II. Topologies et faisceaux
J.-L. Verdier
version : `71766d9 2024-07-30 10:46:55 +0800`

Table des matières

Après la définition des topologies et prétopologies (n°1) et des faisceaux d'ensembles 1
(n°2), on aborde dans le n°3 le théorème central de cet exposé (3.4) : l'existence du faisceau associé à un préfaisceau. Afin de couvrir tous les cas rencontrés dans la pratique, l'existence de ce foncteur est démontrée pour les préfaisceaux sur un $\mathscr{U}$-site (3.0.2). Les n°4 et n°5 tirent les conséquences de ce théorème sur le comportement des limites inductives et projectives dans les catégories de faisceaux. Au n°6 on définit et étudie les faisceaux à valeurs dans des catégories quelconques, pour porter tout de suite l'attention sur les faisceaux d'anneaux, de groupes, de modules etc.

1. Topologies, familles couvrantes, prétopologies

Définition 1.1. — *Une topologie sur une catégorie C est la donnée, pour tout objet X de C, d'un ensemble $J(X)$ de cribles de X, cette donnée étant soumise aux axiomes suivants :*

- T 1) (Stabilité par changement de base). *Pour tout objet X de C, tout crible $R \in J(X)$, tout morphisme $f : Y \to X (Y \in \mathrm{ob}(C))$, le crible $R \times_X Y$ de Y appartient à $J(Y)$.*
- T 2) (Caractère local). *Si R et R' sont deux cribles de X, si $R \in J(X)$, et si pour tout $Y \in$ $\mathrm{ob}(C)$ et tout morphisme $Y \to R$ le crible $R' \times_X Y$ appartient à $J(Y)$, alors R' appartient* 2
à $J(X)$.
- T 3) *Pour tout objet X de C, X appartient à $J(X)$.*

1.1.1. — Les cribles appartenant à $J(X)$ seront appelés les *cribles couvrant X*, ou encore les *raffinements de X*. Des axiomes (T1), (T2), (T3), on déduit immédiatement que l'ensemble des cribles couvrant X est stable par intersections finies, et que tout crible contenant un crible couvrant est un crible couvrant. L'ensemble $J(X)$, ordonné par inclusion, est donc cofiltrant (I 8).

1.1.2. — Soient C une catégorie, T et T' deux topologies sur C. La topologie T est dite *plus fine que la topologie T'* si pour tout objet X de C, tout raffinement de X pour la topologie T' est un raffinement de X pour la topologie T. On définit, de cette façon, une structure d'ordre sur l'ensemble des topologies.

1.1.3. — Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille de topologies sur C. Les ensembles, pour tout objet X de C, des cribles de X qui sont couvrants pour toutes les topologies T_i, vérifient les axiomes (T 1), (T 2) et (T 3) et définissent donc une topologie : la *topologie intersection* des T_i, i.e. la borne inférieure des T_i. C'est la plus fine des topologies qui soit moins fine que toutes les topologies T_i. La famille $(T_i)_{i\in I}$ admet par suite une *borne supérieure* : la topologie intersection des topologies plus fines que chacune des T_i.

3 *1.1.4.* — En particulier la donnée $J(X)$ = l'ensemble de tous les cribles de X, est une topologie plus fine que toute topologie sur C, que nous appellerons *topologie discrète.*

Il existe une topologie moins fine que toute topologie sur C ; la topologie pour laquelle $J(X) = \{X\}$ pour tout X de C. Cette topologie est appelée la topologie *grossière* ou *chaotique.*

1.1.5. — Une catégorie C munie d'une topologie est appelée un *site.* La catégorie C est appelée la *catégorie sous-jacente au site.*

Définition 1.2. — *Soient C un site, X un objet de C. Une famille de morphismes $(f_\alpha : X_\alpha \to X)$, $\alpha \in A$, est dite couvrante si le crible engendré par la famille f_α* (I 4.3.3) *est un crible couvrant X.*

1.1.6. — Soit C une catégorie. Donnons-nous pour chaque objet X de C, un ensemble de familles de morphismes de but X. Il existe alors une topologie T qui est la moins fine des topologies pour lesquelles les familles données soient couvrantes, à savoir l'intersection (1.1.3) de toutes les topologies en question. On appelle cette topologie la *topologie engendrée par les ensembles de familles de morphismes donnés.* Il est malaisé de décrire, en général, tous les cribles couvrants de cette topologie. Cependant la situation est plus agréable dans le cas suivant :

Définition 1.3. — *Soit C une catégorie. Une prétopologie sur C est la donnée, pour chaque objet X de C, d'un ensemble* $\mathrm{Cov}(X)$ *de familles de morphismes de but X, cette donnée étant soumise aux axiomes suivants :*

4 PT 0) *Pour tout objet X de C, les morphismes des familles de morphismes de* $\mathrm{Cov}(X)$ *sont quarrables. (Rappelons qu'un morphisme $Y \to X$ est dit quarrable si pour tout morphisme $Z \to X$ le produit fibré $Z \times_X Y$ est représentable).*

PT 1) *Pour tout objet X de C, toute famille $(X_\alpha \to X)_{\alpha\in A}$ appartenant à* $\mathrm{Cov}(X)$*, et tout morphisme $Y \to X$ ($Y \in \mathrm{ob}(C)$), la famille : $(X_\alpha \times_X Y \to Y)_{\alpha\in A}$ appartient à* $\mathrm{Cov}(Y)$*. (Stabilité par changement de base).*

PT 2) *Si $(X_\alpha \to X)_{\alpha\in A}$ appartient à* $\mathrm{Cov}(X)$ *et si pour chaque $\alpha \in A$, $(X_{\beta_\alpha} \to X_\alpha)_{\beta_\alpha \in B_\alpha}$ appartient à* $\mathrm{Cov}(X_\alpha)$*, alors la famille $(X_\gamma \to X)_{\gamma\in\coprod_{\alpha\in A} B_\alpha}$ (où pour tout $\gamma = (\alpha, \beta_\alpha)$, $\alpha \in A$, $\beta_\alpha \in B_\alpha$, le morphisme $X_\gamma \to X$ est le morphisme composé : $X_\gamma = X_{\beta_\alpha} \to X_\alpha \to X$) appartient à* $\mathrm{Cov}(X)$*. (Stabilité par composition).*

PT 3) *La famille : $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X$ appartient à* $\mathrm{Cov}(X)$*.*

1.3.1. — La définition de 1.1.6 nous permet de considérer, pour une *prétopologie* donnée sur C, la *topologie* sur C engendrée par cette prétopologie. Notons que si C est une catégorie où les produits fibrés sont représentables, alors toute topologie T de C peut être définie par une prétopologie, savoir celle pour laquelle $\mathrm{Cov}(X)$ est formé de *toutes* les familles couvrant X pour la topologie T.

Proposition 1.4. — *Soient $\mathbf{C}$ une catégorie, E une prétopologie sur $\mathbf{C}$, T la topologie définie par la prétopologie E (1.1.6), X un objet de $\mathbf{C}$. Désignons par $\boldsymbol{J}_E(X)$ l'ensemble des cribles de X engendrés par les familles de la prétopologie, et par $\boldsymbol{J}_T(X)$ l'ensemble des raffinements de X pour la topologie T. Alors $\boldsymbol{J}_E(X)$ est cofinal dans $\boldsymbol{J}_T(X)$. En d'autres termes, pour qu'un* 5
crible R de X appartienne à $\boldsymbol{J}_T(X)$, il faut et il suffit qu'il existe un crible $R' \in \boldsymbol{J}_E(X)$ tel que $R' \subset R$.

Preuve. — Soit, pour tout objet X de $\mathbf{C}$, $\boldsymbol{J}'(X)$ l'ensemble des cribles de X qui contiennent un crible de $\boldsymbol{J}_E(X)$. On a évidemment $\boldsymbol{J}'(X) \subset \boldsymbol{J}_T(X)$. Pour montrer que $\boldsymbol{J}'(X) = \boldsymbol{J}_T(X)$, il suffit de montrer que la donnée des $\boldsymbol{J}'(X)$ définit une topologie sur $\mathbf{C}$. Or les $\boldsymbol{J}'(X)$ vérifient évidemment les axiomes (T 1) et (T 3). Il reste donc à vérifier (T 2). Pour cela il suffit de démontrer que si R' est un sous-crible de $R \in \boldsymbol{J}_E(X)$ tel que pour tout $Y \to R$, le crible $R' \times_X Y$ de Y appartienne à $\boldsymbol{J}'(X)$, le crible R' appartient à $\boldsymbol{J}'(X)$. Or le crible R est engendré par une famille $(X_\alpha \to X)$ appartenant à $\mathrm{Cov}(X)$, et pour tout α le crible $R' \times_X X_\alpha$ contient un crible engendré par une famille $(X_{\beta_\alpha} \to X_\alpha)$ appartenant à $\mathrm{Cov}(X_\alpha)$. On en déduit que le crible R' contient un crible engendré par la famille $(X_{\beta_\alpha} \to X)$. Donc, d'après l'axiome (PT 2), R' contient un crible de $\boldsymbol{J}_E(X)$ et par suite appartient à $\boldsymbol{J}'(X)$, C.Q.F.D.

2. Faisceaux d'ensembles

Définition 2.1. — *Soit $\mathbf{C}$ un site dont la catégorie sous-jacente est une $\mathcal{U}$-catégorie. Un préfaisceau F à valeurs dans $\mathcal{U}$ — Ens est dit séparé (resp. est un faisceau) si pour tout crible R couvrant X, objet de $\mathbf{C}$, l'application :*

$$\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(X, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(R, F)$$

est une injection (resp. une bijection). La sous-catégorie pleine de $\hat{\mathbf{C}}$ dont les objets sont les 6
faisceaux est appelée la catégories des faisceaux d'ensembles sur $\mathbf{C}$, et est notée le plus souvent $\widetilde{C}$ (i)*. Lorsqu'aucune ambiguïté n'en résultera, nous dirons simplement catégorie des faisceaux sur $\mathbf{C}$; en revanche nous préciserons quelquefois en disant catégorie des faisceaux à valeurs dans $\mathcal{U}$ — Ens ou encore catégorie des $\mathcal{U}$-faisceaux.*

Proposition 2.2. — *Soient $\mathbf{C}$ une $\mathcal{U}$-catégorie, $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{U}$-préfaisceaux sur $\mathbf{C}$. Désignons, pour chaque objet X de $\mathbf{C}$, par $\boldsymbol{J}_{\mathcal{F}}(X)$ l'ensemble des cribles $R \to X$ tels que pour tout morphisme $Y \to X$ de $\mathbf{C}$ de but X, le crible $R \times_X Y$ possède la propriété suivante : l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(Y, F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(R \times_X Y, F_i)$$

est bijective (resp. injective) pour tout $i \in I$. Alors les ensembles $\boldsymbol{J}_{\mathcal{F}}(X)$ définissent une topologie sur $\mathbf{C}$, qui est la plus fine des topologies pour laquelle chacun des F_i soit un faisceau (resp. un préfaisceau séparé).

Preuve. — Les $\boldsymbol{J}_{\mathcal{F}}(X)$ vérifient évidemment des axiomes (T 1) et (T 3). Il reste à montrer qu'ils vérifient (T 2). Pour cela il suffit de montrer que :

---

i. ou $\tilde{C}$, suivant l'humeur de la machine à écrire.

