom}(v^*X, v^*Y)).$$

494 On a donc un morphisme bifonctoriel

$$\mathbf{Hom}(X,Y) \longrightarrow v_* \mathbf{Hom}(v^*X, v^*Y);$$

d'où, par adjonction, un morphisme dont on laisse au lecteur le soin de vérifier que c'est bien le morphisme Φ_v défini ci-dessus.

Proposition 10.6. — *Soit $v : E \to E'$ un morphisme de topos.*

1) *Le morphisme Ψ_v (10.5.1) est un isomorphisme pour tout objet Y de E si et seulement si le morphisme d'adjonction $v^* v_* X \to X$ est un isomorphisme. En particulier, le morphisme Ψ_v est un isomorphisme pour tout couple d'objets (X, Y) si et seulement si le foncteur $v_* : E \to E'$ est pleinement fidèle, i.e. si v est un plongement de topos.*
2) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
   (i) *Pour tout couple (X, Y) d'objets de E', le morphisme Φ_v (10.5.4) est un isomorphisme.*
   (ii) *Le foncteur v^* admet un adjoint à gauche $v_!$ et pour tout objet X de E et tout objet Y de E', le morphisme Ξ_v (10.5.3) est un isomorphisme.*
   (iii) *Le foncteur v^* admet un adjoint à gauche $v_!$ et pour tout objet X de E et pour tout objet Y de E', le morphisme Λ_v (10.5.2) est un isomorphisme.*

10.6.1. — La première assertion résulte immédiatement de (10.5.1). Il résulte aussi immédiatement de (10.5.2), (10.5.3), (10.5.4) que (iii) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ ((i) et le foncteur v^* admet un adjoint à gauche $v_!$). Il reste donc à montrer que (i) implique que v^* admet un adjoint à gauche, i.e. (1.8) que (i) implique que v^* commute aux petits produits. Soient e' l'objet final de E' et I un petit ensemble. Comme v^* est exact à gauche, $v^*(e')$ est un objet final de E et comme v^* commute aux limites inductives $v^*(\amalg_I e') \simeq \amalg_I v^*(e')$. Pour tout objet Y de E', on a $\mathbf{Hom}(\amalg_I e', Y) \simeq \Pi_I \mathbf{Hom}(e', Y) \simeq \Pi_I Y$ et $\mathbf{Hom}(\amalg_I v^*(e'), v^* Y) \simeq \Pi_i \mathbf{Hom}(v^*(e'), v^* Y) \simeq \Pi_I v^* Y$. Le morphisme fonctoriel Φ_v induit donc un isomorphisme $v^* \Pi_I Y \simeq \Pi_I v^* Y$ dont on vérifie que c'est l'isomorphisme canonique. C.Q.F.D. 495

Corollaire 10.7. — *Soient E un topos, Z un objet de E, $j_Z : E_{/Z} \to E$ le morphisme de localisation (5.2), X, Y deux objets de E.*

1) *Il existe un isomorphisme bifonctoriel*
$$j_Z^* \mathbf{Hom}(X, Y) \simeq \mathbf{Hom}(j_Z^* X, j_Z^* Y).$$
2) *Soit X' un objet de $E_{/Z}$. Il existe un isomorphisme bifonctoriel*
$$\mathbf{Hom}_E(j_{Z!} X', Y) \simeq j_{Z*} \mathbf{Hom}_{E/Z}(X', j_Z^* Y).$$
3) *Soit Y' un objet de E/Z. Lorsque Z est un ouvert de E, il existe un isomorphisme bifonctoriel*
$$j_{Z*} \mathbf{Hom}(X', Y') \simeq \mathbf{Hom}(j_{Z*} X', j_{Z*} Y').$$

Les assertions 1) et 2) se démontrent en remarquant que le morphisme Λ_{j_Z} est un isomorphisme. Pour l'assertion 3), il suffit de remarquer que j_{Z*} est pleinement fidèle, car $j_{Z!}$ est pleinement fidèle (I 5.7. a)).

Corollaire 10.8. — *Soient E un topos, X, Y et Z trois objets de E, $j_Z : E_{/Z} \to E$ le morphisme de localisation.*

1) *On a un isomorphisme canonique*
$$j_{Z*} j_Z^* Y \simeq \mathbf{Hom}(Z, Y).$$

2) *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_E(Z, \mathbf{Hom}(X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{E_{/Z}}(j_Z^* X, j_Z^* Y).$$

Soit e_Z l'objet final de $E_{/Z}$ (i.e. l'objet $\mathrm{id}_Z : Z \to Z$)). Il résulte de (10.2.1) qu'on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{Hom}_{E/Z}(e_Z, j_Z^* Y) \simeq j_Z^* Y;$$

d'où, d'après (10.7 2), un isomorphisme

$$j_{Z*} j_Z^* Y \simeq \mathbf{Hom}(j_{Z!} e_Z, Y).$$

496 Comme $j_{Z!} e_Z = Z$, on a démontré 1). Démontrons 2). De (10.7), on tire un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{E_{/Z}}(e_Z, j_Z^* \mathbf{Hom}(X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{E_{/Z}}(j_Z^* X, j_Z^* Y);$$

d'où, par adjonction sur le premier membre,

$$\mathrm{Hom}_E(Z, \mathbf{Hom}(X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{E_{/Z}}(j_Z^* X, j_Z^* Y).$$

11. Topos annelés, localisation dans les topos annelés

11.1.1. — Soit $\mathcal{U}$ un univers. On appelle *$\mathcal{U}$-topos annelé* un couple (E, A) où E est un $\mathcal{U}$-topos et A un objet muni d'une structure d'anneau. On appelle $\mathcal{U}$-site annelé un couple (C, A) où C est un $\mathcal{U}$-site et A un $\mathcal{U}$-faisceaux d'anneaux sur C. On ne mentionne pas l'univers lorsque le contexte ne prête pas à confusion. À un site annelé (C, A) est associé le topos annelé $(C^{\sim}, A)$. À un topos annelé (E, A) est associé le site annelé constitué par le site E et le faisceau d'anneaux représenté par A.

11.1.2. — Soit (E, A) un topos annelé. On note ${}_A E$ (resp. E_A) la catégorie des faisceaux de A-modules (nous écrirons aussi A-Modules) à gauche (resp. à droite) unitaires. La catégorie ${}_A E$ (resp. E_A) est une catégorie abélienne (II 6.7). Soient M et N deux faisceaux de A-modules à gauche (resp. à droite). Le groupe commutatif des morphismes de A-Modules de M dans N est noté $\mathrm{Hom}_A(M, N)$.

11.1.3. — Soient A, B et C trois anneaux d'un topos E, M un faisceau de $A - B$ bimodules, N un faisceau de $A - C$ bimodules à gauche. Soit e un objet final de E et posons $\mathrm{Hom}(e, B) = \Gamma(B)$, $\mathrm{Hom}(e, C) = \Gamma(C)$. La structure de $A - B$ bimodule de M fournit un homomorphisme d'anneaux de $\Gamma(B)^\circ$ dans l'anneau des endomorphismes du A-module M et de même, la structure de $A - C$ bimodule de N fournit un homomorphisme d'anneaux de $\Gamma(C)^\circ$ dans l'anneau des endomorphismes du A-module N. On en déduit, par fonctorialité, une structure de $\Gamma(B) - \Gamma(C)$ bimodule sur le groupe commutatif $\mathrm{Hom}_A(M, N)$. En particulier, lorsque A est un faisceau d'anneaux commutatifs, le groupe $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ est muni canoniquement d'une structure de $\Gamma(A)$-module.

497 *11.1.4.* — Soient E un topos, A et B deux anneaux de E, $u : A \to B$ un morphisme de faisceaux d'anneaux, M un B-module (à gauche pour fixer les idées). Le faisceau M peut-être considéré comme un faisceau de A-modules par l'intermédiaire de u : pour tout objet X de E, $M(X)$ est muni de la structure de $A(X)$-module déduite de sa structure de $B(X)$-module

et de l'homomorphisme $u(X) : A(X) \to B(X)$ par restriction des scalaires. On obtient ainsi un foncteur « *restriction des scalaires par u* »

$$\mathrm{Res}(u) : {}_BE \longrightarrow {}_AE.$$

11.1.5. — En particulier lorsque $A = \mathbf{Z}$ (faisceau constant $\underline{\mathbf{Z}}$ i.e. faisceau associé au préfaisceau constant $\mathbf{Z}$) et lorsque $u : \underline{\mathbf{Z}} \to B$ est l'unique morphisme canonique, on obtient un foncteur de ${}_BF$ dans la catégorie ${}_{\underline{\mathbf{Z}}}E$ qui n'est autre que la catégorie des faisceaux abéliens notée E_{Ab}. Ce foncteur est appelé le *foncteur faisceau abélien sous-jacent.*

Proposition 11.1.6. — *Le foncteur restriction des scalaires par u commute aux limites inductives et projectives. Il est conservatif.*

La proposition est vraie pour le foncteur restriction des scalaires pour les modules ordinaires, i.e. lorsque E est le topos ponctuel. Elle est donc vraie lorsque E est le topos des préfaisceaux sur un petit site. Il résulte alors de la détermination des limites inductives et projectives à l'aide du foncteur faisceau associé (II 6.4) que la proposition est vraie dans le cas général.

