I. Préfaisceaux

A. Grothendieck et J.-L. Verdier

version : `9f5025b 2017-03-15 15:35:39 +0100`

Table des matières

Dans les numéros 0 à 5 de cet exposé, on présente les propriétés élémentaires, et le plus souvent bien connues, des catégories de préfaisceaux[(i)]. Ces propriétés sont utilisées constamment dans la suite du séminaire et leur connaissance est essentielle pour la compréhension des exposés suivants. Les démonstrations sont immédiates ; elles sont le plus souvent omises. Dans les numéros 6 à 9 sont abordés quelques thèmes utilisés à différentes reprises dans la suite. Le lecteur pressé pourra les omettre en première lecture. Le numéro 10 fixe la terminologie employée. L'appendice 11 est dû à N. Bourbaki. 1

0. Univers

Un *univers* est un ensemble non-vide[(1)] $\mathscr{U}$ qui jouit des propriétés suivantes :

[(i)] Le lecteur pourra aussi consulter SGA 3 I § § 1 à 3.

[(1)] N.D.E. : Cette définition contredit l'appendice de Bourbaki *infra*. Toutefois l'intérêt des univers vides semble discutable…

($\mathcal{U}$ 1) Si $x \in \mathcal{U}$ et si $y \in x$ alors $y \in \mathcal{U}$.
($\mathcal{U}$ 2) Si $x, y \in \mathcal{U}$, alors $\{x, y\} \in \mathcal{U}$.
($\mathcal{U}$ 3) Si $x \in \mathcal{U}$, alors $\mathscr{P}(x) \in \mathcal{U}$.
($\mathcal{U}$ 4) Si $(x_i, i \in I)$ est une famille d'éléments de $\mathcal{U}$ et $I \in \mathcal{U}$, alors $\cup_{i \in I} x_i \in \mathcal{U}$.

2 Des axiomes précédents on déduit facilement les propriétés :

- Si $x \in \mathcal{U}$, l'ensemble $\{x\}$ appartient à $\mathcal{U}$.
- Si x est un sous-ensemble de $y \in \mathcal{U}$, alors $x \in \mathcal{U}$.
- Si $x, y \in \mathcal{U}$, le couple $(x, y) = \{\{x, y\}, x\}$ (définition de Kuratowski) est un élément de $\mathcal{U}$.
- Si $x, y \in \mathcal{U}$, la réunion $x \cup y$ et le produit $x \times y$ sont des éléments de $\mathcal{U}$.
- Si $(x_i, i \in I \in \mathcal{U})$ est une famille d'éléments de $\mathcal{U}$, le produit $\prod_{i \in I} x_i$ est un élément de $\mathcal{U}$.
- Si $x \in \mathcal{U}$, alors $\mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(\mathcal{U})$ (strictement). En particulier la relation $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ n'est pas vérifiée.

On peut donc faire toutes les opérations usuelles de la théorie des ensembles à partir des éléments d'un univers sans, pour cela, que le résultat final cesse d'être un élément de l'univers.

La notion d'univers a pour premier intérêt de fournir une définition des catégories usuelles : la catégorie des ensembles appartenant à l'univers $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$-Ens), la catégorie des espaces topologiques appartenant à l'univers $\mathcal{U}$, la catégorie des groupes commutatifs appartenant à l'univers $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$-Ab), la catégorie des catégories appartenant à l'univers $\mathcal{U}$....

Cependant le seul univers connu est l'ensemble des symboles du type $\{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}, \varnothing\}\}$ etc.. (tous les éléments de cet univers sont des ensembles finis et cet univers est dénombrable). En particulier, on ne connaît pas d'univers qui contienne un élément de cardinal infini. On est donc amené à ajouter aux axiomes de la théorie des ensembles l'axiome :
($\mathcal{U}A$) *Pour tout ensemble x il existe un univers $\mathcal{U}$ tel que $x \in \mathcal{U}$.*

3 L'intersection d'une famille d'univers étant un univers, on en déduit immédiatement que tout ensemble est élément d'un plus petit univers. On peut montrer que l'axiome ($\mathcal{U}A$) est indépendant des axiomes de la théorie des ensembles.

On ajoutera aussi l'axiome :
($\mathcal{U}B$) *Soit $R\{x\}$ une relation et $\mathcal{U}$ un univers. S'il existe un élément $y \in \mathcal{U}$ tel que $R\{y\}$, alors $\tau_x R\{x\} \in \mathcal{U}$.*

La non-contradiction des axiomes ($\mathcal{U}A$) et ($\mathcal{U}B$) par rapport aux autres axiomes de la théorie des ensembles n'est pas démontrée ni démontrable, semble-t-il.

Soit $\mathcal{U}$ un univers et $c(\mathcal{U})$ la borne supérieure des cardinaux des éléments de $\mathcal{U}$ $(c(\mathcal{U}) \leq \mathrm{card}(\mathcal{U}))$. Le cardinal $c(\mathcal{U})$ jouit des propriétés suivantes :

(FI) Si $a < c(\mathcal{U})$, alors $2^a < c(\mathcal{U})$.

(FII) Si $(a_i, i \in I)$ est une famille de cardinaux strictement inférieurs à $c(\mathcal{U})$ et si $\mathrm{card}(I)$ est strictement inférieur à $c(\mathcal{U})$, $\Sigma_{i \in I} a_i < c(\mathcal{U})$.

Les cardinaux qui possèdent les propriétés (FI) et (FII) sont appelés *cardinaux fortement inaccessibles.*

Le cardinal 0 et le cardinal infini dénombrable sont fortement inaccessibles.

L'axiome ($\mathcal{U}A$) implique :

($\mathcal{U}A'$) *Tout cardinal est majoré strictement par un cardinal fortement inaccessible.*

On peut montrer (11) que réciproquement la non contradiction de (UA') implique la non contradiction de (UA), et que la non contradiction de ces axiomes entraîne celle dans l'axiome $(\mathscr{U}B)$.