1) Si $R' \hookrightarrow R \hookrightarrow X$ sont deux cribles de X, tels que $R \in J_{\mathcal{F}}(X)$ et tels que pour tout $Y \to R$ (où Y est un objet de C) le crible $R' \times_X Y$ appartienne à $J_{\mathcal{F}}(Y)$, alors le crible R' appartient à $J_{\mathcal{F}}(X)$.
2) Si $R' \hookrightarrow R \hookrightarrow X$ sont deux cribles de X tels que $R' \in J_{\mathcal{F}}(X)$, alors le crible R appartient à $J_{\mathcal{F}}(X)$.

Notons que, dans le cas 2), pour tout $Y \to R$ (où Y est un objet de C) le crible $R' \times_X Y$ appartient à $J_{\mathcal{F}}(Y)$. Or, dans les cas 1) et 2), R est limite inductive des Y, objets de C, au-
7 dessus de R (I 3.4). Les limites inductives dans $C^{\hat{}}$ sont universelles (I 3.3). Par suite dans les cas 1) et 2), R' est limite inductive des $R' \times_X Y$. Or, dans les cas 1) et (2), $R' \times_X Y$ appartient à $J_{\mathcal{F}}(Y)$. On en déduit, en passant à la limite inductive sur les objets Y de C au-dessus de R, que l'application

$$\mathrm{Hom}_{C^{\hat{}}}(R, F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^{\hat{}}}(R', F_i)$$

est une bijection (resp. une injection) pour tout $i \in I$. Par suite les applications

$$\mathrm{Hom}_{C^{\hat{}}}(X, F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^{\hat{}}}(R', F_i) \quad , \quad \mathrm{Hom}_{C^{\hat{}}}(X, F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^{\hat{}}}(R, F_i)$$

sont, dans les cas 1) et 2), des bijections (resp. des injections). De plus, les hypothèses 1) et 2) sont visiblement stables par changement de base quelconque $Y \to X$ (Y objet de C). On en déduit alors que pour tout objet Y de C au-dessus de X et tout $i \in I$, les applications

$$\mathrm{Hom}_{C^{\hat{}}}(Y, F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^{\hat{}}}(R \times_X Y, F_i)$$
$$\mathrm{Hom}_{C^{\hat{}}}(Y, F_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^{\hat{}}}(R' \times_X Y, F_i)$$

sont dans les deux cas des bijections (resp. des injections) ; ce qui montre que R' et R appartiennent à $J_{\mathcal{F}}(X)$, C.Q.F.D.

Corollaire 2.3. — *Soient C une $\mathcal{U}$-catégorie, et pour tout X de C un ensemble $K(X)$ de cribles de X. On suppose que les $K(X)$ vérifient l'axiome* (T 1) *de* (1.1). *Pour qu'un préfaisceau F soit un faisceau (resp. un préfaisceau séparé) pour la topologie engendrée (1.1.6) par les $K(X)$, il faut et il suffit que pour tout objet X de C et tout crible $R \in K(X)$, l'application*

$$\mathrm{Hom}_{C^{\hat{}}}(X, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^{\hat{}}}(R, F)$$

soit une bijection (resp. une injection).

8 ***Corollaire 2.4.*** — *En particulier, soit C une $\mathcal{U}$-catégorie munie d'une prétopologie. Pour qu'un préfaisceau F soit un faisceau (resp. un préfaisceau séparé), il faut et il suffit que pour tout objet X de C et pour toute famille $(X_\alpha \to X)$ appartenant à* $\mathrm{Cov}(X)$, *le diagramme d'ensembles*

$$F(X) \to \prod_{\alpha \in A} F(X_\alpha) \rightrightarrows \prod_{(\alpha,\beta) \in A \times A} F(X_\alpha \times_X X_\beta)$$

soit exact (resp. l'application

$$F(X) \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} F(X_\alpha)$$

soit injective).

Preuve. — On applique 2.3, puis (I 3.5) et (I 2.12).

On retrouve avec le corollaire 2.4 la définition donnée dans [1].

Définition 2.5. — *Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie. On appelle topologie canonique de C la topologie la plus fine pour laquelle les foncteurs représentables soient des faisceaux (2.2). Un crible couvrant X pour la topologie canonique sera appelé crible épimorphique strict universel. Une famille couvrante pour la topologie canonique sera appelée famille épimorphique stricte universelle. Lorsque de plus les morphismes de la famille couvrante sont quarrables, la famille sera dite épimorphique effective universelle* [2].

Remarque 2.5.1. — Pour presque tous les sites qu'on a eu à utiliser jusqu'à présent, la topologie est *moins fine* que la topologie canonique, en d'autres termes, les foncteurs représentables sur C sont des faisceaux, i.e. les familles couvrantes de C sont épimorphiques strictes universelles. La seule exception à cette règle est le site $\widehat{C}$ étudié au n° 5 (dont la topologie 9
est *plus fine,* et le plus souvent strictement plus fine, que la topologie canonique).

Proposition 2.6. — *Pour qu'un crible $R \hookrightarrow X$ soit épimorphique strict universel, il faut et il suffit que pour tout objet $Y \to X$ de C au-dessus de X, et pour tout objet Z de C, l'application :*

$$\mathrm{Hom}_C(Y, Z) \longrightarrow \varprojlim_{C/(Y \times_X R)} \mathrm{Hom}_C(., Z)$$

soit une bijection.

Preuve. — Immédiat en appliquant 2.2 puis (I 5.3).

Remarques 2.7. —

1) La proposition 2.6 donne une caractérisation des cribles épimorphiques stricts universels d'une catégorie C, indépendante de l'univers dans lequel les préfaisceaux prennent leurs valeurs, à la seule condition que les ensembles de morphismes $\mathrm{Hom}(X, Y)$ de C appartiennent à cet univers. Elle permet ainsi de définir la topologie canonique pour toute catégorie C, sans qu'il soit pour cela nécessaire de préciser les univers.
2) Soient C un site dont la catégorie sous-jacente soit une $\mathscr{U}$-catégorie, F un $\mathscr{U}$-préfaisceau et $\mathscr{V}$ un univers contenant $\mathscr{U}$. La catégorie sous-jacente à C est une $\mathscr{V}$-catégorie, et F peut être considéré comme un $\mathscr{V}$-préfaisceau. Le $\mathscr{U}$-préfaisceau F est un faisceau (resp. un préfaisceau séparé) si et seulement si le $\mathscr{V}$-préfaisceau F est un faisceau (resp. un préfaisceau séparé). En d'autres termes, la condition pour un préfaisceau F d'être un faisceau (resp. un préfaisceau séparé) ne dépend pas (au sens qu'on vient 10
de préciser) de l'univers dans lequel le préfaisceau F prend ses valeurs. En particulier soient C un site et F un $\mathscr{U}$-préfaisceau ; on dit que F est un faisceau (resp. un préfaisceau séparé) s'il existe un univers $\mathscr{V}$ contenant $\mathscr{U}$ tel que la catégorie C soit une $\mathscr{V}$-catégorie et tel que F soit un $\mathscr{V}$-faisceau (resp. un $\mathscr{V}$-préfaisceau séparé). Cette propriété ne dépend pas de l'univers $\mathscr{V}$.

3. Faisceau associé à un préfaisceau

Définition 3.0.1. — *Soit C un site. On appelle famille topologiquement génératrice (où lorsqu'aucune confusion n'en résulte, famille génératrice) de C, un ensemble G d'objets de C tel que tout objet de C soit but d'une famille couvrante de morphismes de C (1.2) dont les sources sont des éléments de G.*

Définition 3.0.2. — *Soit $\mathscr{U}$ un univers. On appelle $\mathscr{U}$-site un site* **C** *dont la catégorie sous-jacente est une $\mathscr{U}$-catégorie* (I 1.1)*, qui possède une petite famille topologiquement génératrice. Soit* **C** *une $\mathscr{U}$-catégorie ; on appelle $\mathscr{U}$-topologie sur* **C** *une topologie sur* **C** *faisant de* **C** *un $\mathscr{U}$-site. On dit qu'un site* **C** *est $\mathscr{U}$-petit, ou par abus de langage, petit, si la catégorie sous-jacente à* **C** *est petite* (I 1.0).

3.0.3. — Il résulte immédiatement des définitions que toute topologie plus fine qu'une $\mathscr{U}$-topologie est une $\mathscr{U}$-topologie, et qu'un petit site est un $\mathscr{U}$-site.

11 ***Proposition 3.0.4***. — *Soient* **C** *un $\mathscr{U}$-site,* **G** *une petite famille topologiquement génératrice de* **C**. *Pour tout $X \in \operatorname{ob} \mathbf{C}$, désignons par $J_G(X)$ l'ensemble des cribles couvrant X engendrés par une famille de morphismes*

$$(Y_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} X), \alpha \in A, \text{ où } Y_\alpha \in G.$$

1) *L'ensemble $J_G(X)$ est petit.*
2) *L'ensemble $J_G(X)$ est cofinal dans l'ensemble $J(X)$ de tous les cribles couvrant X, ordonné par inclusion.*
3) *Pour tout $R \in J_G(X)$, il existe une petite famille épimorphique* (I 10.2) $(u_\alpha : Y \to R)$, *$\alpha \in A$, avec $Y \in G$.*

Preuve. — 1) Posons $A(X) = \coprod_{Y \in G} \hom(Y, X)$. L'ensemble $A(X)$ est petit (I 0) et $\operatorname{card}(J_G(X)) \leq 2^{\operatorname{card}(A(X))}$. Par suite $J_G(X)$ est petit.

2) Soit $R \in J(X)$. Posons $A(R) = \coprod_{Y \in G} \operatorname{Hom}(Y, R)$ et soit R' le crible de X engendré par la famille $(Y \xrightarrow{u} R \hookrightarrow X)$, $u \in A(R)$. On a $R' \subset R$ et il suffit de montrer que R' est couvrant. D'après l'axiome (T 2) de 1.1, il suffit de montrer que pour tout morphisme $Z \to R$, $Z \in \operatorname{ob} \mathbf{C}$, le crible $R' \times_X Z$ de Z est couvrant. Or le crible $R' \times_X Z$ contient le crible engendré par la famille de tous les morphismes $Y \to Z$ avec $Y \in G$, famille qui est, par hypothèse, couvrante. Le crible $R' \times_X Z$ de Z est donc couvrant (axiome T2 de 1.1).

3) Soit $R \in J_G(X)$. La famille $(Y \xrightarrow{u} R)$, $u \in A(R) = \coprod_{Y \in G} \operatorname{Hom}(Y, R)$ est, par hypothèse, épimorphique. Or, pour tout $Y \in \operatorname{ob} \mathbf{C}$, $\operatorname{Hom}(Y, R)$ est contenu dans $\operatorname{Hom}(Y, X)$ qui est petit. Par suite $A(R)$ est petit.

3.0.5. — Soient **C** un $\mathscr{U}$-site, $\mathscr{V}$ un univers tel que $\mathbf{C} \in \mathscr{V}$ et $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$, **G** une $\mathscr{U}$-petite famille topologiquement génératrice de **C**. La catégorie $\mathbf{C}^\wedge$ des préfaisceaux de $\mathscr{U}$-ensembles sur **C**
12 est une $\mathscr{V}$-catégorie (I 1.1.1). Soit X un objet de **C**. L'ensemble $J(X)$ des cribles couvrant X est $\mathscr{V}$-petit et, ordonné par inclusion, il est cofiltrant (1.1.1). Pour tout $\mathscr{U}$-préfaisceau F, la limite inductive $\varinjlim_{J(X)} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}^\wedge}(R, F)$ est donc représentable par un élément de V (I 2.4.1). De plus, il résulte de (3.0.4 3)) que, pour tout $R \in J_G(X)$, $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}^\wedge}(R, F)$ est $\mathscr{U}$-petit, et comme $J_G(X)$ est un $\mathscr{U}$-petit ensemble cofinal dans $J(X)$ (*loc. cit.*), il résulte de (I 2.4.2) que $\varinjlim_{J(X)} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}^\wedge}(R, F)$ est $\mathscr{U}$-petit. Choisissons alors, pour tout F et pour tout X, un élément de $\mathscr{U}$ qui représente cette limite inductive et posons

$$LF(X) = \varinjlim_{J(X)} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}^\wedge}(., F)$$

Soit $g : Y \to X$ un morphisme de C. Le foncteur changement de base $g^* : J(X) \to J(Y)$ définit une application :

$$LF(g) : LF(X) \longrightarrow LF(Y).$$

qui fait de $X \mapsto LF(X)$ un préfaisceau sur C.