11.2.1. — Soient (E, A) un topos annelé, X un objet de E, $j_X : E_{/X} \to E$ le morphisme de localisation 5.2. D'après III 1.7 ou 3.1.2, le faisceau j_X^*A est muni canoniquement d'une structure d'anneau. Le faisceau d'anneaux j_X^*A est noté le plus souvent $A|X$ ou bien encore, abusivement, A. Sauf mention du contraire, le topos $E_{/X}$ sera annelé par $A|X$. Le faisceau $j_{X*}j_X^*A$ est muni canoniquement d'une structure d'anneau. Le morphisme d'adjonction $A \to j_{X*}j_X^*A$ est un morphisme de faisceaux d'anneaux.

11.2.2. — Soit de plus M un A-module (à gauche pour fixer les idées). Le faisceau j_X^*M est muni d'une structure de $A|X$-module (III 1.7 ; ou 3.1.2) ; d'où un foncteur : 498

$$j_X^* : {}_AE \longrightarrow {}_{A|X}E_{/X}$$

appelé foncteur de restriction à $E_{/X}$, ou encore foncteur de restriction à X. Le foncteur j_X^* commute aux limites inductives et projectives (*loc. cit.*). Il est en particulier exact. Soit maintenant N un $A|X$-Module. Le faisceau $j_{X*}N$ est un faisceau de $j_{X*}A|X$-Modules (III 1.7 ou 3.1.2) ; d'où, par restriction des scalaires par le morphisme d'adjonction $A \to j_{X*}(A|X)$ (11.1.4), un A-Module encore noté $j_{X*}N$. On a donc défini un foncteur

$$j_{X*} : {}_{A|X}E_{/X} \longrightarrow {}_AE$$

qui commute aux limites projectives (11.1.6 et III 1.7). Pour tout A-Module M, le morphisme d'adjonction $M \to j_{X*}j_X^*M$ est un morphisme de A-Modules. Pour tout $A|X$-Module N et tout A-Module M, le morphisme d'adjonction $M \to j_{X*}j_X^*M$ définit un morphisme bifonctoriel en M et N

$$\mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^*M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}N). \tag{11.2.2.1}$$

Ce dernier morphisme est un isomorphisme i.e. les foncteurs j_X^* et j_{X*} pour les A-Modules, sont adjoints (III 1.7).

11.2.3. — Les foncteurs j_X^* et j_{X*} pour les Modules, commutent au foncteur « ensemble sous-jacent » (III 1.7 4)). Ils commutent donc aux foncteurs restriction des scalaires et en particulier au foncteur faisceau abélien sous-jacent.

Proposition 11.3.1. — *Soient (E, A) un topos annelé, X un objet de E. Le foncteur*

$$j_X^* : {}_A E \longrightarrow {}_{A|X}E_{/X}$$

admet un adjoint à gauche noté $j_{X!} : {}_{A|X}E_{/X} \to {}_A E$ et appelé le prolongement par zéro. Le foncteur prolongement par zéro est exact et fidèle et commute aux limites inductives. Les fonc-
499 *teurs $j_{X!}$ pour les Modules commutent aux foncteurs restriction des scalaires et, en particulier, ils commutent au foncteur faisceau abélien sous-jacent.*

L'existence du foncteur $j_{X!}$ résulte de III 1.7. Comme $j_{X!}$ est un adjoint à gauche, il commute aux limites inductives (I 2). Pour démontrer les autres assertions, supposons d'abord que E soit le topos des préfaisceaux d'ensembles sur une petite catégorie C contenant l'objet X. On sait alors que $E_{/X}$ est équivalent à la catégorie des préfaisceaux sur $C_{/X}$ et que, modulo cette équivalence, le foncteur $j_X^* : E \to E_{/X}$ n'est autre que la composition avec le foncteur d'oubli $C_{/X} \to C$ (I 5.11). Il résulte alors immédiatement de la construction explicite de $j_{X!}$ (I 5.1) que pour tout $A|X$-Module N et pour tout objet Y de C, on a

$$j_{X!}N(Y) = \bigoplus_{u \in \mathrm{Hom}_C(Y,X)} N(u);$$

d'où l'exactitude de $j_{X!}$ et le fait que le prolongement par zéro commute aux foncteurs restriction des scalaires dans ce cas. Dans le cas général, on peut supposer que E est le topos des faisceaux sur un petit site C et que X provient d'un objet de C (1.2.1). Le topos $E_{/X}$ est alors équivalent au topos des faisceaux sur $C_{/X}$ (muni de la topologie induite) (III 5.4) et le morphisme de topos $j_X : E_{/X} \to E$ provient du foncteur d'oubli $C_{/X} \to C$ qui est continu et cocontinu (III 5.2). Il résulte alors de III 1.7) que le prolongement par zéro pour les faisceaux s'obtient en composant le prolongement par zéro pour les préfaisceaux avec le foncteur faisceau associé ; d'où l'assertion d'exactitude et la commutation aux restrictions des scalaires.

Pour démontrer la fidélité, il revient au même de montrer que pour $A|X$-Module N, le morphisme d'adjonction

$$\mathrm{ad}_N : N \longrightarrow j_X^* j_{X!} N$$

est un monomorphisme. Or, en notant $j_{\widehat{X}!}$ le foncteur prolongement par zéro pour les préfaisceaux et $\underline{a}$ le foncteur « faisceau associé », on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\mathrm{ad}_N"] \arrow[dr, "\mathrm{ad}_{\widehat{N}}"'] & j_X^* \underline{a} j_{\widehat{X}!} N \\
 & \underline{a} j_X^* j_{\widehat{X}!} N, \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

500 où $\mathrm{ad}_{\widehat{N}}$ est le morphisme d'adjonction pour les préfaisceaux. Le morphisme $\mathrm{ad}_{\widehat{N}}$ est un monomorphisme d'après ce qui précède, donc $\underline{a}(\mathrm{ad}_{\widehat{N}})$ est un monomorphisme. De plus, comme

le foncteur d'oubli $C_{/X} \to C$ est continu et cocontinu, le morphisme canonique $\underline{a}j_X^* \to j_X^*\underline{a}$ est un isomorphisme (III 2.3). Par suite ad_N est un monomorphisme.

Remarque 11.3.2. — Soit N un $A|X$-Module. Le faisceau d'ensemble sous-jacent à $j_{X!}N$ n'est pas, en général, isomorphe au faisceau obtenu en prolongeant par le vide (**??** et 5.2) le faisceau d'ensemble sous-jacent à N. On prendra donc garde de ne pas confondre le foncteur *prolongement par zéro* noté $j_{X!} : {}_{A|X}E_{/X} \to {}_AE$ dans 11.3.1, et le foncteur prolongement par le vide noté encore $j_{X!} : E_{/X} \to E$ dans III 5.3 et IV 5.2. Dans la plupart des cas rencontrés dans la pratique, l'abus de notations signalé ci-dessus n'amène pas de confusions. Lorsqu'une confusion est néanmoins possible, nous utiliserons les notations $j_{X!}^{\mathrm{ab}}$ et $j_{X!}^{\mathrm{ens}}$ pour désigner respectivement les foncteurs prolongement par zéro et prolongement par le vide.