Appelons *ensemble artinien* tout ensemble E tel qu'il n'existe pas de familles infinies 4
$(x_n, n \in N)$ telle que $x_\circ \in E$, $x_{n+1} \in x_n$. On peut alors montrer [*loc. cit.*] qu'il y a une correspondance biunivoque entre les cardinaux fortement inaccessibles et les univers artiniens, définie ainsi : à tout cardinal fortement inaccessible c on fait correspondre l'unique univers artinien U_c tel que

$$\mathrm{card}(\mathscr{U}_c) = c.$$

Soient $c < c'$ deux cardinaux fortement inaccessibles. On a :

$$\mathscr{U}_c \in \mathscr{U}'_{c'}.$$

En particulier les univers artiniens de cardinaux inférieurs à un cardinal donné forment un ensemble bien ordonné (pour la relation d'appartenance). L'axiome $(\mathscr{U}A')$ est équivalent à l'axiome :

$(\mathscr{U}A'')$. *Tout ensemble artinien est élément d'un univers artinien.*

Remarquons que tous les ensembles usuels $(\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \dots)$ sont des ensembles artiniens.

1. $\mathscr{U}$-catégories. Préfaisceaux d'ensembles

1.0. — *Dans la suite du séminaire et sauf mention expresse du contraire, les univers considérés posséderont un élément de cardinal infini.* Soit $\mathscr{U}$ un univers. On dit qu'un ensemble est $\mathscr{U}$*-petit* (ou, quand aucune confusion n'en résulte, *petit*) s'il est *isomorphe* à un élément de $\mathscr{U}$. On utilise aussi la terminologie : petit groupe, petit anneau, petite catégorie[(2)] ...On supposera souvent, sans mention explicite, que les schémas, espaces topologiques, ensembles d'indices...avec lesquels on travaille sont $\in \mathscr{U}$, où tout au moins ont un cardinal $\in \mathscr{U}$; 5
cependant, de nombreuses catégories avec lesquelles on travaillera ne seront pas $\in \mathscr{U}$.

Définition 1.1. — *Soient* $\mathscr{U}$ *un univers et* C *une catégorie. On dit que* C *est une* $\mathscr{U}$*-catégorie si pour tout couple* (x, y) *d'objets de* C*, l'ensemble* $\mathrm{Hom}_C(x, y)$ *est* $\mathscr{U}$*-petit.*

1.1.1. — Soient C et D deux catégories et $\mathrm{Fonct}(C, D)$ la catégorie des foncteurs de C dans D. On vérifie immédiatement les assertions suivantes :

a) Si C et D sont éléments d'un univers $\mathscr{U}$ (resp. $\mathscr{U}$-petites) la catégorie $\mathrm{Fonct}(C, D)$ est un élément de $\mathscr{U}$ (resp. est $\mathscr{U}$-petite).
b) Si C est $\mathscr{U}$-petite et si D est une $\mathscr{U}$-catégorie, $\mathrm{Fonct}(C, D)$ est une $\mathscr{U}$-catégorie.

Remarque 1.1.2. — Soit D une catégorie possédant les propriétés suivantes :

(C1) L'ensemble $\mathrm{ob}(D)$ est contenu dans l'univers $\mathscr{U}$.
(C2) Pour tout couple (x, y) d'objets de D, l'ensemble $\mathrm{Hom}_D(x, y)$ est un élément de $\mathscr{U}$.

[(2)] N.D.E. : Une catégorie C est vue comme un ensemble de flèches (muni du sous-ensemble des objets, vu comme ensemble des flèches identiques et des applications « source, but »). Ainsi, les expressions « C est élément de $\mathscr{U}$ » ou « C est $\mathscr{U}$-petite » font sens.

(Les catégories usuelles construites à partir d'un univers $\mathcal{U}$ possèdent ces deux propriétés : $\mathcal{U}$-Ens, $\mathcal{U}$-Ab,...). Soit $\boldsymbol{C}$ une catégorie appartenant à $\mathcal{U}$. Alors la catégorie $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ ne possède pas en général les propriétés (C1) et (C2). Par exemple la catégorie $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{C}, \mathcal{U}\text{-Ens})$ ne possède aucune des propriétés (C1) et (C2). C'est ce qui justifie la définition adoptée de $\mathcal{U}$-catégorie, de préférence à la notion plus restrictive par les conditions (C1) et (C2) ci-dessus.

6 ***Définition 1.2.*** — *Soit $\boldsymbol{C}$ une catégorie. On appelle catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur $\boldsymbol{C}$ relative à l'univers $\mathcal{U}$ (ou, lorsqu'aucune confusion n'en résulte, catégorie des préfaisceaux sur $\boldsymbol{C}$) la catégorie des foncteurs contravariants sur $\boldsymbol{C}$ à valeur dans la catégorie des $\mathcal{U}$-ensembles.*

On désigne par $\widehat{\boldsymbol{C}}_{\mathcal{U}}$ (ou plus simplement, lorsqu'aucune confusion n'en résulte, par $\widehat{\boldsymbol{C}}$) la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur $\boldsymbol{C}$ relative à l'univers $\mathcal{U}$. Les objets de $\widehat{\boldsymbol{C}}_{\mathcal{U}}$ sont appelés $\mathcal{U}$-préfaisceaux (ou plus simplement préfaisceaux) sur $\boldsymbol{C}$. Lorsque $\boldsymbol{C}$ est $\mathcal{U}$-petite, la catégorie $\widehat{\boldsymbol{C}}_{\mathcal{U}}$ est une $\mathcal{U}$-catégorie. Lorsque $\boldsymbol{C}$ est une $\mathcal{U}$-catégorie, $\widehat{\boldsymbol{C}}_{\mathcal{U}}$ n'est pas nécessairement une $\mathcal{U}$-catégorie.