Le morphisme $\mathrm{id}_X : X \to X$ étant un élément de $J(X)$ on a, pour tout objet X de C, une application :

$$\ell(F)(X) : F(X) \longrightarrow LF(X),$$

définissant visiblement un morphisme de foncteurs :

$$\ell(F) : F \longrightarrow LF.$$

Il est clair de plus que $F \mapsto LF$ est un foncteur en F et que les morphismes $\ell(F)$ définissent un morphisme

$$\ell : \mathrm{Id} \longrightarrow L.$$

Enfin soit $R \hookrightarrow X$ un raffinement de X. La définition de $LF(X)$ et (I 1.4) nous fournissent une application :

$$Z_R : \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(X, LF),$$

et pour tout morphisme de C, $Y \xrightarrow{g} X$, la définition du foncteur LF nous montre que le 13
diagramme ci-après, est commutatif :

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} Z_R : & \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R, F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(X, LF) \arrow[d] \\ Z_{R\times_X Y} : & \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R \times_X Y, F) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(Y, LF) \end{tikzcd}$$

(les flèches verticales sont les flèches évidentes).
Copions alors [2].

Lemme 3.1. — 1) *Pour tout raffinement $i_R : R \hookrightarrow X$ et tout $u : R \to F$, le diagramme :*

$$(**) \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "\ell(F)"] & LF \\ R \arrow[u, "u"] \arrow[r, hook, "i_R"'] & X \arrow[u, "Z_R(u)"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif.

2) *Pour tout morphisme $v : X \to LF$, il existe un raffinement R de X et un morphisme $u : R \to F$ tel que $Z_R(u) = v$.*
3) *Soient Y un objet de C et $u, v : Y \rightrightarrows F$ deux morphismes tels que $\ell(F) \circ u = \ell(F) \circ v$. Alors le noyau du couple (u, v) est un raffinement de Y.*
4) *Soient R et R' deux raffinements de X, $u : R \to F$ et $u' : R' \to F$ deux morphismes. Pour que $Z_R(u) = Z_{R'}(u')$, il faut et il suffit que u et u' coïncident sur un raffinement $R'' \hookrightarrow R \times_X R'$.*

Preuve. — La seule assertion non triviale est l'assertion 1). Il faut montrer que $Z_R(u) \circ i_R = \ell(F) \circ u$. Pour cela il suffit de montrer (I 3.4) que les composés de ces morphismes avec tout
14 morphisme $Y \xrightarrow{g} R$ (Y objet de C) sont égaux. Or, considérons $f = i_R \circ g$ et le produit fibré $R \times_X Y$:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\ell(F)"] & LF \\
R \arrow[u, "u"] \arrow[r, hook, "i_R"'] & X \arrow[u, "Z_R(u)"'] \\
R \times_X Y \arrow[u, "g'"] \arrow[r, "\sim", "i'"'] & Y . \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "g"]
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme ci-dessus, i' est un monomorphisme qui admet une section. Par suite (1.3 3) i' est un isomorphisme. Or par définition du morphisme $\ell(F)$, le morphisme $Z_{R\times_X Y}(u \circ g')$ est égal à $\ell(F) \circ u \circ g$. D'autre part la commutativité du diagramme (*) nous fournit l'égalité $Z_{R\times_X Y}(u \circ g') = Z_R(u) \circ f$, et par suite on a bien l'égalité $\ell(F) \circ u \circ g = Z_R(u) \circ i_R \circ g$.

Proposition 3.2. — 1) *Le foncteur L est exact à gauche* (I 2.3.2).

2) *Pour tout préfaisceau F, LF est un préfaisceau séparé.*
3) *Le préfaisceau F est séparé si et seulement si le morphisme $\ell(F) : F \to LF$ est un monomorphisme. Le préfaisceau LF est alors un faisceau.*
4) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
   (i) *$\ell(F) : F \to LF$ est un isomorphisme.*
   (ii) *F est un faisceau.*

Preuve. — 1) Il suffit de montrer (I 3.1) que pour tout objet X de C, le foncteur $F \mapsto LF(X)$ commute aux limites projectives finies. Or par définition de la limite projective, le foncteur

$$F \longmapsto \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(R, F) \quad R \hookrightarrow X \in \mathrm{ob}(J(X))$$

15 commute aux limites projectives, et la limite inductive $\varinjlim_{J(X)}$ commute aux limites projectives finies car $J(X)$ est une ensemble cofiltrant (I 2.7).

2) Soient X un objet de C et $f, g : X \rightrightarrows LF$ deux morphismes qui coïncident sur un raffinement $R \hookrightarrow X$ de X. En vertu de 3.1 2), il existe un crible couvrant $R' \hookrightarrow X$, qu'on peut toujours supposer contenu dans R, et deux morphismes $u, v : R' \rightrightarrows F$ tels que $Z_{R'}(u) = f$ et $Z_{R'}(v) = g$. En vertu de 3.1 1) on a alors $\ell(F) \circ u = \ell(F) \circ v$. Par suite (3.1 4)) u et v coïncident sur un raffinement $R'' \hookrightarrow R'$. Soit w le restriction de u à R''. On a $Z_{R''}(w) = Z_{R'}(u) = Z_{R'}(v)$ et par suite $f = g$. Le préfaisceau LF est donc séparé.
3) Si F est séparé, le morphisme $\ell(F)$ est un monomorphisme car une limite inductive filtrante de monomorphismes est un monomorphisme. Si $\ell(F)$ est un monomorphisme, le préfaisceau F est un sous-préfaisceau d'un préfaisceau séparé, donc il est séparé. Montrons que LF est alors un faisceau. Soient $i : R \hookrightarrow X$ un crible couvrant un objet

X de C, et $u : R \to LF$ un morphisme. Il nous suffit de montrer que u se factorise par X. Posons $R' = F \times_{LF} R$ et $v = Z_{R'}(\mathrm{pr}_1)$:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "\ell(F)"] & & LF & \\
R' \arrow[u, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[rr, "pr_2"] & & R \arrow[u, "u"'] \arrow[r, "i"] & X \arrow[ul, dash, "v"'] \\
R'' \arrow[u, "p_1"] \arrow[rr, "p_2"] & & Y \arrow[u, "m"'] &
\end{tikzcd} .$$

Pour montrer que $u = v \circ i$, il suffit de montrer (I 3.4) que pour tout morphisme 16
$m : Y \to R$ (Y objet de C), $v \circ i \circ m = u \circ m$. Posons $R'' = Y \times_R R'$ et soient p_1 et p_2 les projections. La projection $R'' \overset{p_2}{\hookrightarrow} Y$ est un monomorphisme et fait de R'' un crible couvrant Y (3.1 2)). On a $v \circ i \circ \mathrm{pr}_2 = \ell(F) \circ \mathrm{pr}_1$ (3.1 1)), et par suite $v \circ i \circ \mathrm{pr}_2 = u \circ m \circ p_2$. On en déduit $v \circ i \circ \mathrm{pr}_2 \circ p_1 = u \circ \mathrm{pr}_2 \circ p_1$ i.e. $v \circ i \circ m \circ p_2 = u \circ m \circ p_2$. Comme le préfaisceau LF est séparé, on a $v \circ i \circ m = u \circ m$, C.Q.F.D.

4) Clair.

Remarque 3.3. — Soit $J'(X)$ un sous-ensemble cofinal de $J(X)$. On a

$$LF(X) = \varinjlim_{J'(X)} \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(., F).$$

En particulier, si la topologie de C est définie par une prétopologie $X \mapsto \mathrm{Cov}(X)$ (1.1.3), le foncteur L peut se décrire à l'aide des familles couvrantes de $\mathrm{Cov}(X)$ (I 2.12 et I 3.5). En explicitant les formules on retrouve la construction de [

Théorème 3.4. — *Soit C un $\mathcal{U}$-site. Le foncteur d'inclusion $i : C^\sim \hookrightarrow C^\wedge$ des faisceaux dans les préfaisceaux admet un adjoint à gauche $\underline{a}$, exact à gauche (I 2.3.2) :*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[rr, hook, shift right, "i"'] & & C^\wedge \arrow[ll, shift right, "\underline{a}"']
\end{tikzcd} .$$

Le foncteur $i \circ \underline{a}$ est canoniquement isomorphe au foncteur $L \circ L$ (cf. 3.0.5). Pour tout préfaisceau F le morphisme d'adjonction $F \to i \circ \underline{a}(F)$ se déduit par l'isomorphisme précédent du morphisme $\ell(LF)\ell(F) : F \to L \circ L(F)$.

Définition 3.5. — *Le faisceau $\underline{a}F$ est appelé le faisceau associé au préfaisceau F.* 17

Le théorème 3.4 résulte immédiatement de la proposition 3.2.

Proposition 3.6. — *Soient C un $\mathcal{U}$-site et $\mathcal{V} \supset \mathcal{U}$ un univers. Notons $C^\wedge_{\mathcal{U}}$ et $C^\sim_{\mathcal{U}}$ (resp. $C^\wedge_{\mathcal{V}}$ et $C^\sim_{\mathcal{V}}$) les catégories de $\mathcal{U}$-préfaisceaux et de $\mathcal{U}$-faisceaux (resp. de $\mathcal{V}$-préfaisceaux et de $\mathcal{V}$-faisceaux) et $\underline{a}_{\mathcal{U}} : C^\wedge_{\mathcal{U}} \to C^\sim_{\mathcal{U}}$ (resp. $\underline{a}_{\mathcal{V}} : C^\wedge_{\mathcal{V}} \to C^\sim_{\mathcal{V}}$) les foncteurs « faisceaux associés »* *correspondants. Le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
C^{\wedge}_{\underline{U}} \arrow[r, "\underline{a}_U"] \arrow[d, hook] & C^{\sim}_{\underline{U}} \arrow[d, hook] \\
C^{\wedge}_{\underline{V}} \arrow[r, "\underline{a}_V"] & C^{\sim}_{\underline{V}},
\end{tikzcd}$$

où les foncteurs verticaux sont les inclusions canoniques, est commutatif à isomorphisme canonique près.

Preuve. — Résulte de la construction des foncteurs $\underline{a}_U$ et $\underline{a}_V$ (3.4 et 3.0.5).

4. Propriétés d'exactitude de la catégorie des faisceaux

Les propriétés d'exactitude de la catégorie des faisceaux se déduisent des propriétés d'exactitude de la catégorie des préfaisceaux via le théorème 3.4. La présent numéro explicite cette philosophie sur des énoncés-types parmi les plus utiles.

Théorème 4.1. — *Soient C un $\mathcal{U}$-site, $\widetilde{C}$ la catégorie des faisceaux, $\underline{a} : C^{\wedge} \to \widetilde{C}$ le foncteur faisceau associé, $i : \widetilde{C} \to C^{\wedge}$ le foncteur d'inclusion.*

1) *Le foncteur $\underline{a}$ commute aux limites inductives et est exact.*

18 2) *Les $\mathcal{U}$-limites inductives dans $\widetilde{C}$ sont représentables. Pour toute petite catégorie I et pour tout foncteur $E : I \to \widetilde{C}$, le morphisme canonique*

$$\varinjlim_{I} E \longrightarrow \underline{a}(\varinjlim_{I} i \circ E)$$

est un isomorphisme.