Proposition 11.3.3. — *Soient (E, A) un topos annelé et X un objet de E. Le A-Module $j_{X!}(A|X)$, noté le plus souvent A_X ou $A_{X,E}$, est le A-Module libre engendré par X* (II 6.5) *i.e. pour tout A-Module M, on a un isomorphisme canonique, fonctoriel en M :*

$$\mathrm{Hom}_E(X, M) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(A_X, M).$$

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille topologiquement génératrice de E (II 3.0.1). *La famille $(A_{X_i})_{i\in I}$ est une famille génératrice de la catégorie des A-Modules.*

Soit e_x l'objet final du topos $E_{/X}$ ($e_X = X \xrightarrow{\mathrm{id}} X$). On a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{A|X}(A|X, j_X^*M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{E_{/X}}(e_X, j_X^*M);$$

déduit de la section unité $e_X \to A/X$; d'où, par adjonction, un isomorphisme **501**

$$\mathrm{Hom}_A(j_{X!}^{\mathrm{ab}}(A|X), M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_E(j_{X!}^{\mathrm{ens}}(e_X), M).$$

Comme $j_{X!}^{\mathrm{ens}}(e_X) = X$, on obtient l'isomorphisme annoncé. La dernière assertion résulte de II 6.6.

Remarque 11.3.4. — Soient A et B deux faisceaux d'anneaux sur un topos E, X un objet de E et N un $A|X$-$B|X$-bi Module. Le faisceau abélien obtenu en prolongeant N par zéro est muni canoniquement d'une structure de A-B-biModule ainsi qu'il résulte immédiatement de sa description explicite (11.3.1). En particulier le A-module libre engendré A_X est un A-biModule.

Exercice 11.3.5. — Soient E un topos, X un objet de E, $x : P \to E$ un point de E (6.1), $(x_i)_{i\in I}$ la famille des points de $E_{/X}$ au-dessus de x (en correspondance biunivoque avec la fibre X_x (6.7.2). Montrer que pour tout faisceau abélien M sur $E_{/X}$, la fibre $(j_{X!}M)_x$ est canoniquement isomorphe à $\bigoplus_i M_{x_i}$.

12. Opération sur les modules

Proposition 12.1. — *Soient (E, A) un topos annelé, M et N deux A-Modules à gauche (resp. à droite). Le foncteur sur E qui a tout objet X de E associe le groupe commutatif* $\mathrm{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}_E(X, N))$ *est représentable par un faisceau abélien noté* $\mathbf{Hom}_A(M, N)$ *(ou* *parfois* $\mathbf{Hom}(M,N)$ *lorsqu'aucune confusion n'en résulte). Pour tout objet X de E on a un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{Hom}_A(M,N)(X) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^* M, j_X^* N). \tag{12.1.1}$$

On a un isomorphisme canonique $\mathbf{Hom}_E(X,N) = j_{X*}j_X^*N$ (10.8) et par suite $\mathbf{Hom}_E(X,N)$ est muni fonctoriellement en X d'une structure de A-Module à gauche (resp. à droite). Le foncteur $X \to \mathbf{Hom}_E(X,N)$ transforme les limites inductives de l'argument X en limites projectives de A-Modules (10.2 et 11.2.3) et par suite le foncteur

$$X \longrightarrow \mathrm{Hom}_Z(M, \mathbf{Hom}_E(X,N))$$

502 transforme les limites inductives de l'argument X en limites projectives de groupes commutatifs, donc en limites projectives des ensembles sous-jacents. Il est donc représentable (1.4 et 1.2) et l'objet qui le représente est muni d'une structure de faisceau abélien. On a, par définition, pour tout objet X de E, un isomorphisme canonique

$$\mathbf{Hom}_A(M,N)(X) = \mathrm{Hom}(X, \mathbf{Hom}_A(M,N)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}(X,N)) \tag{12.1.2}$$

et l'isomorphisme (12.1.1) résulte de (12.1.2), de l'isomorphisme $\mathbf{Hom}(X,N) \approx j_{X*}j_X^*N$ (10.8) et des formules d'adjonction de 10.

12.2. — Le faisceau abélienne $\mathbf{Hom}_A(M,N)$ est appelé le *faisceau des morphismes de A-Modules de M dans N*. C'est un bifoncteur en M et N. Il résulte de sa définition et de (10.2) qu'il transforme les limites projectives de l'argument N (resp. les limites inductives de M) en limites projectives de faisceaux abéliens. En particulier il est exact à gauche en ses deux arguments.

Proposition 12.3. — *Soient (E,A) un topos annelé, M et N deux A-Modules à droite (resp. à gauche), X un objet de E :*

a) *On a des isomorphismes canoniques :*

$$\mathbf{Hom}_A(M,N)(X) \approx \mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}j_X^*N) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^*M, j_X^*N) \simeq \mathrm{Hom}_A(j_{X!}j_X^*M, N)$$

b) *On a un isomorphisme canonique :*

$$\Phi_X : j_X^* \mathbf{Hom}_A(M,N) \simeq \mathbf{Hom}_{A|X}(j_X^*M, j_X^*N)$$

Soit de plus P un $A|X$-Module à droite (resp. à gauche) :

c) *On a un isomorphisme canonique :*

$$j_{X*} \mathbf{Hom}_{A|X}(j_X^*M, P) \simeq \mathbf{Hom}_A(M, j_{X*}P)$$

d) *On a un isomorphisme canonique :*

$$\Xi_X : \mathbf{Hom}_A(j_{X!}P, N) \simeq j_{X*} \mathbf{Hom}_{A|X}(P, j_X^*N)$$

Les isomorphismes de a) résultent de (12.1.2), de l'isomorphisme $\mathbf{Hom}_E(X,N) \simeq j_{X*}j_X^*N$ (10.8) et des formules d'adjonction de 10.

Démontrons d). Pour tout objet Y de $E_{/X}$ on a la suite d'isomorphismes :

$\mathrm{Hom}(Y, j_X^* \mathbf{Hom}_A(M,N)) \simeq \mathrm{Hom}(j_{X!}Y, \mathbf{Hom}_A(M,N))$ (adjonction pour les faisceaux d'ensembles)

$$\mathrm{Hom}(j_{X!}Y, \mathbf{Hom}_A(M,N)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}_E(j_{X!}Y, N)) \qquad (12.2.1)$$
$$\mathrm{Hom}(M, \mathbf{Hom}_E(j_{X!}Y, N)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}\mathbf{Hom}_{E_{/X}}(Y, j_X^*N)) \qquad (10.7)$$
$$\mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}\mathbf{Hom}_{E_{/X}}(Y, j_X^*N)) \simeq \mathrm{Hom}_{A/X}(j_X^*M, \mathbf{Hom}_E(Y, j_X^*N)) \qquad (11.2.2.1)$$
$$\mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^*M, \mathbf{Hom}_E(Y, j_X^*N)) \simeq \mathrm{Hom}(Y, \mathbf{Hom}_{A|X}(j_X^*M, j_X^*M)) \qquad (12.2.1)$$

503

Démontrons c). Pour tout objet Y de E, on a la suite d'isomorphismes :

$$\mathrm{Hom}(Y, j_{X*}\mathbf{Hom}_{A|X}(j_X^*M, P)) \simeq \mathrm{Hom}(j_X^*Y, \mathbf{Hom}_{A|X}(j_X^*M; P)) \qquad \text{(adjonction)}$$
$$\mathrm{Hom}(j_X^*Y, \mathbf{Hom}_{A|X}(j_X^*M, P)) \simeq \mathrm{Hom}_{A/X}(j_X^*M, \mathbf{Hom}_{E_{/X}}(j_X^*Y, P)) \qquad (12.2.1)$$
$$\mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^*M, \mathbf{Hom}_{E_{/X}}(j_X^*Y, P)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}\mathbf{Hom}_{E_{/X}}(j_X^*Y, P)) \qquad (11.2.2.1)$$
$$\mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}\mathbf{Hom}_{E_{/X}}(j_X^*Y, P)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}_E(Y, j_{X*}P)) \qquad (10.3)$$
$$\mathrm{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}_E(Y, j_{X*}P)) \simeq \mathrm{Hom}(Y, \mathbf{Hom}_A(M, j_{X*}P)) \qquad (12.2.1)$$