Construction-définition 1.3. — Soit x un objet d'une $\mathcal{U}$-catégorie $\boldsymbol{C}$. On appelle *$\mathcal{U}$-foncteur représenté par x* le foncteur $h_{\mathcal{U}}(x) : \boldsymbol{C}^{\circ} \to \mathcal{U}\text{-Ens}$ dont la construction suit [(2)]. Soit y un objet de $\boldsymbol{C}$.

a) Si $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(y, x)$ est un élément de $\mathcal{U}$, alors :

$$h_{\mathcal{U}}(x)(y) = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(y, x)$$

b) Supposons que $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(y, x)$ ne soit pas un élément de $\mathcal{U}$ et soit $\boldsymbol{R}(Z, x, y)$ la relation : « L'ensemble Z est but d'un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(y, x) \xrightarrow{\sim} Z$ ». On pose alors :

$$h_{\mathcal{U}}(x)(y) = \tau_Z \boldsymbol{R}(Z).$$

(En vertu de l'axiome ($\mathcal{U}\boldsymbol{B}$), $h_{\mathcal{U}}(x)(y)$ est un élément de $\mathcal{U}$). Soit $\boldsymbol{R}'(u, x, y)$ la relation : « u est une bijection

$$u : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(y, x) \xrightarrow{\sim} h_{\mathcal{U}}(x)(y) \text{ ».}$$

7 On pose alors :

$$\varphi(y, x) = \tau_u \boldsymbol{R}'(u).$$

On remarquera qu'on *a*, dans les cas (a) et (b), un isomorphisme canonique :

$$\varphi(y, x) : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(y, x) \xrightarrow{\sim} h_{\mathcal{U}}(x)(y).$$

(Dans le cas a) $\varphi(y, x)$ est l'identité). Soit alors $u : y \to y'$ une flèche de $\boldsymbol{C}$. Le morphisme u définit, par la composition des morphismes, une application :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(u, x) : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(y', x) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(y, x).$$

On pose alors

$$h_{\mathcal{U}}(x)(u) = \varphi(y, x)\, \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(x, u) \varphi(y, x)^{-1}.$$

On vérifie immédiatement que $h_{\mathcal{U}}(x)$, ainsi défini, est un foncteur $\widehat{\boldsymbol{C}} \to \mathcal{U}$-Ens.

---

(2) $\boldsymbol{C}^{\circ}$ désignera toujours la catégorie opposée à $\boldsymbol{C}$.

1.3.1. — De même, on définit, à l'aide des isomorphismes φ, pour tout morphisme $y : x \to x'$ un morphisme de foncteurs :

$$h_{\mathscr{U}}(y) : h_{\mathscr{U}}(x) \longrightarrow h_{\mathscr{U}}(x')$$

et on vérifie immédiatement qu'on a défini ainsi un foncteur

$$h_{\mathscr{U}} : C \longrightarrow \widehat{C}_{\mathscr{U}}.$$

1.3.2. — Soit maintenant $\mathscr{V}$ un univers tel que $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$. On a alors un foncteur canonique pleinement fidèle :

$$\mathscr{U}\text{-Ens} \hookrightarrow \mathscr{V}\text{-Ens}$$

d'où un foncteur pleinement fidèle :

$$\widehat{C}_{\mathscr{U}} \hookrightarrow \widehat{C}_{\mathscr{V}}$$

et le diagramme : 8

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "h_{\underline{U}}"] \arrow[dr, "h_{\underline{V}}"'] & \widehat{C}_{\underline{U}} \arrow[d, hook] \\
 & \widehat{C}_{\underline{V}}
\end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près. Lorsque C est un élément de $\mathscr{U}$, cet isomorphisme canonique est l'identité.

1.3.3. — *Dans la pratique, l'univers $\mathscr{U}$ est fixé une fois pour toutes et n'est pas mentionné.* On utilise alors les notations $\widehat{C}$ (pour la catégorie des $\mathscr{U}$-préfaisceaux d'ensembles) et

$$h : C \longrightarrow \widehat{C}.$$

Pour tout objet x de C, le préfaisceau $h(x)$ est appelé le *préfaisceau représenté par x* et nous identifierons toujours la valeur en $y \in \mathrm{ob}(C)$ du préfaisceau $h(x)$ avec $\mathrm{Hom}_C(y, x)$.

Proposition 1.4. — *Soient C une $\mathscr{U}$-catégorie, F un préfaisceau sur C et X un objet de C. Il existe un isomorphisme fonctoriel en X et en F :*

$$i : \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(h(X), F) \xleftarrow{\sim} F(X),$$

l'application i n'étant autre, lorsque F est de la forme $h(Y)$, que l'application :

$$h : \mathrm{Hom}(h(X), h(Y)) \longleftarrow \mathrm{Hom}(X, Y).$$

En particulier le foncteur h est pleinement fidèle.

1.4.1. — Cette proposition justifie les abus de langage habituels identifiant un objet de C et le foncteur contravariant correspondant. Un préfaisceau isomorphe à un objet image par h 9
(ou, en utilisant l'abus de langage signalé ci-dessus, isomorphe à un objet de C) est appelé *préfaisceau représentable.*

1.4.2. — Soit $\mathscr{V}$ un univers contenant un univers $\mathscr{U}$. La catégorie des $\mathscr{U}$-préfaisceaux est une sous-catégorie *pleine* de la catégorie des $\mathscr{V}$-préfaisceaux et par suite un $\mathscr{U}$-préfaisceau est représentable si et seulement si son image dans la catégorie des $\mathscr{V}$-préfaisceaux est un $\mathscr{V}$-préfaisceau représentable.

2. Limites projectives et inductives

Soient C une $\mathscr{U}$-catégorie et I une petite catégorie. Notons $\mathrm{Fonct}(I, C)$ la catégorie des foncteurs de I dans C. La catégorie $\mathrm{Fonct}(I, C)$ est une $\mathscr{U}$-catégorie. À tout objet X de C associons la sous-catégorie $\mathscr{X}$ de C ayant pour seul objet l'objet X et pour seule flèche l'identité de X. Désignons par $i_X : \mathscr{X} \to C$ le foncteur d'inclusion. Il existe un et un seul foncteur $e_X : I \to \mathscr{X}$, et nous désignerons par $k_X : I \to C$ le foncteur $i_X \circ e_X$. (On dira que k_X est le foncteur constant de valeur X). La correspondance $X \mapsto k_X$ est visiblement fonctorielle en X, ce qui nous permet de définir, pour tout foncteur $G : I \to C$, le préfaisceau $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fonct}(I,C)}(k_X, G)$.