3) *Les $\mathcal{U}$-limites projectives dans $\widetilde{C}$ sont représentables. Pour tout objet X de C, le foncteur sur $\widetilde{C} : F \mapsto F(X)$ commute aux limites projectives, i.e. le foncteur d'inclusion $i : \widetilde{C} \to \widehat{C}$ commute aux limites projectives.*

Preuve. — Ces propriétés résultent essentiellement du théorème 3.4 et de (I 2.11).

Ainsi, dans la catégorie des faisceaux, les produits indexés par un élément de $\mathcal{U}$, produits fibrés, sommes indexées par un élément de $\mathcal{U}$, sommes amalgamées, noyaux, conoyaux, images, coimages sont représentables.

Corollaire 4.1.1. — *Soient C un $\mathcal{U}$-site et F un faisceau d'ensembles sur C. L'homomorphisme canonique*

$$\varinjlim_{C/F} \underline{a}X \longrightarrow F$$

est un isomorphisme.

Preuve. — Résulte de (I 3.4) et du fait que $\underline{a}$ commute aux limites inductives.

Proposition 4.2. — *Tout morphisme de $\widetilde{C}$, qui est à la fois un épimorphisme et un monomorphisme, est un isomorphisme.*

Preuve. — Soit $u : G \to H$ un morphisme de $\widetilde{C}$ qui est un épimorphisme et un monomor-
phisme. Remarquons tout d'abord que la morphisme u est un monomorphisme de préfais- 19
ceaux (4.1 1)). Construisons la somme amalgamée $H \amalg_G H = K$ et les deux morphismes canoniques $i_1, i_2 : H \rightrightarrows K$ dans la catégorie des préfaisceaux. Comme u est un monomorphisme de préfaisceaux, on vérifie immédiatement que le diagramme ci-après est cartésien et cocartésien (I 10.1) :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"'] & H \arrow[d, "i_2"] \\ H \arrow[r, "i_1"] & K. \end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur « faisceau associé », on obtient donc un diagramme cartésien et cocartésien de la catégorie des faisceaux (4.1 1)) :

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"'] & H \arrow[d, "\underline{a}i_2"] \\ H \arrow[r, "\underline{a}i_1"] & \underline{a}K. \end{tikzcd}$$

Comme u est un épimorphisme de faisceaux, le morphisme $\underline{a}i_1$ est un isomorphisme et comme le diagramme (*) est cartésien, le morphisme u est un isomorphisme.

Proposition 4.3. — 1) *Les limites inductives dans $C^{\tilde{}}$ qui sont représentables, sont universelles* (I 2.5).

2) *Toute famille épimorphique* (I 10.2) *de morphismes est épimorphique effective universelle (2.6).*
3) *Toute relation d'équivalence est effective universelle* (I 10.6).
4) *Les $\mathcal{U}$-limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives finies* (I 2.6).

Preuve. — Les assertions 1) à 4) sont vraies dans la catégorie des ensembles donc dans la 20
catégorie des préfaisceaux (I 3.1). Les assertions 1) et 4) résultent alors immédiatement des assertions correspondantes pour les préfaisceaux et de 4.1. Démontrons 3). Soit p_1, p_2 : $R \rightrightarrows X$ une relation d'équivalence de $C^{\tilde{}}$. Le diagramme $R \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X$ est alors une relation d'équivalence de préfaisceaux (4.1.1)). Il existe donc un morphisme de préfaisceaux $u : X \to Y$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, "u"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd}$$

soit cartésien et cocartésien dans la catégorie des préfaisceaux. En appliquant le foncteur « faisceau associé », on obtient un diagramme cartésien et cocartésien dans la catégorie des faisceaux (4.1 1)). Par suite $R \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} X$ est une relation d'équivalence effective. Comme toute relation d'équivalence est effective d'après ce qui précède, toute relation d'équivalence est effective universelle. Démontrons 2). Soit $(u_i : X_i \to X)$, $i \in I$, une famille épimorphique de $C^{\sim}$. D'après (II 2.6) et (I 2.12), il suffit de démontrer les assertions suivantes :

a) Pour tout morphisme de faisceaux $v : Y \to X$, la famille de morphismes $\mathrm{pr}_{2,i} : X_i \times_X Y \to Y$, $i \in I$, est une famille épimorphique de $C^{\sim}$.

b) Pour tout faisceau Z le diagramme d'ensembles :

$$\mathrm{Hom}(X, Z) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(X_i, Z) \rightrightarrows \prod_{(i,k)\in I\times I} \mathrm{Hom}(X_i \times_X X_k, Z)$$

est exact.

21 Soient X' la réunion des images des morphismes u_i au sens des préfaisceaux et $j : X' \hookrightarrow X$ l'injection canonique. Pour tout $i \in I$, le morphisme $u_i : X_i \to X$ se factorise en un morphisme $u'_i : X_i \to X'$ et le morphisme j, et la famille $u'_i : X_i \to X'$, $i \in I$, est une famille épimorphique de $C^{\wedge}$. Comme j est un monomorphisme, le morphisme $\underline{a}i : \underline{a}X' \to X$ est un monomorphisme de faisceaux (4.1). Comme pour tout $i \in I$, on a $u_i = \underline{a}j\underline{a}u'_i$, $\underline{a}j$ est un épimorphisme de faisceaux. Par suite $\underline{a}j$ est un isomorphisme (4.2). Soit $v : Y \to X$ un morphisme de faisceaux. On en déduit par changement de base un morphisme $j_v : X' \times_X Y \to Y$ et des morphismes $u'_{i,v} : X_i \times_X Y \to X' \times_X Y$. Comme $\underline{a}$ commute aux produits fibrés, $\underline{a}j_v$ est un isomorphisme. Comme les familles épimorphiques de $C^{\wedge}$ conservent ce caractère par changement de base, la famille $u'_{i,v}$, $i \in I$, est épimorphique dans $C^{\wedge}$. Comme $\underline{a}$ commute aux limites inductives, la famille $\underline{a}u'_{i,v} : X_i \times_X Y \to \underline{a}(X' \times_X Y)$, $i \in I$, est épimorphique dans $C^{\sim}$ d'où a). Démontrons b). Soit Z un faisceau. Comme $\underline{a}j$ est un isomorphisme, l'application

$$\mathrm{Hom}(X, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X', Z)$$

est une bijection. Comme les u'_i, $i \in I$, forment une famille épimorphique de $C^{\wedge}$, le diagramme d'ensemble :

$$\mathrm{Hom}(X', Z) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(X_i, Z) \rightrightarrows \prod_{(i,k)\in I\times I} \mathrm{Hom}(X_i \times_{X'} X_k, Z)$$

est exact. Enfin comme X' est un sous-préfaisceau de X, le préfaisceau $X_i \times_{X'} X_k$, $(i,k) \in I \times I$, est canoniquement isomorphe à $X_i \times_X X_k$, d'où b).

22 ***Remarques 4.3.1.*** — 1) La proposition 4.3 2) nous fournit formellement une seconde démonstration de 4.2 : Il est clair que, dans toute catégorie, un morphisme qui est à le fois un épimorphisme effectif universel et un monomorphisme est en fait un isomorphisme.

2) On déduit des propositions précédentes que tout morphisme dans la catégorie des faisceaux se factorise de manière unique en un épimorphisme effectif et un monomorphisme effectif. Cette propriété généralise de façon naturelle, pour les catégories non additives, l'axiome (AB2) des catégories abéliennes (coim $\simeq$ im) [Tohoku].

4.4.0. — Soit C un $\mathcal{U}$-site. Le foncteur $h : C \to C\hat{}$ (I 1.3.1), composé avec le foncteur faisceau associé, fournit un foncteur

$$\epsilon_C : C \longrightarrow C\tilde{},$$

appelé *foncteur canonique* de C dans $C\tilde{}$, qui sera constamment utilisé par la suite. Le foncteur ϵ_C commute aux limites projectives finies. Lorsque la topologie de C est moins fine que la topologie canonique, ϵ_C est pleinement fidèle, et commute aux limites projectives ; il est alors, d'ailleurs, défini lorsque C ne possède pas nécessairement de petite famille topologiquement génératrice. Nous n'étudierons pas en détail le comportement de ϵ_C par rapport aux limites inductives (cf. [SGA 3 IV]). Nous aurons cependant besoin des propositions ci-après.

Théorème 4.4. — *Soient C un $\mathcal{U}$-site et $(u_i : X_i \to X)$, $i \in I$, une famille de morphismes de C de but X. Les conditions suivantes sont équivalentes* [(i)] *:*

i) *La famille $(\epsilon_C u_i : \epsilon_C X_i \to \epsilon_C X)$, $i \in I$, est une famille épimorphique de $C\tilde{}$* (I 10.2). 23
ii) *La famille $(u_i : X_i \to X)$, $i \in I$, est une famille couvrante de C (1.2).*

Preuve. — ii) ⇒ i). Soient $R \hookrightarrow X$ le crible engendré par les u_i, $i \in I$ (I 4.3.3), et $u'_i : X_i \to R$ les morphismes induits par les u_i. La famille des u'_i, $i \in I$, est une famille épimorphique de $C\hat{}$, et R est un crible couvrant X. Par suite, pour tout faisceau F, l'application

$$\mathrm{Hom}(X, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R, F)$$

est bijective et l'application

$$\mathrm{Hom}(R, F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(X_i, F)$$

est injective. Donc l'application

$$\mathrm{Hom}(X, F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(X_i, F)$$

est injective et par suite l'application

$$\mathrm{Hom}(\underline{a}X, F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(\underline{a}X_i, F)$$

est injective, d'où i).

i) ⇒ ii). Avec les notations introduites précédemment, soit $J_R : R \hookrightarrow X$ l'injection canonique dans X du crible engendré par les u_i, $i \in I$. Il résulte de i) que le morphisme de faisceaux $\underline{a}J_R : \underline{a}R \to \underline{a}X$ est à la fois un épimorphisme de faisceaux et un monomorphisme de faisceaux. C'est donc un isomorphisme de faisceaux (4.2). On a, avec les notations du n°

i. Lorsque le site C ne possède pas nécessairement de petite famille topologiquement génératrice et lorsque la topologie de C est moins fine que la topologie canonique, on a ii) ⇒ i) (cf. démonstration de 4.4).

3, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\ell(x)"] & LX \arrow[r, "\ell(LX)"] & \underline{a}X \\
R \arrow[u, hook, "J_R"] \arrow[r, "\ell(R)"] & LR \arrow[u, hook, "LJ_R"] \arrow[r, "\ell(LR)"] & \underline{a}R. \arrow[u, "\wr"', "\underline{a}J_R"]
\end{tikzcd}$$

24 Tout d'abord, d'après 3.1 2), il existe un crible couvrant $J_{S_1} : S_1 \to X$ et un morphisme $u_1 : S_1 \to LR$ tel que

$$\ell(LX) \circ \ell(X) \circ J_{S_1} = \underline{a}J_R \circ \ell(LR) \circ u_1 = \ell(LX) \circ LJ_R \circ u_1. \tag{4.6.1}$$

Posons $m = \ell(X) \circ J_{S_1}$ et $n = LJ_R \circ u_1$. Les morphismes m et n sont des morphismes de S_1 dans LX. Soit $S_2 \hookrightarrow S_1$ le noyau du couple de flèches (m, n). Pour tout objet Y de C et tout morphisme $\alpha : Y \to S_1$, on a, en vertu de 4.6.1, $\ell(LX) \circ m \circ \alpha = \ell(LX) \circ n \circ \alpha$. Il résulte alors de (3.1 3)) que le noyau $S_2 \times_{S_1} Y$ du couple de flèches $(m \circ \alpha, n \circ \alpha)$ est un crible couvrant Y. Par suite, d'après l'axiome (T 2) des topologies, $J_{S_2} : S_2 \hookrightarrow X$ est un crible couvrant X. On a donc un morphisme $u_2 : S_2 \to LR$ et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
S_2 \arrow[rr, hook, "J_{S_2}"] \arrow[dd, "u_2"'] & & X \arrow[dd, "\ell(X)"] \\
& R \arrow[ur, hook, "J_R"'] \arrow[dl, "\ell(R)"] & \\
LR \arrow[rr, "LJ_R"] & & LX
\end{tikzcd} \tag{4.6.2}$$

Soient Y un objet de C et $\beta : Y \to S_2$ un morphisme. D'après 3.1 1), il existe un crible couvrant $J_{Q_i} : Q_1 \hookrightarrow Y$ et un morphisme $v_1 : Q_1 \to R$ tels que $u_2 \circ \beta \circ J_{Q_1} = \ell(R) \circ v_1$. Posons $f = J_{S_2} \circ \beta \circ J_{Q_1}$, $g = J_R \circ v_1$. Soient Q_2 le noyau du couple $(f, g) : Q_1 \rightrightarrows X$ et $J_{Q_2} : Q_2 \hookrightarrow Y$, l'injection canonique. Pour tout objet Z de C et tout morphisme $\gamma : Z \to Q_1$, on a, en vertu de la commutativité de (4.6.2) :

$$\begin{aligned}
\ell(X) \circ f \circ \gamma = \ell(X) \circ J_{S_2} \circ \beta \circ J_{Q_1} \circ \gamma = LJ_R \circ u_2 \circ \beta \circ J_{Q_1} \circ \gamma = \\
= LJ_R \circ \ell(R) \circ v_1 \circ \gamma = \ell(X) \circ J_R \circ v_1 \circ \gamma = \ell(X) \circ g \circ \gamma.
\end{aligned}$$

25 Il résulte alors de 3.1 2) que le noyau $Q_2 \times_{Q_1} Z$ du couple $(f \circ \gamma, g \circ \gamma)$ est un crible couvrant Z. D'après l'axiome (T 2) des topologies, $J_{Q_2} : Q_2 \hookrightarrow Y$ est un crible couvrant Y. Pour tout morphisme $\beta : Y \to S$, il existe donc un crible couvrant $J_{Q_2} : Q_2 \hookrightarrow Y$ et un morphisme

$v_2 : Q_2 \to R$ tels que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\beta"] & S_2 \arrow[r, "j_{S_2}"] & X \\
Q_2 \arrow[u, hook, "j_{Q_2}"] \arrow[r, "v_2"] & R \arrow[ur, hook, "j_R"'] &
\end{tikzcd}$$

Notons alors $S_2 \cap R$ le produit fibré de S_2 et de R au-dessus de X. Le crible (de Y) : $(S_2 \cap R) \times_{S_2} Y$ contient le crible Q_2 et par suite $(S_2 \cap R) \times_{S_2} Y$ est un crible couvrant Y. Il résulte alors de l'axiome (T 2) des topologies que $S_2 \cap R$ est un crible couvrant X et par suite le crible R qui contient $S_2 \cap R$ est un crible couvrant X, C.Q.F.D.

Corollaire 4.4.4. — *Soient T la topologie du $\mathcal{U}$-site e, T' (resp. T'') la topologie la plus fine sur e parmi celles pour lesquelles les objets de $\widetilde{C}$ sont des faisceaux* (resp. des préfaisceaux) *(2.2). Alors $T = T' = T''$.*

En effet, on a trivialement $T \leq T' \leq T''$, et 4.4 et 2.2 impliquent que $T'' \leq T$, C.Q.F.D.

Définition 4.5. — *Un objet initial d'une catégorie A est un objet ϕ_A qui représente la limite inductive vide i.e. tel que pour tout $X \in \operatorname{ob} A$, il existe une flèche et une seule $\phi_A \to X$. On dit qu'un objet ϕ_A est* initial strict *s'il est initial et si tout morphisme de but ϕ_A est un isomorphisme. Soit (S_i), $i \in I$, une famille d'objets d'une catégorie A. Supposons que la somme $s = \coprod_{i \in I} S_i$ soit représentable. On dit que la somme S est disjointe si les morphismes structuraux $S_i \to S$ sont quarrables, s'ils sont des monomorphismes et si pour tout couple i, j, $i \neq j$, le produit $S_i \times_S S_j$ est un objet initial de A. On dit que la somme S est disjointe universelle si elle* 26
est disjointe et si elle reste somme disjointe après tout changement de base $T \to S$; il en résulte que pour tout couple i, j, $i \neq j$, les objets $S_i \times_S S_j$ sont des objets initiaux stricts de A.

Exemple 4.5.1. — Dans la catégorie des ensembles, les sommes directes sont disjointes et universelles. Il en est donc de même dans toute catégorie de préfaisceaux d'ensembles (I 3.1) et par suite dans toute catégorie de faisceaux d'ensembles sur un $\mathscr{U}$-site (4.1) ; en particulier, l'objet initial de $\tilde{C}$ est strict.

Proposition 4.6. — *Soient C une $\mathscr{U}$-catégorie et $(s_i : X_i \to X)$, $i \in I$, une famille de morphismes de C. Pour toute $\mathscr{U}$-topologie $\mathcal{T}$ sur C (3.0.2), on désigne par $\tilde{C_{\mathcal{T}}}$ la catégorie de faisceaux correspondante et par $\epsilon_{\mathcal{T}} : C \to \tilde{C_{\mathcal{T}}}$ le foncteur correspondant.*

1) *Soit $\mathcal{T}$ une $\mathscr{U}$-topologie telle que*

$$\coprod_{i \in I} \epsilon_{\mathcal{T}}(X_i) \xrightarrow{(\epsilon_{\mathcal{T}}(s_i))} \epsilon_{\mathcal{T}}(X)$$

soit un isomorphisme. Alors pour toute topologie $\mathcal{T}'$ plus fine que $\mathcal{T}$, le morphisme :

$$\coprod_{i \in I} \epsilon_{\mathcal{T}'}(X_i) \xrightarrow{(\epsilon_{\mathcal{T}'}(s_i))} \epsilon_{\mathcal{T}'}(X)$$

est un isomorphisme.

2) *Soit $\mathcal{T}$ une $\mathcal{U}$-topologie sur C. Les propriétés suivantes* (i) *et* (ii) *sont équivalentes :*
   i) a) *La famille $(s_i : X_i \to X)$, $i \in I$, est couvrante pour $\mathcal{T}$.*
27 b) *Pour tout $i \in I$, le morphisme diagonal de préfaisceaux $\Delta_i : X_i \hookrightarrow X_i \times_X X_i$ est transformé par le foncteur « faisceau associe » (pour $\mathcal{T}$) en un isomorphisme (ce qui est le cas si les s_i sont des monomorphismes).*
   c) *Pour tout couple (i, j), $i \neq j$, d'éléments de I, le préfaisceau. $X_i \times_X X_j$ est transformé par le foncteur « faisceau associé » (pour $\mathcal{T}$) en l'objet initial de $\tilde{C_{\mathcal{T}}}$.*
   ii) *$\epsilon_{\mathcal{T}}(X)$ est somme de $\epsilon_{\mathcal{T}}(X_i)$.*

Preuve. — 1) Un faisceau F pour $\mathcal{T}'$ est un faisceau pour $\mathcal{T}$. Pas suite, pour tout faisceau F pour $\mathcal{T}'$, le morphisme

$$\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(X, F) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(X_i, F)$$

est un isomorphisme, ce qui entraîne l'assertion.

2) Par définition, on a la propriété ii) si et seulement si le morphisme de préfaisceaux

$$\Phi = (h(s_i), i \in I) : \coprod_i h(X_i) \longrightarrow h(X)$$

est transformé par le foncteur « faisceau associé » en un isomorphisme i.e. (4.2) si et seulement si $\underline{a}(\Phi)$ est un épimorphisme et monomorphisme de faisceaux. D'après (4.4), le morphisme $\underline{a}(\Phi)$ est un épimorphisme si et seulement si on a la propriété a). Le morphisme diagonal

$$\Delta : \coprod_i h(X_i) \longrightarrow (\coprod_i h(X_i)) \times_{h(X)} (\coprod_i h(X_i))$$

est somme directe d'une famille $\Delta_{i,j}$, $(i, j) \in i \times I$, de morphismes définis comme suit :

β) Lorsque $i = j$, $\Delta_{i,i}$ est le morphisme diagonal $h(X_i) \to h(X_i) \times_{h(X)} h(X_i)$

γ) Lorsque $i \neq j$, $\Delta_{i,j}$ est le morphisme $\phi_{C^\wedge} \to h(X_i) \times_{h(X)} h(X_j)$ ($\phi_{C^\wedge}$ désigne l'objet initial de $\hat{C}$).

28 Le morphisme $\underline{a}(\Phi)$ est un monomorphisme si et seulement si $\underline{a}(\Delta)$ est un isomorphisme, et d'après (4.1) $\underline{a}(\Delta)$ est isomorphisme si et seulement si les $\underline{a}(\Delta_{i,j})$ sont des isomorphismes i.e. si et seulement si on a les propriétés b) et c).

Corollaire 4.6.1. — *Soient C une $\mathcal{U}$-catégorie et X un objet de C.*

1) *Soit $\mathcal{T}$ une $\mathcal{U}$-topologie sur C. L'objet X de C est transformé par le foncteur « faisceau associé » (pour la topologie $\mathcal{T}$) en l'objet initial de $\tilde{C_{\mathcal{T}}}$ si et seulement si le crible vide recouvre X.*
2) *Lorsque X est un objet initial strict de C, le faisceau associé à X, pour toute $\mathcal{U}$-topologie plus fine que la topologie canonique, est un objet initial.*

Preuve. — 1) On prend pour ensemble I dans 4.6 2) l'ensemble vide.

2) D'après 1) et 4.6 1), il suffit de montrer que le crible vide recouvre X pour la topologie canonique i.e. (2.6) il suffit de montrer que pour tout objet $Y \to X$ au-dessus de X, Y est un objet initial de X, ce qui résulte de la définition (4.5).

Corollaire 4.6.2. — *Soient C un $\mathcal{U}$-site et $(s_i : X_i \to X)$, $i \in I$, une famille de morphismes quarrables de C de même but possédant les propriétés suivantes :*

α) *La famille des s_i, $i \in I$, est couvrante.*
β) *Pour tout $i \in I$, $s_i : X_i \to X$ est un monomorphisme.*
γ) *Pour tout couple (i, j), $i \neq j$, d'éléments de I, $X_i \times_X X_J$ est recouvert par le crible vide, i.e. pour tout faisceau F sur C, $F(X_i \times_X X_J)$ est un ensemble réduit à un élément.*

Alors $\epsilon_C(X)$ est somme des $\epsilon_C(X_i)$, $i \in I$.