Démontrons d). Pour tout objet Y de E, on à la suite d'isomorphismes :

$$\mathrm{Hom}(Y, \mathbf{Hom}_A(j_{X!}P, N)) \simeq \mathrm{Hom}_A(j_{X!}P, \mathbf{Hom}_E(Y, N)) \qquad (12.2.1)$$
$$\mathrm{Hom}_A(j_{X!}P, \mathbf{Hom}_E(Y, N)) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(P, j_X^*\mathbf{Hom}_E(Y, N)) \qquad (11.3.1)$$
$$\mathrm{Hom}_{A/X}(P, j_X^*\mathbf{Hom}_E(Y, N)) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(P, \mathbf{Hom}_{E_{/X}}(j_X^*Y, j_X^*N)) \qquad (10.7)$$
$$\mathrm{Hom}_{A/X}(P, \mathbf{Hom}_{E_{/X}}(j_X^*Y, j_X^*N)) \simeq \mathrm{Hom}(j_X^*Y, \mathbf{Hom}_{A/X}(P, j_X^*N)) \qquad (12.2.1)$$
$$\mathrm{Hom}(j_X^*Y, \mathbf{Hom}_{A|X}(P, j_X^*N)) \simeq (Y, j_{X*}\mathbf{Hom}_{A|X}(P, j_X^*N)) \qquad \text{(adjonction)}$$

Corollaire 12.4. — *Soient C un $\mathcal{U}$-site, A' un $\mathcal{U}$-préfaisceau d'anneaux sur C, M un $\mathcal{U}$-préfaisceau de A'-modules (à gauche pour fixer les idées), N un $\mathcal{U}$-faisceau de A'-modules (à gauche). Notons A le faisceau associé à A', de sorte que les faisceaux N et $\underline{a}M$ (faisceau associé à M) sont des A-Modules. Le préfaisceau $X \mapsto \mathrm{Hom}_{A'|X}(j_X^*M, j_X^*N)$ est un $\mathcal{U}$-faisceau abélien canoniquement isomorphe à $\mathbf{Hom}_A(\underline{a}M, N)$.*

En effet il résulte de III 5.5 et III 2.3 que le foncteur de localisation à $C_{/X}$ commute avec les foncteurs faisceaux associés (pour C et $C_{/X}$). Par suite, on a des isomorphismes fonctoriels en l'objet variable X de C :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{A'|X}(j_X^*M, j_X^*N) &\simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(\underline{a}j_X^*M, j_X^*N)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^*\underline{a}M, j_X^*N) \simeq \mathbf{Hom}_A(\underline{a}M, N)(X).\end{aligned}$$

Corollaire 12.5. — *Soient E un topos, A, B, C trois faisceaux d'anneaux sur E, M un $A-B$ biModule, N un $A-C$ biModule. Le faisceau abélien $\mathbf{Hom}_A(M,N)$ est muni canoniquement d'une structure de $B-C$ biModule. En particulier lorsque A est un faisceau d'anneaux commutatifs et lorsque M et N sont des A-Modules, $\mathbf{Hom}_A(M,N)$ est muni canoniquement d'une structure de A-Module. Les isomorphismes canoniques* b), c), d) *de* 12.3 *sont des isomorphismes de biModules.* 504

Nous nous bornerons à donner des indications. Pour tout objet X de E, on a $\mathbf{Hom}_A(M,N)(X) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^* M, j_X^* N)$ (12.3). Par suite, le groupe commutatif $\mathbf{Hom}_A(M,N)(X)$ est muni canoniquement d'une structure de $B(X) - C(X)$ bimodule (11.1.3) dont on vérifie qu'elle est fonctorielle en X. Les autres assertions sont laissées au lecteur.

Corollaire 12.6. — *Soient (E, A) un topos annelé, X un objet de A, N un A-Module (à gauche pour fixer les idées). On a des isomorphismes canoniques de A-Modules :*

$$\mathbf{Hom}_E(X,N) \simeq j_{X*} j_X^* N \simeq \mathbf{Hom}_A(A_X, N);$$

la structure de A-Module sur $\mathbf{Hom}_A(A_X, N)$ provenant de la structure de biModule sur A_X (11.3.4).

Le premier isomorphisme résulte de 10.7, le deuxième de l'isomorphisme de A-Modules $N \simeq \mathbf{Hom}_A(A, N)$ et de 12.3.

Proposition 12.7. — *Soient (E, A) un topos annelé, M un A-Module à droite et N un A-Module à gauche. Le foncteur qui à tout faisceau abélien P associe le groupe commutatif* $\mathrm{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}_{\underline{\mathbf{Z}}}(N,P))$ *est représentable par un faisceau abélien noté $M \otimes_A N$ et appelé le produit tensoriel sur A de M et de N.*

On a une injection canonique de $\mathrm{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}_{\underline{\mathbf{Z}}}(N,P))$ dans l'ensemble $\mathrm{Hom}(M, \mathbf{Hom}(N,P)) \simeq \mathrm{Hom}(M \times N, P)$; On constate aussitôt, en revenant aux définitions, qu'un morphisme f de faisceaux d'ensembles de $M \times N$ dans P provient d'une élément de $\mathrm{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}_Z(N,P))$ si et seulement si pour tout objet X de E, $f(X)$:
505 $M(X) \times N(X) \to P(X)$ est une application $A(X)$-bilinéaire de $M(X) \times N(X)$ dans $P(X)$. Appelons morphisme A-bilinéaire les morphismes de faisceaux d'ensembles de $M \times N$ dans P qui possèdent cette propriété. Il s'agit donc de représenter le foncteur des morphismes A-bilinéaires de $M \times N$ dans P. Pour cela on procède comme dans le cas ordinaire i.e. comme dans le cas où E est le topos ponctuel. Considérons les huit morphismes :

(i): $M \times M \times N \longrightarrow M \times N \qquad 1 \leq i \leq 3$
(i): $M \times N \times N \longrightarrow M \times N \qquad 4 \leq i \leq 6$
(i): $M \times A \times N \longrightarrow M \times N \qquad 7 \leq i \leq 8$

définis par les formules :

(1) $(m_1, m_2, n) \longmapsto (m_1 + m_2, n)$
(2) $(m_1, m_2, n) \longmapsto (m_1, n)$
(3) $(m_1, m_2, n) \longmapsto (m_2, n)$
(4) $(m, n_1, n_2) \longmapsto (m, n_1 + n_2)$
(5) $(m, n_1, n_2) \longmapsto (m, n_1)$
(6) $(m, n_1, n_2) \longmapsto (m, n_2)$
(7) $(m, a, n) \longmapsto (ma, n)$
(8) $(m, a, n) \longmapsto (m, an)$;

où la formule (i) décrit l'application (i)(X) pour les objets variables X de E. Notons L le foncteur « faisceau abélien libre engendré ». Il est clair que le plus grand quotient (au sens des faisceaux abéliens) de $L(M \times N)$ qui égalise le morphisme $L(1)$ à $L(2) + L(3)$, $L(4)$ à

$L(5) + L(6)$ et $L(7)$ à $L(8)$ représente le foncteur des morphismes A-bilinéaires de $M \times N$ dans P.

12.8. — On constate que le foncteur $P \mapsto \mathrm{Hom}_A(N, \mathbf{Hom}_{\underline{\mathbf{Z}}}(M, P))$ est aussi canoniquement isomorphe au foncteur des applications A-bilinéaires de $M \times N$ dans P. Par suite le produit tensoriel $M \otimes_A N$ représente aussi le foncteur $\mathrm{Hom}_A(N, \mathbf{Hom}_{\underline{\mathbf{Z}}}(M, P))$. On a donc des isomorphismes, fonctoriel en tout les arguments :

$$\mathrm{Hom}_Z(M \otimes_A N, P) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}_{\underline{\mathbf{Z}}}(N, P)), \tag{12.8.1}$$

$$\mathrm{Hom}_Z(M \otimes_A N, P) \simeq \mathrm{Hom}_A(N, \mathbf{Hom}_{\underline{\mathbf{Z}}}(M, P)). \tag{12.8.2}$$

12.9. — Il résulte de (12.8), ou bien de (12.8.1) et de (12.2) que le foncteur $\otimes_A$ commute aux 506
limites inductives en ses deux arguments.

Proposition 12.10. — *Soient C un $\mathscr{U}$-site, A' un préfaisceau d'anneaux sur C, M' (resp. N') un A'-module à droite (resp. à gauche), A, M, N les faisceaux associés à A', M' et N' respectivement. Le faisceau associé au préfaisceau $X \mapsto M'(X) \otimes_{A(X)} N'(X)$ $(X \in \mathrm{ob}\, C)$ est canoniquement isomorphe au faisceau $M \otimes_A N$.*

Le préfaisceau $X \mapsto M'(X) \otimes_{A'(X)} N'(X)$ peut se construire à partir des préfaisceaux M', N' et A' par les opérations indiquées dans la démonstration de 12.7. Comme le foncteur « faisceau associé » commute aux limites projectives et inductives finies et aux foncteurs « objet abélien libre engendré », la formation du produit tensoriel commute au foncteur « faisceau associé ».