Définition 2.1. — *On appelle limite projective de G et on note $\varprojlim_I G$ le préfaisceau :*

$$X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fonct}(I,C)}(k_X, G).$$

10 *Lorsque le préfaisceau $\varprojlim_I G$ est représentable, on désigne encore par $\varprojlim_I G$ un objet de C qui le représente. L'objet $\varprojlim_I G$ n'est donc défini qu'à isomorphisme près. Lorsqu'aucune confusion n'en résulte on emploie la notation abrégée $\varprojlim G$.*

Pour G variable, $\varprojlim G$ est un foncteur de la catégorie $\mathrm{Fonct}(I, C)$ à valeurs dans $\widehat{C}$.

2.1.1. — On définit de même par symétrie (renversement du sens des flèches dans C) la limite inductive d'un foncteur : c'est un foncteur covariant sur C à valeur dans la catégorie des $\mathscr{U}$-ensembles. Nous emploierons les notations $\varinjlim_I G$ ou bien $\varinjlim G$.

On notera que les produits, produits fibrés, noyaux sont des limites projectives. De même les sommes, sommes amalgamées, conoyaux sont des limites inductives.

Définition 2.2. — *Soient I et C deux catégories et $G : I \to C$ un foncteur. On dit que la limite projective de G est représentable s'il existe un univers $\mathscr{U}$ tel que :*

1) *La catégorie I soit $\mathscr{U}$-petite.*
2) *La catégorie C soit une $\mathscr{U}$-catégorie.*
3) *Le préfaisceau $\varprojlim G$ à valeurs dans la catégorie des $\mathscr{U}$-ensembles soit représentable.*

Il résulte au *n*° 1 que l'objet $\varprojlim G$ représentant le préfaisceau $\varprojlim G$ ne dépend pas, à isomorphisme près, de l'univers $\mathscr{U}$. Notons aussi qu'il existe un plus petit univers $\mathscr{U}'$ possédant les propriétés (1) et (2), et que le préfaisceau $\varprojlim G$ est nécessairement à valeurs dans la catégorie des $\mathscr{U}'$-ensembles.

11 *2.2.1.* — Soient I et C deux catégories. On dit que *les I-limites projectives dans C sont représentables* si pour tout foncteur $G : I \to C$, la limite projective de G est représentable. Enfin soient C une catégorie et $\mathscr{U}$ un univers. On dit que les *$\mathscr{U}$-limites projectives dans C sont représentables* si pour toute catégorie I $\mathscr{U}$-petite et pour tout foncteur $G : I \to C$, la limite projective de G est représentable.

Proposition 2.3. — *Soient C une catégorie et $\mathscr{U}$ un univers. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *Les $\mathscr{U}$-limites projectives dans C sont représentables.*
ii) *Les produits, indexés par un petit ensemble sont représentables, et les noyaux de couples de flèches sont représentables.*
iii) *Les produits, indexés par un petit ensemble sont représentables, et les produits fibrés sont représentables.*

Preuve. — Il suffit de remarquer qu'il existe un isomorphisme fonctoriel en G

$$\varprojlim G = \operatorname{Ker}\Big(\prod_{i \in \operatorname{ob}(I)} G(i) \rightrightarrows \prod_{u \in F\ell(I)} G(\operatorname{but}(u))\Big),$$

le couple de flèches étant défini par les morphismes

$$\prod_{i \in \operatorname{Ob}(I)} G(i) \xrightarrow{\operatorname{pr}_{\operatorname{but}(u)}} G(\operatorname{but}(u))$$
$$\prod_{i \in \operatorname{Ob}(I)} G(i) \xrightarrow{\operatorname{pr}_{\operatorname{source}(u)}} G(\operatorname{source}\,(u)) \xrightarrow{G(u)} G(\operatorname{but}(u)).$$

De plus, il est clair que $\operatorname{Ker}(X \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} Y) = X \prod_{X \times Y} X$ les deux morphismes de X dans $X \times Y$ étant $\operatorname{id}_X \times u$ et $\operatorname{id}_X \times v$.

2.3.1. — Il existe évidemment des définitions et assertions analogues pour les limites inductives que nous n'expliciterons pas. De même pour les limites projectives et inductives finies 12
(i.e. relatives à une catégorie I finie).

Corollaire 2.3.2. — *Désignons par* $\mathscr{U}$-Ens *la catégorie des $\mathscr{U}$-ensembles et par* $\mathscr{U}$-Ab *la catégorie des objets groupes abéliens de* $\mathscr{U}$-Ens. *Les $\mathscr{U}$-limites projectives et inductives dans* $\mathscr{U}$-Ens *et dans* $\mathscr{U}$-Ab *sont représentables.*

Proposition 2.3.3. — *Soient I une petite catégorie, $F : I \to \mathscr{U}$*-Ens *en foncteur et $G \in$* ob *I un petit ensemble d'objets de I tel que pour tout objet X de I il existe un objet $Y \in G$ et un morphisme $Y \to X$ (resp. $X \to Y$). Alors $\varprojlim_I F$ (resp. $\varinjlim_I F$ est représentable et on a* $\operatorname{card}(\varprojlim_I F) \leq \Pi_{Y \in G} \operatorname{card}(F(Y))$ *(resp.* $\operatorname{card}(\varinjlim_I F) \leq \Sigma_{Y \in G} \operatorname{card}(F(Y))$*).*

Preuve. — On vérifie immédiatement que $\varprojlim_I F'$ (resp. $\varinjlim_I F'$) est isomorphe à un sous-objet (resp. un quotient de $\Pi_{Y \in G} F(Y)$ (resp. $\amalg_{Y \in G} F(Y)$) ; d'où la proposition.

Définition 2.4.1. — *Soient C une catégorie où les limites projectives (resp. inductives) finies soient représentables et $u : C \to C'$ un foncteur. On dit que u est exact à gauche (resp. à droite) s'il « commute » aux limites projectives (resp. inductives) finies. Un foncteur exact à gauche et à droite est appelé un foncteur exact.*

2.4.2. — Il résulte de 2.3 que, pour qu'un foncteur soit exact à gauche, il faut et il suffit qu'il transforme l'objet final (= produit vide) en l'objet final, le produit de deux objets en le produit des deux objets images, et le noyaux des couples de deux flèches en le noyau des couples images ou encore, qu'il transforme l'objet final en l'objet final et les produits fibrés en produits fibrés (on suppose que dans C les $\varprojlim$ finies sont représentables).