Preuve. — Résulte immédiatement de 4.6 2) et de 4.6.1 1). 29

Corollaire 4.6.3. — *Soient C une $\mathcal{U}$-catégorie et $(s_i : X_i \to X)$, $i \in I$, une famille de morphisme quarrables de même but. Supposons que la topologie canonique de C soit une $\mathcal{U}$-topologie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Il existe une $\mathcal{U}$-topologie $\mathcal{T}$ sur C, moins fine que la topologie canonique, telle que $\epsilon_{\mathcal{T}}(X)$ soit somme des $\epsilon_{\mathcal{T}}(X_i)$, $i \in I$.*
ii) *L'objet X est somme disjointe et universelle (4.5) (dans C) des X_i.*

Preuve. — ii) ⇒ i). Comme X est somme universelle des X_i, $i \in I$, la famille des s_i, $i \in I$, est couvrante pour la topologie canonique de C (2.6). La condition α) de 4.6.2 est donc satisfaite lorsqu'on munit C de la topologie canonique. La condition β) est évidemment satisfaite et la propriété γ) résulte de 4.6 1) 2), d'où i).
i) ⇒ ii). Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur C moins fine que la topologie canonique telle que $\epsilon_{\mathcal{T}}(X)$ soit somme des $\epsilon_{\mathcal{T}}(X_i)$. Pour tout faisceau F, pour $\mathcal{T}$, l'application canonique $\mathrm{Hom}(X, F) \to \prod_i \mathrm{Hom}(X_i, F)$ est une bijection. De plus, tout préfaisceau représentable est un faisceau. Il en résulte aussitôt que X est somme dans C des X_i, $i \in I$. Appliquant ceci au cas où l'ensemble I est vide, on voit que si un objet de C est transformé en l'objet initial de $C^{\sim}$, cet objet est un objet initial de C. Le foncteur $\epsilon_{\mathcal{T}} : C \to C^{\sim}$ est pleinement fidèle et commute aux limites projectives finies. Par suite la condition b) de 4.6.2) entraîne que les s_i, $i \in I$, sont des monomorphismes de C, et la condition c) entraîne, d'après de qui précède, que les $X_i \times_X X_j$, $i \neq j$, sont des objets initiaux de C. Par suite X est somme disjointe des X_i. Comme 30
$\epsilon_{\mathcal{T}}$ commute aux produits fibrés, cette dernière propriété est stable par tout changement de base $Y \to X$, et par suite X est somme disjointe et universelle des X_i, $i \in I$.

Corollaire 4.6.4. — *Soient C une $\mathcal{U}$-catégorie et X un objet de C. Supposons que la topologie canonique sur C soit une $\mathcal{U}$-topologie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *Il existe sur C une topologie moins fine que la topologie canonique telle que $\epsilon_{\mathcal{T}}(X)$ soit un objet initial de $C^{\sim}_{\mathcal{T}}$.*
ii) *X est un objet initial strict de C.*

Preuve. — On prend pour ensemble I l'ensemble vide dans 4.6.3.

Proposition 4.7. — *Soient C une $\mathcal{U}$-catégorie, $C^{\sim}$ la catégorie des faisceaux sur C pour la topologie canonique, $\epsilon_C : C \to C^{\sim}$ le foncteur canonique (4.4.0), $R \rightrightarrows X$ une relation d'équivalence dans C admettant un conoyau Y dans C. Soit $\Pi : X \to Y$ le morphisme canonique et supposons-le quarrable. Considérons alors les propriétés suivantes :*

i) *$\epsilon_C(Y)$ est le quotient de la relation d'équivalence $\epsilon_C(R) \rightrightarrows \epsilon_C(X)$.*
ii) *La relation d'équivalence $R \rightrightarrows X$ est effective universelle* (cf. n° 7).

On a ii) ⇒ i)*.. Lorsque C possède une $\mathcal{U}$-topologie moins fine que la topologie canonique, on a* i) ⇒ ii).

Preuve. — ii) ⇒ i). Le morphisme canonique $R \to X \times_X X$ est un isomorphisme. Soit $S \to Y$ le crible engendré par $\pi : X \to Y$. Pour tout préfaisceau F, on a un diagramme exact (I 2.12) :

$$\mathrm{Hom}(S, F) \to \mathrm{Hom}(X, F) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(R, F).$$

31 Il suffit donc de montrer que pour tout faisceau F pour la topologie canonique, l'application

$$\mathrm{Hom}(X, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S, F)$$

est une bijection i.e. il suffit de montrer que S est couvrant pour la topologie canonique, ou encore que le crible engendré par $\pi : X \to Y$ est couvrant, ce qui résulte de la définition 2.5.
i) ⇒ ii). Le foncteur $\epsilon_C : C \to \tilde{C}$ commute aux limites projectives finies et est pleinement fidèle. Or le morphisme canonique $\epsilon_C(R) \to J_C(X) \times_{J_C(Y)} J_C(X)$ est un isomorphisme (4.3). Par suite le morphisme canonique $R \to X \times_Y X$ est un isomorphisme. Le morphisme $\epsilon_C(X) \to \epsilon_C(Y)$ est un épimorphisme, ce qui entraîne (4.4) que $\pi : X \to Y$ est un morphisme couvrant de C pour la topologie canonique, C.Q.F.D.

Proposition 4.8. — *Soit C un $\mathcal{U}$-site. La catégorie des faisceaux sur C possède les propriétés suivantes :*

a) *Les limites projectives finies sont représentables.*
b) *Les sommes directes indexées par un élément de $\mathcal{U}$ sont représentables. Elles sont disjointes et universelles. (4.5).*
c) *Les relations d'équivalence sont effectives universelles.*

Cela a été vu dans 4.1, 2) et 3), 4.3, 3), et 4.5.1.

Ces propriétés ont été mises en évidence car elles permettront plus tard de caractériser les $\mathcal{U}$-catégories équivalentes à des catégories de faisceaux sur des catégories appartenant à $\mathcal{U}$ (IV 1.2).

Remarque. — Rappelons que la propriété a) est équivalente à la propriété :

Il existe un objet final, et les produits fibrés sont représentables (I 2.3.1).

32 **4.9.** — Soient C un site dont la catégorie sous-jacente soit une $\mathcal{U}$-catégorie. Alors la catégorie C des $\mathcal{U}$-faisceaux sur C satisfait aux conditions envisagées dans I 7.3 ((i) ou (ii), au choix), donc par *loc. cit.* les diverses variantes envisagées dans I 7.1 pour la notion de *famille génératrice* dans C coïncident. Ceci posé :

Proposition 4.10. — *Avec les notations précédentes, considérons le foncteur canonique $\epsilon : C \to \widetilde{C}$ (4.4.0), et soit $G \subset \mathrm{ob}\, C$ une famille topologiquement génératrice dans C (3.0.1). Alors la famille $(\epsilon(X))_{X \in G}$ d'objets de $\widetilde{C}$ est une famille génératrice. En particulier la famille $(\epsilon(X))_{X \in \mathrm{ob}\, C}$ d'objets de C est génératrice.*

Il faut prouver que tout morphisme $u : F \to F'$ dans $\widetilde{C}$ tel que

$$\mathrm{Hom}(\epsilon(X), F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\epsilon(X), F') \tag{4.10.1}$$

soit une bijection pour tout $X \in G$, est un isomorphisme. Or l'application précédente s'identifie à l'application

$$u(X) : F(X) \longrightarrow F'(X), \tag{4.10.2}$$

et il faut montrer que si celle-ci est bijective pour tout $X \in G$, il en est de même pour tout $X \in \operatorname{ob} C$. Or soit $(X_i \to X)_{i\in I}$ une famille couvrante de X par des objets de G, et pour tout couple d'indices (i, j) de I, considérons l'ensemble de tous les morphismes $X_{ijk} \to X_i \times_X X_j$ dans $\widehat{C}$, avec $X_{ijk} \in G$ (k variant dans un ensemble d'indices $I_{i,j}$). On obtient alors un homomorphisme de diagrammes exacts d'ensembles

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_i F(X_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\wr"] & \prod_{ijk} F(X_{ijk}) \arrow[d, "\wr"] \\
F(X) \arrow[r] & \prod_i F(X_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{ijk} F(X_{ijk})
\end{tikzcd} \quad ,$$

où par hypothèse les deux dernières flèches verticales sont des bijections. Il en est donc de 33
même de la première flèche verticale, C.Q.F.D.

Corollaire 4.11. — *Supposons que C soit un $\mathscr{U}$-site (3.0.2). Alors la catégorie $\widetilde{C}$ est une $\mathscr{U}$-catégorie et admet une $\mathscr{U}$-petite famille génératrice.*

En effet, par hypothèse on peut prendre dans 4.10 pour G une petite famille génératrice, ce qui prouve l'existence d'une petite famille génératrice. D'autre part, si F, $F' \in \operatorname{ob} C$, un homomorphisme de F dans F' est connu quand on connaît l'homomorphisme (4.10.1) i.e. (4.10.2) pour tout $X \in \operatorname{ob} G$ (I 7.1.1), d'où s'ensuit que l'application

$$\operatorname{Hom}(F, F') \longrightarrow \prod_{X\in G} \operatorname{Hom}(F(X), F'(X))$$

est injective. Comme le deuxième membre est $\mathscr{U}$-petit, il en est de même du premier, ce qui prouve que $\widetilde{C}$ est une $\mathscr{U}$-catégorie.

Corollaire 4.12. — *Soit C un $\mathscr{U}$-site. Alors pour tout objet de $\widetilde{C}$, l'ensemble des sous-objets de X et l'ensemble des objets quotients de X est $\mathscr{U}$-petit.*

Cela résulte de I 7.4 resp. I 7.5, qui s'appliquent grâce à 4.11.

5. Extension d'une topologie de C à $\widehat{C}$

Proposition 5.1. — *Soient C un $\mathscr{U}$-site et $f : H \to K$ un morphisme de $\widehat{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Pour tout $X \to K$, avec $X \in \operatorname{ob} C$, le morphisme correspondant $H \times_K X \to X$ a pour image un crible couvrant de X.*

ii) *Le morphisme $\underline{a}(f) : \underline{a}H \to \underline{a}K$ sur les faisceaux associés est une épimorphisme de $\widetilde{C}$.* 34

ii bis) *Pour tout faisceau F sur C, l'application* $\operatorname{Hom}(K, F) \to \operatorname{Hom}(H, F)$ *déduite de f est injective.*

Preuve. — Il est clair que ii) équivaut à ii bis).

Prouvons que (i) $\Rightarrow$ (ii). En vertu de 4.4, (i) signifie que $u : (H \times_K X) \to \underline{a}(X)$ est un épimorphisme. Or, comme $\underline{a}(H \times_K X) \simeq \underline{a}(H) \times_{\underline{a}(K)} \underline{a}(X)$, $\underline{a}$ commutant aux $\varprojlim$ finies (4.1), le morphisme envisagé se déduit de $\underline{a}(f) : \underline{a}(H) \to \underline{a}(K)$ par changement de base. Comme les épimorphismes de $\widetilde{C}$ sont universels, cela montre que (ii) $\Rightarrow$ (i). Inversement, comme la famille des $X_i \to K$ est épimorphique, il en est de même de la famille des $\underline{a}(X) \to \underline{a}(K)$ dans $\widetilde{C}$ (4.1), donc pour vérifier que $\underline{a}(f) : \underline{a}(H) \to \underline{a}(K)$ est épimorphique, il suffit de le voir après tout changement de base du type précédent $\underline{a}(X) \to \underline{a}(K)$, ce qui prouve i) $\Rightarrow$ ii), C.Q.F.D.