Proposition 12.11. — *Soient (E, A) un topos annelé, M un A-Module à droite, N un A-Module à gauche, X un objet de E.*

a) *On a un isomorphisme canonique*

$$j_X^*(M \otimes_A N) \simeq (j_X^* M) \otimes_A (j_X^* N).$$

Soient de plus P un A/X-Module à droite et Q un A/X module à gauche.

b) *On a des isomorphismes canoniques (formules de projection) :*

$$j_{X!}(P \otimes_{A|X} j_X^* N) \simeq (j_{X!} P) \otimes_A N$$
$$j_{X!}(j_X^* M \otimes_{A|X} Q) \simeq M \otimes_A (j_{X!} Q).$$

Démontrons a). Pour tout faisceau abélien R sur $E_{/X}$, on a la suite d'isomorphismes fonctoriels en R :

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Z}}}(j_X^*(M \otimes_A N), R) \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Z}}}(M \otimes_A N, j_{X*} R) \quad (11.2.2.1)$$
$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Z}}}(M \otimes_A N, j_{X*} R) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}_Z(N, j_{X*} R)) \quad (12.8.1)$$
$$\mathrm{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}_Z(N, j_{X*} R)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}\, \mathbf{Hom}_{\underline{\mathbf{Z}}}(j_X^* N, R)) \quad (12.3)$$
$$\mathrm{Hom}_A(M, j_{X*}\, \mathbf{Hom}_{\underline{\mathbf{Z}}}(j_X^* N, R)) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(j_X^* M, \mathbf{Hom}_{\underline{\mathbf{Z}}}(j_X^* N, R)) \quad (11.2.2.1)$$
$$\mathrm{Hom}_{A/X}(j_X^* M, \mathbf{Hom}_{\underline{\mathbf{Z}}}(j_X^* N, R) \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Z}}}(j_X^* M \otimes_A j_X^* N, R) \quad (12.8.1)$$

Exhibons le premier isomorphisme de b). Pour tout faisceau abélien R, on a une 507 suite d'isomorphismes fonctoriels en R :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_Z(j_{X!}(P \otimes_{A|X} j_X^* N), R) \simeq \mathrm{Hom}_Z(P \otimes_{A|X} j_X^* N, j_X^* R) && (11.3.1)\\
&\mathrm{Hom}_Z(P \otimes_{A|X} j_X^* N, j_X^* R) \simeq \mathrm{Hom}_{A/X}(P, \mathbf{Hom}_Z(j_X^* N, j_X^* R)) && (12.8.1)\\
&\mathrm{Hom}_{A|X}(P, \mathbf{Hom}_Z(j_X^* N, j_X^* R)) \simeq \mathrm{Hom}_{A|X}(P, j_X^* \mathbf{Hom}_Z(N, R)) && (12.3)\\
&\mathrm{Hom}_{A|X}(P, j_X^* \mathbf{Hom}_Z(N, R)) \simeq \mathrm{Hom}_A(j_{X!} P, \mathbf{Hom}_Z(N, R)) && (11.3.1)\\
&\mathrm{Hom}_A(j_{X!} P, \mathbf{Hom}_Z(N, R)) \simeq \mathrm{Hom}_Z(j_{X!} P \otimes_A N, R) && (12.8.1)
\end{aligned}$$

Le deuxième isomorphisme s'obtient de manière analogue à l'aide de (12.8.2).

Corollaire 12.12. — *Soient E un topos, A, B, C trois faisceaux d'anneaux sur E, M un $B-A$ biModule, N un $A-C$ biModule. Le faisceau abélien $M \otimes_A N$ est muni canoniquement d'une structure de $B-C$ biModule. En particulier, lorsque A est un faisceau d'anneaux commutatifs et lorsque M et N sont des A-Modules, $M \otimes_A N$ est muni canoniquement d'une structure de A-Module. Les isomorphismes de 12.9 sont des isomorphismes de biModules.*

Pour tout objet X de E, $j_X^* M$ est un $A|X$-Module à droite sur lequel opère, à gauche, l'anneau $B(X)$ et de même, $j_X^* N$ est un A/X-Module à gauche sur lequel opère, à droite, $C(X)$. Par fonctorialité, le faisceau abélien $j_X^* M \otimes_{A/X} j_X^* N \simeq j_X^*(M \otimes_A N)$ est muni d'une structure de $B(X) - C(X)$ « objet », structure qui varie fonctoriellement en X. Par suite $M \otimes_A N$ est muni d'une structure de $B-C$ biModule. Cette structure de $B(X)-C(X)$ objet sur $j_X^*(M \otimes_A N)$ se reflète de façon évidente sur le foncteur « morphisme A-bilinéaire ». On constate alors que, lorsque A est commutatif et lorsque M et N sont des A-Modules, les structures de A-Modules à droite et à gauche qu'on obtient sont « égales » et par suite $M \otimes_A N$ est dans ce cas un A-Module. La dernière assertion est laissée au lecteur.

508 ***Corollaire 12.13.*** — *Soient (E, A) un topos annelé, M un A-Module à gauche (resp. à droite), X un objet de E. On a (avec la notation A_X de 11.3.3) un isomorphisme canonique*

$$A_X \otimes_A M \simeq J_{X!} j_X^* M \ \textit{(resp. } M \otimes_A A_X \simeq j_{X!} j_X^* M\textit{)).}$$

résulte des formules de projections (12.11).

Proposition 12.14. — *Soient E un topos, A et B deux faisceaux d'anneaux sur E, M un A-Module à droite, N un $A-B$ biModule, P un B-Module à droite. On a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_B(M \otimes_A N, P) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}_B(N, P)).$$

De (12.8.1) on tire un morphisme A-bilinéaire canonique $\mathbf{Hom}_Z(N, P) \times N \to P$; d'où, en se restreignant à $\mathbf{Hom}_B(N, P) \times N$ (qui est un sous-faisceau), un morphisme A-bilinéaire $\mathbf{Hom}_B(N, P) \times N \to P$ dont on vérifie immédiatement qu'il est B-linéaire sur le deuxième facteur. On a donc un morphisme canonique de B-Modules $\mathbf{Hom}_B(N, P) \otimes_A N \to P$; d'où une application canonique, fonctorielle en M :

$$\mathrm{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}_B(N, P)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A N, P). \tag{12.14.1}$$

Montrons que ce morphisme de foncteurs est un isomorphisme. Comme les deux membres transforment les limites inductives de M en limites projectives, il suffit de montrer que (12.14.1) est un isomorphisme, lorsque M parcourt une famille génératrice de la catégorie

E_A. Il suffit donc de montrer que (12.14.1) est un isomorphisme lorsque $M = A_X$ où X est un objet de E. La vérification est alors immédiate.

13. Morphisme de topos annelés

Définition 13.1. — *Soient (E, A) et (E', A') deux topos annelés. Un morphisme de topos annelé $u : (E, A) \to (E', A')$ est un couple (m, θ) où $m : E \to E'$ est un morphisme de topos* (3.1) *et $\theta : m^* A' \to A$ est un morphisme d'Anneaux.*

13.1.1. — Comme le foncteur $m^* : E' \to E$ est adjoint à gauche au foncteur $m_* : E \to E'$, se donner un morphisme de topos annelés $(m, \theta) : (E, A) \to (E', A')$ revient à se donner un morphisme de topos $m : E \to E'$ et un morphisme de faisceaux d'anneaux $\Theta : A' \to m_* A$.