13 *2.5.0.* — Soient I, J et C trois catégories, $G : I \times J \to C$ un foncteur (i.e. un foncteur de I à valeur dans la catégorie des foncteurs de J dans C). Supposons que les limites projectives des foncteurs

$$\begin{aligned} G_i : J &\longrightarrow C \qquad i \in \mathrm{ob}(I) \\ j &\longmapsto G(i \times j) \end{aligned}$$

soient représentables, et que le foncteur :

$$i \longmapsto \varprojlim G_i$$

admette une limite projective représentable. Il est clair qu'alors le foncteur G admet une limite projective représentable et qu'on a un isomorphisme canonique :

$$\varprojlim_{I\times J} G \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{I} \varprojlim_{J} G_i,$$

et que par suite on a un isomorphisme canonique

$$\varprojlim_{I} \varprojlim_{J} G_i \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{J} \varprojlim_{I} G_j.$$

Nous dirons par la suite plus brièvement que les limites projectives commutent aux limites projectives. On voit de même que les limites inductives commutent aux limites inductives. Mais il n'est pas vrai en général que les limites inductives commutent aux limites projectives.

Définition 2.5. — *Soient C une catégorie à produits fibrés représentables, I une catégorie, $G : I \to C$ un foncteur, $g : G \to X$ un morphisme de G dans un objet de C (i.e. un*
14 *morphisme de G dans le foncteur constant associé X), $m : Y \to X$ un morphisme de C. Soit $G \times_X Y : I \to C$ le foncteur*

$$i \longmapsto G(i) \times_X Y.$$

On dit que la limite inductive de G est universelle si pour tout objet X, tout morphisme $g : G \to X$, tout morphisme $m : Y \to X$,

a) *la limite inductive du foncteur $G \times_X Y$ est représentable,*
b) *le morphisme canonique $\varinjlim(G \times_X Y) \to (\varinjlim G) \times_X Y$ est un isomorphisme.*

Proposition 2.6. — *Soit $\mathscr{U}$ un univers. Les limites inductives dans $\mathscr{U}$-*Ens *qui sont représentables (en particulier, les $\mathscr{U}$-limites inductives* (2.2.1) *dans $\mathscr{U}$-*Ens*) sont universelles.*

Nous utiliserons aussi un autre résultat de commutation entre limites projectives et inductives que nous allons présenter maintenant.

Définition 2.7. — *Une catégorie I est pseudo-filtrante lorsqu'elle possède les propriétés suivantes :*

PS 1) *Tout diagramme de la forme :*

$$\begin{tikzcd} & j \\ i \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & j' \end{tikzcd}$$

peut être inséré dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & j \arrow[dr] & \\ i \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \\ & j' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

PS 2) *Tout diagramme de la forme :*

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & j \end{tikzcd}$$

peut être inséré dans un diagramme : 15

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & j \arrow[r, "w"] & k \end{tikzcd}$$

tel que

$$w \circ u = w \circ v.$$

Une catégorie I est dite filtrante si elle est pseudo-filtrante, non vide et connexe, i.e. si deux objets quelconques de I peuvent être reliés par une suite de flèches (on n'impose aucune condition sur le sens des flèches) ; cela signifie aussi, en présence de PS 2, *que $I \neq \varnothing$ et que pour deux objets a, b de I, il existe toujours un objet c de I et des flèches $a \to c$ et $b \to c$. On dit aussi qu'une catégorie I est cofiltrante si I° est filtrante.*

Exemple 2.7.1. — *Si dans I les sommes amalgamées (resp. les sommes de deux objets) et les conoyaux de doubles flèches sont représentables, alors I est pseudo-filtrante (resp. filtrante).*

Proposition 2.8. — *Soit $\mathcal{U}$ un univers. Les $\mathcal{U}$-limites inductives filtrantes dans $\mathcal{U}$-*Ens *commutent aux limites projectives finies.*

On se ramène immédiatement à démontrer que les $\mathcal{U}$-limites filtrantes commutent aux produits fibrés. La démonstration est laissée au lecteur. On pourra utiliser la description de la limite donnée par le

Lemme 2.8.1. — *Soient I une petite catégorie filtrante, $i \mapsto X_i$ un foncteur de I dans $\mathcal{U}$-*Ens. *Sur l'ensemble somme $\coprod_{i \in \mathrm{ob}\, I} X_i$, soit R la relation :*

(R) *Deux éléments* $x_i \in X_i$ *et* $x_j \in X_j$ *sont reliés s'il existe un objet* $k \in \mathrm{ob}\, I$ *et deux morphismes* $u : i \to k$ *et* $v : j \to k$ *tels que les images dans* X_k *de* x_i *et de* x_j *par les applications de transition* u *et* v *respectivement soient égales.*

16 *Alors :*

1) R *est une relation d'équivalence.*
2) *Le quotient* $\coprod_{i\in \mathrm{ob}\, I} X_i/R$ *est canoniquement isomorphe à* $\varinjlim_I X_i$.
3) *Deux éléments* $x_i \in X_i$ *et* $x_j \in X_j$ *sont respectivement équivalents suivant* R *à deux éléments d'un même* X_k.
4) *Pour tout* $i \in \mathrm{ob}\, I$*, deux éléments* α *et* β *de* X_i *sont équivalents suivant* R *si et seulement s'il existe un morphisme* $u : i \to j$ *tel que* $u(\alpha) = u(\beta)$.

L'assertion 1) résulte de (PS 1) (2.7). Pour démontrer 2), on vérifie que $\coprod_{i\in \mathrm{ob}\, I} X_i/R$ possède la propriété universelle de la limite inductive (on n'utilise que (PS 1)). L'assertion 3) résulte du fait que I est connexe. L'assertion 4) résulte de (PS 2).

Corollaire 2.9. — *Soit* γ *une espèce de structure algébrique « définie par limites projectives finies ». (Le lecteur est prié de donner un sens mathématique à la phrase précédente. Notons seulement que les structures de groupes, groupes abéliens, anneaux, modules, etc... sont de telles structures). Désignons par* $\mathcal{U}$-γ *la catégorie des* γ*-objets de* $\mathcal{U}$-Ens. *Le foncteur qui à chaque objet de* $\mathcal{U}$-γ *associe l'ensemble sous-jacent, commute aux* $\mathcal{U}$*-limites filtrantes. Par suite les* $\mathcal{U}$*-limites filtrantes dans* $\mathcal{U}$-γ *commutent aux limites projectives finies.*

Corollaire 2.10. — *Les* $\mathcal{U}$*-limites pseudo-filtrantes dans* $\mathcal{U}$-Ab *commutent aux limites projectives finies.*

(On se ramène aux limites filtrantes en décomposant la catégorie d'indices en composantes connexes).