Définition 5.2. — 1) *Un morphisme $f : H \to K$ satisfaisant aux trois conditions équivalentes de 5.1 est appelé un* morphisme couvrant. *Une famille de morphismes $f_i : H_i \to K$, $i \in I$, de même but est dite* couvrante *si le morphisme correspondant $f : \amalg_i H_i \to K$ est couvrant.*

2) *Un morphisme $f : H \to K$ est dit* bicouvrant *s'il est couvrant et si le morphisme diagonal $H \to H \times_K H$ est couvrant. Une famille $f_i : H_i \to K$, $i \in I$, de même but est dite bicouvrante si le morphisme correspondant $f : \amalg_i H_i \to K$ est bicouvrant.*

Par la condition i) de 5.1, dire qu'une famille $(f_i : H_i \to K)$, $i \in I$, est couvrante, signifie que pour tout morphisme $X \to K$, avec $X \in \operatorname{ob} C$, la famille des $H_i \times_K X \to X$,
35 $i \in I$, a pour image un crible couvrant de X ; ou encore, par ii), la famille des morphismes $\underline{a}(f_i) : \underline{a}H_i \to \underline{a}K$ dans $\widetilde{C}$ est épimorphique (compte tenu de ce que le foncteur $\underline{a}$ commute aux sommes directes (4.1)).[i]

Proposition 5.3. — *Soit C un $\mathcal{U}$-site et $f : H \to K$ un morphisme de $\widehat{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Le morphisme f est bicouvrant (5.2)).*

i bis) *Le morphisme f est couvrant et pour tout objet X de C et tout couple de morphismes u, $v : X \rightrightarrows H$ tel que $fu = fv$, le noyau de (u, v) est un crible couvrant de X.*

ii) *Le morphisme $\underline{a}(f) : \underline{a}H \to \underline{a}K$ est un isomorphisme de $\widetilde{C}$.*

ii bis) *Pour tout faisceau F sur C, l'application* $\operatorname{Hom}(K, F) \to \operatorname{Hom}(H, F)$ *est une bijection.*

Preuve. — L'équivalence i) $\Leftrightarrow$ i bis) résulte de la condition i) de 5.1, appliquée au morphisme diagonal $H \to H \times_K H$; l'équivalence ii) $\Leftrightarrow$ ii bis) est triviale.

i) $\Rightarrow$ ii). Le morphisme $\underline{a}(f) : \underline{a}H \to \underline{a}K$ est un épimorphisme (5.1). Comme le foncteur $\underline{a}$ commute à la formation des produits fibrés (4.1), le morphisme diagonal $\underline{a}H \to \underline{a}H \times_{\underline{a}K} \underline{a}H$ est un épimorphisme (5.1). Comme le morphisme diagonal est toujours un monomorphisme, c'est un isomorphisme (4.2). Par suite le morphisme $\underline{a}(f)$ est un monomorphisme. C'est donc un isomorphisme (4.2).

ii) $\Rightarrow$ i). Comme le foncteur $\underline{a}$ commute à la formation des produits fibrés, le morphisme f et le morphisme diagonal $H \to H \times_K H$ sont transformés par $\underline{a}$ en isomorphismes. En particulier, ils sont transformés par $\underline{a}$ en épimorphismes. Ils sont donc couvrants, C.Q.F.D.

i. Notons que la propriété pour un morphisme ou une famille de morphismes de $\widehat{C}$ d'être couvrant (resp. bicouvrant) est stable par changement de base.

5.3.1. — Il résulte de 5.3, et du fait que $\underline{a}$ commute aux sommes directes, qu'une famille 36
$(f_i : H_i \to K)$, $i \in I$, de morphismes de $C^{\wedge}$ est bicouvrante si et seulement si les f_i induisent sur les faisceaux associés un isomorphisme de la somme directe $\amalg_i \underline{a} H_i$ sur $\underline{a}K$, ou encore si et seulement si, pour tout faisceau F, l'application

$$\mathrm{Hom}(K, F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(H_i, F)$$

est bijective.

Proposition 5.4. — *Soit C un $\mathcal{U}$-site. Il existe sur $C^{\wedge}$ une topologie (évidemment unique) telle qu'une famille $H_i \to K$ de flèches de $C^{\wedge}$ de même but soit couvrante pour cette topologie si et seulement si elle est couvrante au sens de 5.2. C'est aussi la topologie la moins fine sur $C^{\wedge}$ parmi les topologies T ayant les propriétés suivantes :*

a) *T est plus fine que la topologie canonique de $C^{\wedge}$ (i.e. toute famille épimorphique de $C^{\wedge}$ est couvrante pour T).*
b) *Toute famille couvrante dans C est couvrante dans $C^{\wedge}$.*

Preuve. — Nous nous bornerons à donner des indications. Nous laissons au lecteur le soin de montrer que les familles couvrantes au sens de 5.2 sont les familles couvrantes d'une topologie T_C sur $C^{\wedge}$ (on utilise 4.1). Les familles couvrantes de la topologie canonique sur $C^{\wedge}$ sont les familles épimorphiques sur $C^{\wedge}$ (2.6 et I 3.1). Comme $\underline{a}$ commute aux limites inductives (4.1), la topologie T_C est plus fine que la topologie canoniques de $C^{\wedge}$. De plus les familles couvrantes de C sont des familles couvrantes de T_C (5.1). Si donc T' désigne la moins fine des topologie de $C^{\wedge}$ possédant les propriétés a) et b), T_C est plus fine que T'. Soit $(f_i : H_i \to K)$, $i \in I$, une famille couvrante de T_C. Montrons que $(f_i, i \in I)$ est une 37
famille couvrante de T'. Soient $s_i : H_i \to H = \amalg_i H_i$ les monomorphismes canoniques et $f = (f_i, i \in I) : H = \amalg_i H_i \to K$ le morphisme défini par les f_i. La famille des s_i est couvrante pour T'. Pour montrer que $(f_i, i \in I)$ est une famille couvrante de T', il suffit donc de montrer, en vertu de l'axiome (T 2) des topologies, que la morphisme $f : H \to K$ est couvrant pour T'. Il existe une famille épimorphique de $C^{\wedge}$, $u_\lambda : X_\lambda \to K$, $\lambda \in \Lambda$, $X_\lambda \in \mathrm{ob}\, C$ (I 3.4). Pour montrer que $f : H \to K$ est couvrant pour T', il suffit donc, en vertu de l'axiome (T 2) des topologies, de montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda$, le morphisme $\mathrm{pr}_2 : H \times_K X_\lambda \to X_\lambda$ est couvrant pour T'. Soit alors $v_j : Y_j \to H \times_K X_\lambda$, $j \in J$, $Y_j \in \mathrm{ob}\, C$, une famille épimorphique de $C^{\wedge}$. La famille $(\mathrm{pr}_2 \circ v_j, j \in J)$ est couvrante pour T_C. C'est donc une famille couvrante de C (5.1). C'est donc une famille couvrante de T'. Par suite le crible engendré par $\mathrm{pr}_2 : H \times_K X \to X$ contient un crible couvrant pour T'. Il est donc couvrant pour T' et par suite $\mathrm{pr}_2 : H \times_K X \to X$ est couvrant, C.Q.F.D.

Remarque 5.4.1. — La démonstration de 5.4 montre en fait que toute topologie T' sur $C^{\wedge}$, plus fine que la topologie canonique de $C^{\wedge}$, est la moins fine des topologies T sur $C^{\wedge}$ qui possèdent les propriétés suivantes :

a) T est plus fine que la topologie canonique de $C^{\wedge}$.
b) Toute famille couvrante pour T' de la forme $u_i : X_i \to X$, $i \in I$, où X et les X_i sont des objets de C, est couvrante pour T.

En particulier, toute topologie T' sur $C\hat{}$, plus fine que la topologie canonique, est uniquement déterminée par les familles $u_i : X_i \to X$, $i \in I$, X_i et X objets de C, qui sont couvrantes pour T'.

38 ***Remarque 5.4.2***. — On peut facilement montrer que pour toute topologie T' sur $C\hat{}$, plus fine que la topologie canonique, l'ensemble des familles de morphismes $(X_i \to X)$, $i \in I$, de même but de C, qui sont couvrantes pour T', est l'ensemble des familles couvrantes d'une topologie sur C. Donc 5.4 et 5.4.1 permettent d'établir une correspondance biunivoque entre les topologies sur C et les topologies sur $C\hat{}$ plus fines que la topologie canonique.

5.5.0. — Soit C une petite catégorie. Désignons par Caf l'ensemble des sous-catégories strictement pleines (tout objet isomorphe à un objet de la sous-catégorie est un objet de la sous-catégorie) de $C\hat{}$ dont le foncteur d'injection admette un adjoint à gauche qui commute aux limites projectives finies. Désignons aussi par $\mathcal{T}$ l'ensemble des topologies sur C. Le théorème 3.4 nous définit une application :

$$\Phi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{Caf}\,.$$

Nous allons définir une application en sens inverse. Pour cela, il faut associer à tout élément $e = i' : C' \overset{a'}{\leftrightarrows} C\hat{}$, $\underline{a}'$ adjoint à gauche de i') une topologie T_e sur C. Pour tout objet X de C, nous définirons $J_e(X)$ comme étant l'ensemble des sous-objets de X dont le morphisme d'injection est transformé par $\underline{a}'$ en un isomorphisme. On vérifie immédiatement, à l'aide des hypothèses faites sur $\underline{a}'$, qu'on définit ainsi une topologie T_e sur C. On a donc défini une application :

$$\Psi : \mathrm{Caf} \longrightarrow \mathcal{T}.$$

On a alors le résultat (dû à J. GIRAUD) :

39 ***Théorème 5.5***. — *L'application Φ est une bijection, et Ψ est l'application inverse.*

Preuve. — L'application $\Psi \circ \Phi$ est l'identité. En effet, ceci résulte immédiatement de 5.1.

L'application $\Phi \circ \Psi$ est l'identité. En effet, soient ($i' : C' \overset{a'}{\leftrightarrows} C\hat{}$) un élément de Caf, T_e la topologie qui lui correspond par Ψ, C_e la catégorie des faisceaux pour T_e. On démontre alors, en utilisant la définition de la topologie T_e et la définition des morphismes bicouvrants (5.2), l'équivalence des assertions suivantes :

i) Le morphisme u de $C\hat{}$ est bicouvrant pour la topologie T_e.
ii) Le morphisme u de $C\hat{}$ est transformé par $\underline{a}'$ en un isomorphisme,

Il est clair que C' est une sous-catégorie pleine de C_e. Il suffit donc de montrer que tout faisceau F pour la topologie T_e est un objet de C'. Mais, d'après l'équivalence ci-dessus, le morphisme $F \to i' \circ a'(F)$ est bicouvrant, et sa source et son but étant des faisceaux, on en déduit par 5.3 (ii) que $F \to i' \circ a'(F)$ est un isomorphisme, C.Q.F.D.

6. Faisceaux à valeurs dans une catégorie

6.0. — Soient C et D deux catégories. Un foncteur contravariant de C dans D, $F : C^\circ \to D$, est appelé un *préfaisceau sur C à valeurs dans D*.

Définition 6.1. — *Soient C un site, D une catégorie. Un préfaisceau $F : C^{\circ} \to D$ est appelé un* faisceau sur C à valeurs dans D *(ou, plus brièvement, un faisceau à valeurs dans D) si pour tout objet S de D, le préfaisceau d'ensembles :*

$$X \longmapsto \mathrm{Hom}_D(S, F(X)) \quad , \quad X \in \mathrm{ob}(C)$$

est un faisceau. La sous-catégorie pleine de $\mathbf{Hom}(C^{\circ}, D)$ *formée des faisceaux sur C à valeurs dans D sera notée* $\mathbf{Hom}^{\sim}(C^{\circ}, D)$.

Remarques 6.2. — 1) La condition 6.1 signifie que pour tout objet X de C, tout crible couvrant R de X, et tout objet S de D, on a un isomorphisme (I 3.5 et 2.1) : 40

$$\mathrm{Hom}_D(S, F(X)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{C/R} F(.).$$

On retrouve ainsi, lorsque D est la catégorie des $\mathscr{U}$-ensembles, la définition des faisceaux d'ensembles (*loc. cit.*).