13.2. — A un morphisme de topos annelés $u = (m, \theta) : (E, A) \to (E', A^*)$, on associe deux 509
foncteurs remarquables entre les catégories de Modules :

13.2.1. Le foncteur image directe pour les Modules :— Soit M un A-Module à gauche (resp. à droite). L'objet $m_* M$ est muni canoniquement d'une structure de $m_* A$-Module ; d'où par restriction des scalaires par le morphisme canonique $\Theta' : A' \to m_* A$, un A'-Module noté $u_*(M)$ et appelé *l'image directe de M par le morphisme u.*

13.2.2. Le foncteur image réciproque pour les Modules :— Soit N un A'-Module à gauche (resp. à droite). L'objet $m^* N$ de E est muni canoniquement d'une structure de $m^* A'$-Module à gauche (resp. à droite). Le A-Module à gauche $A \otimes_{m^* A'} m^* N$ (resp. à droite $m^* N \otimes_{m^* A'} A$) où A est muni de la structure de $m^* A'$-Module définie par $\theta : m^* A' \to A$, est noté $u^* N$ et est appelé l'*image réciproque du Module N par le morphisme de topos annelé u.*

13.2.3. — On notera que pour tout A-Module M, le faisceau d'ensembles et le faisceau abélien sous-jacent à $u_* M$ est le faisceau $m_* M$. Aussi emploie-t-on le plus souvent la notation u_* pour désigner le foncteur m_* : image directe pour les faisceaux d'ensembles. En revanche pour un A'-Module N, le faisceau d'ensembles ou le faisceau abélien sous-jacent à $u^* N$ n'est ni égal ni isomorphe en général à $m^* N$ (sauf toutefois lorsque θ est un isomorphisme). Il y a donc lieu de distinguer entre l'image réciproque pour les Modules et l'image réciproque pour les faisceaux d'ensembles ou les faisceaux abéliens. On utilise le plus souvent la notation $u^{-1} : E' \to E$ pour désigner le foncteur m^* image inverse pour les faisceaux d'ensembles. Le foncteur u^{-1} est appelé le foncteur *image réciproque « ensembliste »* par le morphisme de topos annelé u, par opposition avec l'image réciproque « au sens modules » u^*.

Définition 13.3. — *Soient (C, A) et (C', A') deux $\mathcal{U}$-sites annelés. Un morphisme de sites annelés $u : (C, A) \to (C', A')$ est un couple (m, θ) où m est un morphisme du site $\mathbf{C}$ dans le site $\mathbf{C}'$ (4.9) et $\theta : m^* A' \to A$ un morphisme d'Anneaux.* 510

13.3.1. — Un morphisme de topos annelé est un morphisme de $\mathcal{U}$-sites annelés. Un morphisme de sites annelés donne naissance à un morphisme entre les topos annelés correspondants (11.1.1 et 4.9.1).

Proposition 13.4. — *Soit $u : (E, A) \to (E', A')$ un morphisme de topos annelés.*

a) *Pour un A-Module à gauche (resp. à droite) variable M, et pour un A'-Module à gauche (resp. à droite) variable N, on a des isomorphismes bifonctoriels canoniques (dits isomorphismes d'adjonction) :*

$$\mathrm{Hom}_A(u^* N, M) \simeq \mathrm{Hom}_{A'}(N, u_* M), \tag{13.4.1}$$

$$u_* \mathbf{Hom}_A(u^* N, M) \simeq \mathbf{Hom}_{A'}(N, u_* M). \tag{13.4.2}$$

b) *Pour un objet variable X de E', on a un isomorphisme canonique, fonctoriel en X :*

$$u^* A'_X \longrightarrow A_{u^{-1}(X)}, \tag{13.4.3}$$

où A'_X et $A_{u^{-1}(X)}$ désignent les Modules libres engendrés (11.3.3).

c) *Lorsque A' est commutatif et lorsque le morphisme canonique $u^{-1}A' \to A$ est central (resp. lorsque le morphisme canonique $u^{-1}A' \to A$ est un isomorphisme) on a, pour un A'-Module à droite M variable et un A'-Module à gauche N variable, un isomorphisme bifonctoriel canonique :*

$$u^* M \otimes_A u^* N \simeq u^*(M \otimes_{A'} N) \tag{13.4.4}$$

(resp. (13.4.5)
$$u^* M \otimes_A u^* N \simeq u^{-1}(M \otimes_{A'} N)).$$

On a tout d'abord un isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}_A(u^* N, M) \simeq \mathrm{Hom}_{u^{-1}A'}(u^{-1} N, M)$ (12.14), puis un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{u^{-1}A'}(u^{-1} N, M) \simeq \mathrm{Hom}_{A'}(N, u_* M)$ (III 1.7) ; d'où (13.4.1). Exhibons l'isomorphisme (13.4.2). Pour tout objet X de E', on a la suite d'isomorphismes fonctoriels :

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{Hom}_{E'}(X, u_* \mathbf{Hom}_A(u^* N, M)) \simeq \mathrm{Hom}(u^{-1} X, \mathbf{Hom}_A(u^* N, M)) & & \text{(adjonction)},\\
\mathrm{Hom}_A(u^* N, \mathbf{Hom}_E(u^{-1} X, M)) \simeq \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' & & (12.1),\\
\mathrm{Hom}_A(u^* N, \mathbf{Hom}_E(u^{-1} X, M)) \simeq \mathrm{Hom}_{A'}(N, u_* \mathbf{Hom}_E(u^{-1} X, M)) & & (13.4.1),\\
\mathrm{Hom}_{A'}(N, \mathbf{Hom}_{E'}(X, u_* M)) \simeq \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' & & (10.3.1),\\
\quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \simeq \mathrm{Hom}_{A'}(X, \mathbf{Hom}_{A'}(N, u_* M)) & & (12.1).
\end{array}$$

511 La formule (13.4.5) s'obtient alors à partir de la formule 13.3.2. par adjonction (définition du produit tensoriel (12.7)). La formule (13.4.4) se déduit de (13.4.5) en utilisant la commutativité du produit tensoriel lorsque l'anneau de base est commutatif (12.8). Enfin, pour démontrer (13.4.3), on considère la suite d'isomorphismes

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{Hom}_A(u^* A'_X, M) \simeq \mathrm{Hom}_{A'}(A'_X, u_* M) & (13.4.1),\\
\mathrm{Hom}_{E'}(X, u_* M) \simeq \quad '' \quad '' \quad '' & (11.3.3),\\
\quad '' \quad '' \quad '' \simeq \mathrm{Hom}_E(u^{-1} X, M) & \text{(adjonction)},\\
\mathrm{Hom}_A(A_{u^{-1}X}, M) \simeq \quad '' \quad '' \quad '' & (11.3.3).
\end{array}$$

Corollaire 13.5. — *Soient (E, A) un topos annelé, $x : P \to E$ un point de E, $F \mapsto F_x$ le foncteur fibre associé (6.1). Le foncteur fibre en x transforme le produit tensoriel des A-Modules en produit tensoriel (ordinaire) des A_x-modules.*

Le produit tensoriel dans P est le produit tensoriel ordinaire des modules (P le topos ponctuel est la catégorie des ensembles). L'assertion résulte donc de (13.4.4).

Corollaire 13.6. — *Soit $u : (E, A) \to (E', A')$ un morphisme de topos annelés. Le foncteur u_* image directe pour les Modules à droite ou à gauche commute aux limites projectives et en particulier est exact à gauche. Le foncteur u^* image réciproque pour les Modules à droite ou à gauche commute aux limites inductives et en particulier est exact à droite.*

Ceci résulte de la formule (13.4.1) (I 2.11).

13.7. — On notera que le foncteur u^*, image réciproque pour les Modules, n'est pas, en général, exact, alors que le foncteur u^{-1}, image réciproque ensembliste, est exact. On peut cependant affirmer l'exactitude de u^* lorsque le morphisme canonique $u^{-1}A' \to A$ est plat (à droite ou à gauche) (V 1.8). C'est en particulier le cas lorsque le morphisme canonique **512**
$u^{-1}A' \to A$ est un isomorphisme.

13.8. — Soient C un $\mathcal{U}$-site, A' un préfaisceau d'anneaux sur C, et notons A le faisceau associé à A'. La catégorie des préfaisceaux de A'-modules qui sont des faisceaux est équivalente à la catégorie des A-Modules. On utilise parfois la notation $\mathrm{Hom}_{A'}(M, N)$ pour désigner le groupe $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ (11.1.2). De même, et abusivement, on utilise les notations $\mathbf{Hom}_{A'}(M, N)$ et $M \otimes_{A'} N$ pour désigner les faisceaux $\mathbf{Hom}_A(M, N)$ et $M \otimes_A N$. Lorsque $A' = k_E$ est le préfaisceau constant, défini par un anneau ordinaire k, on écrit aussi $\mathbf{Hom}_k$, $\otimes_k$ au lieu de $\mathbf{Hom}_{k_E}$, $\otimes_{k_E}$

Exercice 13.9. — *Topos localement annelés* (cf. [9] pour plus de renseignements dans l'ordre d'idées qui suit).