17 Notons maintenant un résultat que nous utiliserons constamment : Soient C et C' deux $\mathcal{U}$-catégories, u et v deux foncteurs $C \underset{u}{\overset{v}{\rightleftarrows}} C'$ *u adjoint à gauche* de v. Rappelons que ceci veut dire qu'il existe un isomorphisme entre les bifoncteurs à valeur dans $\mathcal{U}$-Ens :

$$\mathrm{Hom}_{C'}(u(X), X') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_C(X, v(X')).$$

Proposition 2.11. — *Le foncteur* u *commute aux limites inductives représentables ; le foncteur* v *commute aux limites projectives représentables.*

Cette assertion signifie que pour toute catégorie I et tout foncteur $G : I \to C'$ tel que la limite projective de G soit représentable, le foncteur $v \circ G$ admet une limite projective représentable et que l'on a un isomorphisme canonique :

$$v(\varprojlim G) \longrightarrow \varprojlim(v \circ G).$$

Le lecteur explicitera de lui-même l'assertion concernant le foncteur u.

Signalons enfin un calcul de limites projectives dans le cas où la catégorie d'indices admet des produits.

Proposition 2.12. — *Soient I et C deux catégories, $\mathscr{V}$ un univers. On suppose que les $\mathscr{V}$-limites projectives dans C sont représentables et qu'il existe dans I une famille d'objets $(i_\alpha)_{\alpha \in A}$, où A est un élément de $\mathscr{V}$, telle que :*

1) *les produits $i_\alpha \times i_\beta$ soient représentables pour tout couple $(\alpha, \beta) \in A \times A$,*
2) *tout objet de I s'envoie dans un au moins des i_α.*

Alors pour tout contra foncteur F de I dans C

$$F : I^\circ \longrightarrow C,$$

la limite projective de F existe et il existe un isomorphisme fonctoriel en F :

$$\varprojlim F \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}\left(\prod_{\alpha \in A} F(i_\alpha) \rightrightarrows \prod_{(\alpha,\beta) \in A \times A} F(i_\alpha \times i_\beta) \right),$$

les deux flèches étant définies par les projections des produits $i_\alpha \times i_\beta$ sur les facteurs. 18

3. Propriétés d'exactitude de la catégorie des préfaisceaux

Soient C une $\mathscr{U}$-catégorie, $\widehat{C}$ la catégorie des préfaisceaux sur C. Les propriétés d'exactitude de $\widehat{C}$ se déduisent toutes de la proposition suivante :

Proposition 3.1. — *Les $\mathscr{U}$-limites projectives et inductives dans $\widehat{C}$ sont représentables. Pour tout objet X de C, le foncteur sur $\widehat{C}$:*

$$F \longmapsto F(X) \qquad F \in \widehat{C}$$

commute aux limites inductives et projectives.

En d'autres termes, « les limites inductives et projectives dans $\widehat{C}$ se calculent argument par argument ». Citons quelques corollaires.

Corollaire 3.2. — *Soit γ une structure algébrique définie par limites projectives finies. La catégorie des foncteurs contravariants à valeurs dans $\mathscr{U}$-γ est équivalente à la catégorie des γ-objets de $\widehat{C}$.*

Corollaire 3.3. — *Un morphisme de $\widehat{C}$ qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme est un isomorphisme. Un morphisme de $\widehat{C}$ se factorise de manière unique en un épimorphisme suivi d'un monomorphisme. Les limites inductives dans $\widehat{C}$ qui sont représentables, sont universelles. Les $\mathscr{U}$-limites inductives filtrantes dans $\widehat{C}$ commutent aux limites projectives finies. Le foncteur canonique $C \to \widehat{C}$ commute aux limites projectives représentables.*

Plus généralement on peut dire que la catégorie $\widehat{C}$ hérite de toutes les propriétés de la 19
catégorie des $\mathscr{U}$-ensembles faisant intervenir des limites inductives et projectives.

3.4.0. — Soit F un objet de $\widehat{C}$. On désigne par C/F la catégorie suivante : Les objets de C/F sont les couples formés d'un objet X de C et d'un morphisme u de X dans F. Soient (X, u) et (Y, v) deux objets. Un morphisme de (X, u) dans (Y, v) est un morphisme g de X dans Y tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "u"'] & & Y \arrow[dl, "v"] \\ & F & \end{tikzcd} .$$

Proposition 3.4. — *Avec les notations de* (3.4.0)*, le foncteur source $C/F \to \widehat{C}$ admet une limite inductive représentable dans $\widehat{C}$. Le morphisme canonique :*

$$\varinjlim_{C/F} \text{source}\,(.) \longrightarrow F$$

est un isomorphisme.

Corollaire 3.5. — *Soient F et H deux objets de $\widehat{C}$. Il existe un isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{Hom}(F, H) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{(X,u)\in \mathrm{ob}(C/F)} H(X).$$

Preuve. — Le corollaire se déduit immédiatement de 3.4 et de 1.2.