2) Soient D' une $\mathscr{U}$-catégorie et $G : D \to D'$ un foncteur commutant aux limites projectives. Le foncteur G transforme, par composition, les faisceaux à valeurs dans D en faisceaux à valeurs dans D'.

6.3.0. — Soient γ une espèce de structure algébrique définie par limites projectives finies (I 2.9) et $\mathscr{U} - \gamma$ la catégorie des γ-ensembles qui appartiennent à $\mathscr{U}$. Désignons par esj : $\mathscr{U} - \gamma \to \mathscr{U} - \mathrm{Ens}$ le foncteur « ensemble sous-jacent ». Le foncteur esj commute aux limites projectives et, par suite, d'après la remarque précédente, définit par composition des foncteurs :

$$\mathrm{esj}^{\wedge} : \mathbf{Hom}(C^{\circ}, \mathscr{U} - \gamma) \longrightarrow C^{\wedge}$$
$$\mathrm{esj}^{\sim} : \mathbf{Hom}^{\sim}(C^{\circ}, \mathscr{U} - \gamma) \longrightarrow C^{\sim}.$$

Le foncteur $\mathrm{esj}^{\sim}$ est appelé le foncteur « faisceau d'ensembles sous-jacent ». En fait, il se factorise de façon canonique par la catégorie $\gamma - \widetilde{C}$ des γ-objets de $C^{\sim}$, et désignant encore par $\widetilde{\mathrm{esj}}$ le foncteur

$$\mathbf{Hom}^{\sim}(C^{\circ}, \mathscr{U} - \gamma) \longrightarrow \gamma - \widetilde{C}$$

obtenu, on peut énoncer :

Proposition 6.3.1. — *Le foncteur* $\mathrm{esj}^{\sim}$ *établit une équivalence de catégories entre le catégorie des faisceaux sur C à valeurs dans $\mathscr{U} - \gamma$, celle des γ-objets de la catégorie des faisceaux d'ensembles, et la catégorie des γ-objets de la catégorie des préfaisceaux d'ensembles dont le préfaisceau sous-jacent est un faisceau.*

Preuve. — La preuve utilise essentiellement (I 3.2) et le fait qu'une limite projective finie 41
de faisceaux dans la catégorie des préfaisceaux est un faisceau (4.1).

6.3.2. — La proposition précédente justifie l'abus de langage qui consiste à identifier un faisceau à valeurs dans $\mathscr{U} - \gamma$ et la γ-objet correspondant dans $C^{\sim}$. Nous ferons désormais systématiquement cet abus de langage.

Nous emploierons la terminologie classique : *faisceaux de groupes, faisceaux de groupes commutatifs* (que nous appellerons le plus souvent *faisceaux abéliens*), *faisceaux d'anneaux, faisceaux de A-modules* etc.

6.3.3. — Nous désignons par
$$C^{\sim}_{\gamma} (resp.\ C^{\wedge}_{\gamma})$$
la catégorie des γ-objets de $C^{\sim}$ (resp. de $C^{\wedge}$). Lorsque γ est l'espèce de structure « A-module », on écrit aussi $C^{\sim}_{A}$, ou simplement $\widetilde{C}_{\mathrm{ab}}$ lorsque $A = \mathbf{Z}$.

Supposons que C soit un $\mathcal{U}$-site. Le foncteur « faisceau associé » est exact à gauche (4.1) et par suite :

Proposition 6.4. — *Le foncteur d'inclusion $i_{\gamma} : C^{\sim}_{\gamma} \to C^{\wedge}_{\gamma}$ admet un adjoint à gauche a_{γ} exact à gauche, i.e. on a un isomorphisme :*
$$\mathrm{Hom}_{C^{\sim}_{\gamma}}(a_{\gamma},\ ) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{C^{\wedge}_{\gamma}}(\ , i_{\gamma}).$$

Soit X un objet de $C^{\wedge}_{\gamma}$. Le faisceau d'ensembles sous-jacent à $a_{\gamma}(X)$ est canoniquement isomorphe au faisceau d'ensembles associé au préfaisceau d'ensembles sous-jacent à X. Le morphisme de préfaisceaux d'ensembles sous-jacents au morphisme d'adjonction $\mathrm{id} \to i_{\gamma}a_{\gamma}$ s'identifie au morphisme d'adjonction appliqué au préfaisceau d'ensembles sous-jacent.

42 ***Proposition 6.5.*** — *Supposons que le foncteur* $\mathrm{esj} : \gamma - \mathcal{U} \to \mathcal{U} - \mathrm{Ens}$ *admette un adjoint à gauche* [i] *:*
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}-\mathrm{Ens}}(.,\mathrm{esj}(.)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\gamma-\mathcal{U}}(\mathrm{Lib}(.),.).$$

Le foncteur $\mathrm{esj}^{\sim} : C^{\sim}_{\gamma} \to C^{\sim}$ *(resp.* $\mathrm{esj}^{\wedge} : C^{\wedge}_{\gamma} \to C^{\wedge}$*) admet un adjoint à gauche* $\mathrm{Lib}^{\sim}$ *(resp.* $\mathrm{Lib}^{\wedge}$*) et on a un isomorphisme canonique*
$$\mathrm{Lib}^{\sim} = a_{\gamma}\,\mathrm{Lib}^{\wedge}\, i.$$

Preuve. — La preuve est formelle et est laissée au lecteur.

Corollaire 6.6. — *Soit (X_i), $i \in I$, une famille génératrice de $C^{\sim}$ (4.9). Alors la famille* $\mathrm{Lib}^{\sim}(X_i)$ *est une famille génératrice de $C^{\sim}_{\gamma}$.*

Preuve. — Le preuve est formelle une fois qu'on a remarqué que le foncteur $\mathrm{esj}^{\sim}$ commute aux limites projectives et qu'il est conservatif ($\mathrm{esj}^{\sim}(u)$ est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ u est isomorphisme).

Proposition 6.7. — *Soient A un $\mathcal{U}$-faisceau d'anneaux, ou bien un petit anneau, $C^{\sim}_{A}$ (resp. $C^{\wedge}_{A}$) la catégorie des faisceaux (resp. des préfaisceaux) de A-modules unitaires* (6.3.3) *sur un $\mathcal{U}$-site C. Alors $C^{\sim}_{A}$ est une $\mathcal{U}$-catégorie abélienne vérifiant les axiomes* (AB 5) *(« existence de limites inductives filtrantes exactes à gauche ») et* (AB 3)* *(« existence de produits infinis ») de* [Tohoku]. *Elle possède une famille de générateurs indexée par un élément de $\mathcal{U}$.*

Preuve. — Il est clair que la catégorie $C^{\wedge}_{A}$ est une catégorie abélienne vérifiant les axiomes
43 (AB 3), (AB 4), et (AB 5) (I 2.8 et I 3.3). On déduit alors de 6.4 que la catégorie $C^{\sim}_{A}$ est une catégorie additive où les noyaux et conoyaux sont représentables. Plus précisément, soient i_A et a_A les foncteurs inclusion dans les préfaisceaux et faisceaux associés et $u : X \to Y$ un morphisme de $C^{\sim}_{A}$. Le foncteur a_A est exact à gauche et commute aux limites inductives. Le

i. On démontre qu'un tel adjoint existe toujours [C.F.] : groupe libre, groupe abélien libre, A-module libre etc.

foncteur i_A commute aux limites projectives. Par suite le foncteur $i_A a_A : C^{\hat{}} \to C_A^{\hat{}}$ est un foncteur additif exact à gauche. On en déduit des isomorphismes canoniques :

$$(*) \qquad i_a(\mathrm{Ker}(u)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(i_A(u)),$$

$$(**) \qquad \mathrm{coker}(u) \xrightarrow{\sim} a_A\, \mathrm{coker}(i_a(u)).$$

On a par suite un isomorphisme canonique :

$$(***) \qquad \mathrm{coim}(u) \xrightarrow{\sim} a_A\, \mathrm{coim}(i_a(u)).$$

Montrons que le morphisme canonique $\mathrm{coim}(u) \to \mathrm{im}(u)$ est un isomorphisme. Pour cela, il suffit de montrer, d'après (*), que la suite :

$$0 \longrightarrow i_A(\mathrm{coim}(u)) \longrightarrow i_A(Y) \longrightarrow i_A(\mathrm{coker}(u))$$

est exacte. Utilisant les isomorphismes $(**)$ et $(***)$ et remarquant que $a_A i_A(Y)$ est isomorphe à Y, on voit que cette suite est isomorphe à la suite :

$$0 \longrightarrow i_A a_A(\mathrm{coim}(i_A(u)) \longrightarrow i_A a_A i_A(Y) \longrightarrow i_A a_A(\mathrm{coker}(i_A(u)),$$

qui n'est autre que la transformée par le foncteur $i_A a_A$ de la suite :

$$0 \longrightarrow \mathrm{coim}(i_A(u)) \longrightarrow i_A(Y) \longrightarrow \mathrm{coker}(i_A(u)).$$

Or, cette suite est exacte et le foncteur $i_A a_A$ est exact à gauche. La catégorie $C_A^{\tilde{}}$ est donc une catégorie abélienne. Le foncteur $a_A : C_A^{\hat{}} \to C_A^{\tilde{}}$ est exact à gauche et commute aux limites **44**
inductives quelconques. Par suite il est additif, exact et commute aux limites inductives. La catégorie $C_A^{\hat{}}$ vérifiant l'axiome (AB 5), il en est de même de la catégorie $C_A^{\tilde{}}$. Enfin il est clair que dans la catégorie $C_A^{\tilde{}}$, les produits indexés par un élément de $\mathscr{U}$ sont représentables et, par suite, que l'axiome (AB 3)* est vérifié, ce qui achève la démonstration de la première assertion.

Pour tout anneau A élément de $\mathscr{U}$, le foncteur :

$$\mathrm{esj} : \mathscr{U} - A - \mathrm{module} \longrightarrow \mathscr{U} - \mathrm{Ens}$$

admet un adjoint à gauche X_A (A-module libre engendré). Il suffit donc d'appliquer 4.10 et 6.6 pour achever la preuve.

Notation 6.8. — Soit H un faisceau d'ensembles. Le faisceau de A-modules associé au préfaisceau (cf. notation 6.5)

$$X \longmapsto \mathrm{Lib}_A\, H(X) \qquad X \in \mathrm{ob}\, C$$

est noté A_H. Lorsque $H = \underline{a}(X)$ (faisceau associé au préfaisceau représenté par X) on écrit parfois simplement A_X (par abus de notation). La démonstration de 6.7 montre que la famille de faisceaux de A-module $\mathscr{A}_X$, $(X \in \mathrm{ob}(C))$, est une famille génératrice, indexée par un élément de $\mathscr{U}$, de la catégorie des faisceaux de A-modules.

Remarque 6.9. — D'après [Tôhoku], 6.7 montre que la catégorie $C_A^{\tilde{}}$, lorsque A est un élément de $\mathscr{U}$, possède suffisamment d'injectifs. On sait, par ailleurs, que les produits infinis ne sont pas nécessairement exacts dans $C_A^{\tilde{}}$, et, par suite, que la catégorie $C_A^{\tilde{}}$ n'admet pas, en général, suffisamment de projectifs [Roos].

Références

45 [1] M. Artin ; Grothendieck's topologies.

[2] M. Demazure : Séminaire de Géométrie Algébrique III, Exposé IV Lecteur Notes. Springer-Verlag.

[3] A. Grothendieck : Sur quelques points d'AIgèbre Homologique. Tohoku Math. Journal.

[4] J.E. Roos : CR