Soit $(E, \mathcal{O}_E)$ un topos commutativement annelé. Pour $X \in \mathrm{ob}\, E$ et $f \in \mathcal{O}_E(X)$, soit X_f le plus grand sous-objet de X sur lequel f soit inversible.

a) Montrer que pour $X' \in \mathrm{ob}\, E_{/X}$, $f_{X'}$ est inversible si et seulement si le morphisme structural $X' \to X$ se factorise par X_f, et que pour $f, g \in \mathcal{O}_E(X)$, on a
$$X_{fg} = X_f \cap X_g.$$

b) Montrer que les conditions suivantes (i) à (iii) sont équivalentes :

(i) Pour $X \in \mathrm{ob}\, E$ et $f, g \in \mathcal{O}_E(X)$, on a
$$X_{f+g} \subset \mathrm{Sup}(X_f, X_g)$$

(ii) Pour $X \in \mathrm{ob}\, E$ et $f, g \in \mathcal{O}_E(X)$ tels que $f + g$ soit inversible, on a $X = \mathrm{Sup}(X_f, X_g)$.

(iii) Pour $X \in \mathrm{ob}\, E$ et $f \in \mathcal{O}_E(X)$, on a
$$X = \mathrm{Sup}(X_f, X_{1-f}).$$

Montrer que ces conditions impliquent la condition suivante (iv), et sont équi- **513**
valentes à cette dernière si E a suffisamment de points :

(iv) Pour tout point p de E, l'anneau fibre $\mathcal{O}_{E,p}$ est un *anneau local.*

Lorsque les conditions équivalentes (i) à (iii) sont satisfaites, on dira que $(E, \mathcal{O}_E)$ est un *topos localement annelé*, et on dit de même qu'un site annelé est un *site localement annelé* si le topos annelé correspondant est un topos localement annelé.

c) Soient $(E, \mathcal{O}_E)$ et $(E', \mathcal{O}_{E'})$ deux topos localement annelés, et f un morphisme de topos annelés du premier dans le second. Montrer que la condition (i) suivante implique la condition (ii) et lui est équivalente si E a suffisamment de points :

(i) Pour tout $X \in \operatorname{ob} E'$ et $s' \in \mathcal{O}_{E'}(X')$, posant $X = f^{-1}(X)$, $s = f^*(s')$, on a

$$X'_{s'} = f^{-1}(X_s).$$

(ii) Pour tout point p de E, posant $p' = f(p)$, l'homomorphisme naturel sur les fibres

$$\mathcal{O}_{E',p'} \longrightarrow \mathcal{O}_{E,p}$$

est un homomorphisme *local* d'anneaux locaux.

Lorsque la condition (i) est satisfaite, on dira que f est un *morphisme de topos localement annelés*, ou encore un *morphisme admissible de topos localement annelés* si une confusion est à craindre. On désigne par $\mathbf{Homtoplocan}(E, E')$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathbf{Homtopan}(E, E')$ de tous les morphismes de topos annelés de E dans E' définie par les morphismes admissibles de E dans E'.

d) Supposons que $(E, \mathcal{O}_E)$ soit le topos annelé associé à un espace topologique annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ (2.1). Montrer que pour que $(E, \mathcal{O}_E)$ soit localement annelé, il faut et il suffit que $(X, \mathcal{O}_X)$ soit localement annelé, i.e. que pour tout $x \in X$, la fibre $\mathcal{O}_{X,x}$ soit un anneau local. (Noter que dans le critère (iv) de b), il suffit de prendre le point p dans une
514 famille *conservatrice* de points de E). Soit $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (X', \mathcal{O}_{X'})$ un morphisme d'espaces annelés, où $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_{X'}$ sont des faisceaux d'anneaux locaux. Montrer que le morphisme de topos annelés correspondant $\mathrm{Top}(X, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Top}(X', \mathcal{O}_{X'})$ est admissible si et seulement si il en est de même pour le morphisme f, i.e. ; si et seulement si pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_{X',f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est un homomorphisme *local* d'anneaux locaux.

e) Soient $(E, \mathcal{O}_E)$ et $(E', \mathcal{O}_{E'})$ deux topos localement annelés, tels que E ait suffisamment de points et que $(E', \mathcal{O}_{E'})$ soit équivalent au topos annelé défini par un *schéma* $(X', \mathcal{O}_{X'})$; prouver que la catégorie $\mathbf{Homtoplocan}(E, E')$ est équivalente à une catégorie *discrète*, i.e. que c'est un groupoïde (tout morphisme est un isomorphisme) rigide (les groupes d'automorphismes des objets sont les groupes unité).
(Hint : se ramener au cas où $(E, \mathcal{O}_E)$ est le topos ponctuel annelé par un corps). On se rappellera que, par contre, $\mathbf{Homtop}(E, E')$ n'est pas en général équivalent à une catégorie discrète, même si E et E' sont des topos définis par des schémas (et même si E est le topos ponctuel), cf. 4.2.3.

f) Soient E un topos localement annelé, P le topos annelé défini par l'espace annelé $\operatorname{Spec} k$, où k est un corps. Montrer que les morphismes admissibles de topos localement annelés $P \to E$ correspondent aux couples (p, u) d'un point p de E, et d'une injection de $k(p)$ dans k. où $k(p)$ est le corps résiduel de l'anneau local $\mathcal{O}_{E,p}$. Généraliser en un énoncé exhibant les morphismes admissibles d'un topos localement annelé ponctuel dans E (généralisant EGA 1 2.4.4).

On appelle *point géométrique d'un topos localement annelé* E tout morphisme admissible dans E du topos localement annelé défini par un espace annelé de la forme $\operatorname{Spec}(k)$, où k est un corps *algébriquement clos*. Définir la *catégorie des points géométriques de* E (sous-entendu : correspondants à des corps $k \in \mathcal{U}$), notée $\mathbf{Ptgéom}(E)$, et un foncteur canonique $\mathbf{Ptgéom}(E) \to \mathbf{Point}(E)$. Montrer que ce foncteur est fidèle
515 si et seulement si E n'a pas de point i.e. $\mathbf{Point}(E)$ est la catégorie vide.

g) Soient E un $\mathcal{U}$-topos, V un univers tel que $U \in V$. Définir une 2-catégorie $(\mathcal{V}\text{-}\mathcal{U}\text{-}\mathrm{Top})_{/E}$ en termes de l'objet E de la 2-catégorie $(\mathcal{V}\text{-}\mathcal{U}\text{-}\mathrm{Top})$ (3.3.1), en s'inspirant de 5.14 a). Lorsque E est annelé par un Anneau A, définir de même une 2-catégorie

$(V\text{-}\mathscr{U}\text{-Topan})_{/E}$, et lorsque E est localement annelé, utilisant la notion de morphisme admissible (cf. c)), définir une 2-catégorie $(\mathscr{V}\text{-}\mathscr{U}\text{-Topanloc})_{/E}$, admettant **Ptgéom**$(E)$ (cf. f)) comme sous-catégorie pleine.

14. Modules sur un topos défini par recollement

14.1. — Soient (E, A) un topos annelé, U un sous-topos ouvert de E, F le sous-topos fermé complémentaire, $j : U \to E$ et $i : F \to E$ les morphismes canoniques (9.3). Le topos U est annelé par j^*A (11.2.1) et le morphisme de topos i, complété de manière évidente, devient un morphisme de topos annelés. Dans ce numéro, le topos F sera annelé par le faisceau i^*A, noté $A|F$, et le morphisme j, complété de manière évidente, est alors un morphisme de topos annelés.

14.2. — On a donc deux morphismes de topos annelés :

$$j : (U, A|U) \longrightarrow (E, A) \text{ et } i : (F, A|F) \longrightarrow (E, A);$$

d'où cinq foncteurs entre les catégories de Modules (à gauche pour fixer les idées) correspondantes :

(14.2.1)
$$\begin{tikzcd} ({}_{A|U}U) \arrow[r, shift left=4, "j_!"] & ({}_A E) \arrow[l, "j^*"'] \arrow[l, phantom, shift right=4, ""] \arrow[r, shift left=2, "i^*"] & ({}_{A|F}F) \arrow[l, shift left=2, "i_*"] \\ {} \end{tikzcd}$$
$$\text{avec } ({}_{A|U}U) \xrightarrow{j_*} ({}_A E) \quad .$$

Chaque foncteur du diagramme (14.2.1) est adjoint à gauche à celui qui se trouve au-dessous de lui.