20 ***Proposition 3.6.*** — *Soient C une $\mathscr{U}$-catégorie, $\mathscr{V}$ un univers contenant $\mathscr{U}$ et $i : \widehat{C}_{\mathscr{U}} \to \widehat{C}_{\mathscr{V}}$ le foncteur d'injection naturel des catégories de préfaisceaux correspondantes* (1.3)*. Le foncteur i commute aux limites inductives et projectives. De plus, pour tout objet F de $\widehat{C}_{\mathscr{U}}$, tout sous-objet de $i(F)$ est isomorphe à l'image par i d'un unique sous-objet de F (de sorte qu'on obtient une bijection de l'ensemble des sous-objets de F avec l'ensemble des sous-objets de $i(F)$).*

4. Cribles

Définition 4.1. — *Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. On appelle crible de la catégorie $\mathbf{C}$ une sous-catégorie pleine $\mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$ possédant la propriété suivante : tout objet de $\mathbf{C}$ tel qu'il existe un morphisme de cet objet dans un objet de $\mathbf{D}$ est dans $\mathbf{D}$. Soit X un objet de $\mathbf{C}$; on appelle (par abus de langage) cribles de X les cribles de la catégorie $\mathbf{C}/X$.*

Soit $\mathscr{U}$ un univers tel que C soit une $\mathscr{U}$-catégorie. Soit $\widehat{C}$ la catégorie de préfaisceaux correspondante. À tout crible de X on associe un sous-objet de X dans $\widehat{C}$ de la manière suivante : à tout objet Y de C, on fait correspondre l'ensemble des morphismes $f : Y \to X$ tels que l'objet (Y, f) appartienne au crible.

Proposition 4.2. — *L'application définie ci-dessus, établit une bijection entre l'ensemble des cribles de X et l'ensemble des sous-objets de X dans $\widehat{C}$.*

Preuve. — Montrons seulement qu'elle est l'application inverse. À tout sous-foncteur $\boldsymbol{R}$ de X on associe la catégorie $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}$ des objets de $\boldsymbol{C}$ au-dessus de $\boldsymbol{R}$ (3.4). On vérifie immédiatement que $\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}$ est un crible de X.

Remarque 4.2.1. — On voit de même que les cribles de C sont en correspondance biunivoque canonique avec l'ensemble des sous-foncteurs du « foncteur final » sur C (objet « final » de $\widehat{C}$). 21

4.3. — Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie. Par abus de langage nous appellerons aussi cribles de X, les sous-objets de X dans la catégorie $\widehat{C}$. Cet abus de langage nous permet pour tout préfaisceau F et tout crible R de X de définir $\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(R, F)$ comme étant l'ensemble des morphismes du foncteur R dans F. On a d'ailleurs un isomorphisme canonique fonctoriel en F (3.5) :

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(R, F) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{C/R} F(.),$$

ce qui permet d'en donner une définition directe[3]. De même, la proposition 4.2 nous permet de transposer aux cribles les opérations usuelles sur les foncteurs. Citons :

4.3.1. — *Changement de base.* Soit R un crible de X et $f : Y \to X$ un morphisme d'objets de C. Le produit fibré $R{\times_X}Y$ est un crible de Y qu'on appelle *crible déduit de R par changement de base.* La sous-catégorie correspondante de C/Y est l'image inverse de la sous-catégorie de C/X définie par R par le foncteur canonique $C/Y \to C/X$ défini par f.

4.3.2. — *Relation d'ordre, intersection, réunion.* La relation d'inclusion sur les sous-foncteurs de X est une relation d'ordre. On peut définir la réunion et l'intersection d'une famille de cribles indexés par un ensemble quelconque comme étant la borne supérieure et la borne inférieure de la famille de sous-préfaisceaux correspondante.

4.3.3. — *Image, crible engendré.* Soient $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de préfaisceaux et pour chaque $\alpha \in A$, un morphisme $f_\alpha : F_\alpha \to X$ où X est un objet de C. On appelle *image* de cette famille de morphismes la réunion des images des f_α. L'image de cette famille est donc un crible de X. En particulier si tous les F_α sont des objets de C, le crible image sera appelé le crible engendré par les morphismes f_α. La catégorie C/R est la sous-catégorie pleine de C/X formée des objets $X' \to X$ au-dessus de X tels qu'il existe un X-morphisme de X' dans un des F_α. 22

Le lecteur pourra, à titre d'exercice, traduire en termes des catégories C/R les relations et opérations définies ici sur les sous-foncteurs. Il constatera alors que ces relations et opérations ne dépendent pas de l'univers $\mathscr{U}$ tel que C soit une $\mathscr{U}$-catégorie, et qu'elles sont par suite définies pour toute catégorie, sans que l'on soit obligé de préciser l'univers auquel les ensembles de morphismes appartiennent ; ce qu'on pouvait d'ailleurs prévoir *a priori* grâce à 3.6.

5. Fonctorialité des catégories de préfaisceaux

5.0. — Soient C, C', D trois catégories et $u : C \to C'$ un foncteur. On désignera par u^* le foncteur :

$$u^* : \begin{cases} \mathbf{Hom}(C'^{\circ}, D) & \longrightarrow & \mathbf{Hom}(C^{\circ}, D) \\ G & \longmapsto & G \circ u \end{cases}$$

[3] N.D.E. : Plus simplement, C/R s'identifie à R de sorte qu'on a la formule $\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(R, F) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_R F$, où F désigne abusivement le composé de F et du foncteur « source » tautologique $R \to C/X \to C$.

obtenu en composant avec le foncteur u. Le foncteur u^* commute aux limites inductives et projectives.

23 ***Proposition 5.1.*** — *Supposons que $\mathbf{C}$ soit petite, et que, dans $\mathbf{D}$, les $\mathcal{U}$-limites inductives (resp. projectives) soient représentables. Le foncteur u^* admet un adjoint à gauche $u_!$ (resp. à droite u_*). On a donc un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Hom}(C^\circ,D)}(F,u^*G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Hom}(C'^\circ,D)}(u_!F,G)$$
$$(\textit{resp.}\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Hom}(C^\circ,D)}(u^*G,F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Hom}(C'^\circ,D)}(G,u_*F)).$$

Preuve. — Nous n'indiquerons que la démonstration de l'existence du foncteur adjoint à gauche. La partie resp. de la proposition s'en déduira alors formellement grâce aux isomorphismes :

$$\mathbf{Hom}(C^\circ,D) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}(C,D^\circ)^\circ \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}((C^\circ)^\circ,D^\circ)^\circ.$$

Soit Y un objet de $\mathbf{C}'$. Désignons par I_u^Y la catégorie suivante : Les objets de I_u^Y sont les couples (X,m) où X est un objet de $\mathbf{C}$ et m un morphisme $Y \to u(X)$. Soient (X,m) et (X',m') deux objets de I_u^Y. Un morphisme de (X,m) dans (X',m') est un morphisme $\xi : X \to X'$ tel que $m' = u(\xi)m$. La composition des morphismes se définit de la manière évidente.