14.3. — On sait que le foncteur $X \mapsto (j^*X, i^*X\,; i^*X \to i^*j_*j^*X)$ est une équivalence de 516
E dans le topos (U, F, i^*j_*) (9.5.4). Cette équivalence induit une équivalence entre les catégories de Modules correspondantes et par suite le foncteur $P \mapsto (j^*P, i^*P; i^*P \to i^*j_*j^*P)$ est une équivalence, notée Φ, de la catégorie ${}_AE$ dans la catégorie $({}_{A|U}U, {}_{A|F}F, i^*j_*)$. Les foncteurs de (14.2.1) composés avec Φ ou Φ^{-1} sont alors les foncteurs :

$$\begin{aligned}
\Phi \circ j_* &: M \mapsto (M, i^*j_*M; i^*j_*M \xrightarrow{\text{id}} i^*j_*M),\\
j^* \circ \Phi^{-1} &: (M, N; N \to i^*j_*M) \mapsto M,\\
\Phi \circ j_! &: M \mapsto (M, 0; 0 \to i^*j_*M),\\
\Phi \circ i_* &: N \mapsto (0, N; N \to 0),\\
i^* \circ \Phi^{-1} &: (M, N; N \to i^*j_*M) \mapsto N.
\end{aligned}$$

Le lecteur pourra, à titre d'exercice, expliciter les différents morphismes d'adjonction.

14.4. — Notons

(14.4.1)
$$i^! : {}_AE \longrightarrow {}_{A|F}F$$

le foncteur défini par la formule :

(14.4.2)
$$i^! \circ \Phi^{-1}(M, N; N \xrightarrow{u} i^*j_*M) = \mathrm{Ker}(u).$$

Proposition 14.5. — *Le foncteur $i^!$ est adjoint à droite au foncteur i_*. Le morphisme d'adjonction $i_* i^! \to$* id *est un monomorphisme. Les foncteurs $i^!$ (pour des anneaux variables) commutent aux foncteurs restriction des scalaires.*

Il est clair que tout morphisme

$$(0, N; 0) \longrightarrow (M, N; N \xrightarrow{u} i^* j_* M)$$

se factorise d'une manière unique par $(0, \ker(u); 0)$; ce qui démontre la propriété d'adjonction. Les autres assertions sont triviales.

517 ***Proposition 14.6.*** — *Pour tout objet P de ${}_A E$, on a les suites exactes fonctorielles en P :*

$$0 \longrightarrow j_! j^* P \longrightarrow P \longrightarrow i_* i^* P \longrightarrow 0; \tag{14.6.1}$$

$$0 \longrightarrow i_! i^* P \longrightarrow P \longrightarrow j_* j^* P, \tag{14.6.2}$$

où les flèches non triviales sont les flèches d'adjonction.

Remarquons d'abord qu'une suite

$$(M', N'; u') \longrightarrow (M, N; u) \longrightarrow (M'', N''; u'')$$

de $({}_{A/U}U, {}_{A/F}F; i^* j_*)$ est exacte si et seulement si les suites correspondantes

$$M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$$
$$N' \longrightarrow N \longrightarrow N''$$

sont exactes.

Les suites (14.6.1) et (14.6.2) sont transformées par l'équivalence Φ en des suites du type (14.3) :

$$0 \longrightarrow (M, 0; 0) \longrightarrow (M, N; u) \longrightarrow (0, N; 0) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow (0, \ker(u); 0) \longrightarrow (M, N, u) \longrightarrow (M, i^* j_* M; \mathrm{id}).$$

La vérification de l'exactitude de ces suites est triviale.

14.7. — La suite exacte (14.6.2) permet d'obtenir une nouvelle interprétation du foncteur $i_! i^*$. En effet soit X un objet de E. De (14.6.2) on tire la suite exacte de groupes commutatifs :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(X, i_* i^! P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(X, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(X, j_* j^* P).$$

Notons encore U l'ouvert de E, objet final du sous-topos ouvert U. Il résulte des propriétés d'adjonction des foncteurs j_*, j^* et $j_!^{\mathrm{ens}}$ que le groupe $\mathrm{Hom}_E(X, j_* j^* P)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}_E(X \times U, P)$ et que le morphisme $\mathrm{Hom}_E(X, P) \to \mathrm{Hom}_E(X, j_* j^* P)$ n'est autre que le morphisme défini par le monomorphisme $X \times U \to X$ (5). En d'autres termes (8.5.2) :

518 ***Proposition 14.8.*** — *Les sections de $i_* i^! P$ sur $E_{/X}$ sont les sections de P sur $E_{/X}$ dont le support* (9.3.5) *contient F. En d'autres termes, $i_* i^! P$ est le plus grand sous-faisceau de P à support contenu dans F.*

14.9. — Par abus de langage, on dit parfois que $i_*i^!P$ est le sous-Module de P défini par les sections de P à support dans F. Il résulte de 8.5.3 que cette terminologie ne fait qu'étendre aux topos généraux une terminologie utilisée pour les topos de faisceaux sur des espaces topologiques.

Proposition 14.10. — 1) *Le foncteur $P \mapsto i_*i^*P$ est isomorphe au foncteur $P \mapsto i_*i^*A \otimes_A P$.*

2) *Le foncteur $P \mapsto i^!i^*P$ est isomorphe au foncteur $P \to \mathbf{Hom}_A(i_*i^*A, P)$.*

La suite exacte (14.6.1) s'écrit, dans le cas particulier où P est le A-Module A :

$$0 \longrightarrow A_U \longrightarrow A \longrightarrow i_*i^*A \longrightarrow 0 \tag{14.10.1}$$

où A_U est le A-Module libre engendré par l'ouvert U correspondant au sous-topos ouvert U (9 et 11.3.3). Pour tout A-Module P, les A-Modules $j_!j^*P$ et j_*j^*P sont canoniquement isomorphes respectivement à $A_U \otimes_A P$ et $\mathbf{Hom}_A(A_U, P)$ (12.3. et 12.6). De plus, les morphismes canoniques $j_!j^*P \to P$ et $P \to j_*j^*P$ proviennent, modulo ces isomorphismes, du monomorphisme $A_U \to A$. On tire donc de la suite exacte **??**, deux suites exactes (12.2 et 12.11) :

$$j_!j^*P \longrightarrow P \longrightarrow i_*i^*A \otimes_A P \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathbf{Hom}_A(i_*i^*A, P) \longrightarrow P \longrightarrow j_*j^*P,$$

d'où les isomorphismes annoncés par comparaison avec (14.6.1) et (14.6.2).

Références 519

[1] M. Artin et B. Mazur, Homotopy of varieties in the etale topology, in : Proceedings of a Conference on Local Fields, Driebergen 1966, Springer.

[2] P. Gabriel et G. Zisman, Calculus of fractions and homotopy theory, Ergebnisse der Mathematik, Bd 35.

[3] J. Giraud, Algèbre homologique non commutative : Grundlehren Springer 1971.

[4] A. Grothendieck, sur quelques points d'Algèbre homologique, Tohoku Math. Journal, (cité [Toh]).

[5] A. Grothendieck, Fondements de la Géométrie Algébrique, (Recueil d'exposés Bourbaki 1957/62), Secrétariat mathématique, II rue P. Curie Paris.

[6] A. Grothendieck, Crystals and the De Rham cohomology of schemes, (notes by I. Coates et O. Jussila), in : Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland Pub, Cie, 1969.

[7] A. Grothendieck, Classes de Chern des représentations linéaires des groupes discrets, in : Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland Pub. Cie, 1969.

[8] R. Godement, Théorie des faisceaux, Act. Scient. Ind. n° 1 252, (1958), Hermann (Paris) (cité [TF]).

[9] M. Hakim, Topos annelés et schémas relatifs, Thèse multigraphiée, Orsay 1967.

[10] D. Mumford, Picard groups of moduli problems, in Arithmetic Algebraic Geometry, Harper's Series in Modern Mathematics.

[11] Nguyen Dinh Ngoc, Thèse Sciences Mathématiques, Paris 1963, n° 4 995.

[12] J.E. Roos, Distributivité des $\varinjlim$ par rapports aux $\varprojlim$ des topos
a) CR t.259 p. 969-972 b) CR T. 259 p. 1605-1608
c) CR t.259 p. 1801-1804 (août et septembre 1964).

[13] P. Deligne - D. Mumford, The irreductibility of the space of curves of given genus, Pub. math. n° 36 (1969).

[14] B. Mitchell, Theory of categories, Academic Press (1965).

[15] J. Lurie, Higher Topos Theory, Annals of Mathematics Studies, 170. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. xviii+925 pp.

[16] P. Johnstone, Topos theory, London Mathematical Society Monographs, Vol. 10. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1977. xxiii+367 pp.

[17] F. Borceux, G. Van den Bossche, Structure des topologies d'un topos, Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, t. 25, n°1 (1984), p 37-39.