Soit $f : Y \to Y'$ un morphisme de $\mathbf{C}'$. Le morphisme f définit par composition un foncteur $I_u^f : I_u^Y \to I_u^{Y'}$.

On a de plus un foncteur $\mathrm{pr}_Y : I_u^Y \to \mathbf{C}$ qui, à l'objet (X,m) associe l'objet X. Notons qu'alors le diagramme :

(∗)
$$\begin{tikzcd}
I_u^Y \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_Y"'] & I_u^f \arrow[r] & I_u^{Y'} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{Y'}"] \\
& \mathbf{C} &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

24 Soit maintenant F un préfaisceau sur $\mathbf{C}$ et posons :

(5.1.1) $$u_!F(Y) = \varinjlim_{I_u^Y} F \circ \mathrm{pr}_Y(.).$$

La commutativité du diagramme (*) et la fonctorialité de la limite inductive font de $u_!F$ un préfaisceau sur $\mathbf{C}'$. Montrons que le foncteur $u_!$ est un adjoint à gauche du foncteur u^*. Pour cela montrons que pour tout préfaisceau G sur $\mathbf{C}'$, il existe un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}(u_!F,G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(F,u^*G).$$

Soit $\xi \in \mathrm{Hom}(u_!F,G)$. Pour tout objet X de $\mathbf{C}$, on a donc un morphisme :

$$\xi_X : u_!(u(X)) \longrightarrow G(u(X)).$$

Mais $(u(X),\mathrm{id}_{u(X)})$ est un objet de $I_u^{u(X)}$, et par définition de la limite inductive, on a un morphisme canonique :

$$F(X) \longrightarrow u_!F(u(X)).$$

On en déduit pour tout objet X de C un morphisme :

$$\eta_X \,:\, F(X) \longrightarrow G(u(X))$$

qui est visiblement fonctoriel en X. D'où un morphisme

$$\eta \,:\, F \longrightarrow u^*G.$$

Réciproquement, soit $\eta \in \operatorname{Hom}(F, u^*G)$. On en déduit, pour tout objet Y de C, un morphisme de foncteur :

$$\eta_Y \,:\, F \circ \operatorname{pr}_Y \longrightarrow (u^*G)\operatorname{pr}_Y\,,$$

d'où, en composant avec le morphisme évident du foncteur $(u^*G)\operatorname{pr}_Y$ dans le foncteur constant $G(Y)$, un morphisme :

$$\xi_Y \,:\, u_!F(Y) \longrightarrow G(Y)$$

qui est fonctoriel en Y. D'où un morphisme :

$$\xi \,:\, u_!F \longrightarrow G.$$

Le lecteur vérifiera que les deux applications ainsi définies sont inverses l'une de l'autre, 25
et achèvera ainsi la démonstration.

Proposition 5.2. — *Supposons que dans D, les $\mathscr{U}$-limites inductives soient représentables, les limites projectives finies soient représentables et que les $\mathscr{U}$-limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives finies. Supposons de plus que dans C les limites projectives finies soient représentables et que le foncteur u soit exact à gauche* (2.3.2). *Alors les limites projectives finies sont représentables dans $\mathbf{Hom}(C^\circ, D)$ et dans $\mathbf{Hom}(C'^\circ, D)$, et le foncteur $u_!$ est exact à gauche.*

Preuve. — La première assertion est triviale. Démontrons la seconde. D'après la démonstration de 5.1, pour tout préfaisceau F sur C et tout objet Y de C' on a :

$$u_!F(Y) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{I_u^Y} F \circ \operatorname{pr}_Y\,.$$

Il suffit donc de montrer que la catégorie $(I_u^Y)^\circ$ vérifie les axiomes (PS 1) et (PS 2) (2.7) et que cette catégorie est connexe. La vérification est laissée au lecteur.

5.3. — En particularisant ces résultats au cas où D est la catégorie des $\mathscr{U}$-ensembles, on obtient une suite de trois foncteurs :

$$u_!, u^*, u_*,$$

qui est une « suite de foncteurs adjoints » dans le sens que pour deux foncteurs consécutifs
de la suite celui de droite est adjoint à droite de l'autre. Leurs propriétés essentielles sont 26
résumées dans la :

Proposition 5.4. — *Soient C une petite catégorie, C' une $\mathscr{U}$-catégorie, et $u \,:\, C \to C'$ un foncteur.*

1) *Le foncteur $u^* \,:\, \widehat{C'} \to \widehat{C}$ commute aux limites inductives et projectives.*

2) *Le foncteur* $u_* : \widehat{C} \to \widehat{C'}$ *commute aux limites projectives. Pour tout préfaisceau* F *sur* C *et tout objet* Y *de* C'*, on a :*

$$u_* F(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(u^*(Y), F).$$

3) *Le foncteur* $u_! : \widehat{C} \to \widehat{C'}$ *commute aux limites inductives. Le foncteur* $u_!$ *n'est défini qu'à isomorphisme près, mais on peut toujours le choisir tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h"'] & C' \arrow[d, "h'"] \\ \widehat{C} \arrow[r, "u_!"] & \widehat{C'} \end{tikzcd}$$

(h et h' *sont les foncteurs d'inclusion canonique) soit commutatif.*

Pour tout préfaisceau F *sur* C*, on a :*

$$u_! F \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{C/F} h' \circ u.$$

4) *Si les limites projectives finies sont représentables dans* C *et si* u *est exact à gauche* (2.3.2)*, le foncteur* $u_!$ *est exact à gauche.*

Preuve. — L'assertion (1) est triviale. L'assertion (2) se déduit du fait que u_* est un foncteur adjoint à droite par (2.11) et (1.4). Il en est de même pour l'assertion (3) mais on applique en plus (3.4). Enfin l'assertion (4) n'est autre que (5.2) qu'on peut appliquer grâce à (2.7).

27 ***Proposition 5.5.*** — *Soient* C *et* C' *deux petites catégories et* $C \underset{u}{\overset{v}{\leftrightarrows}} C'$ *un couple de foncteurs, où* v *est adjoint à gauche de* u*. Il existe alors des isomorphismes, compatibles avec les isomorphismes d'adjonction :*

$$v^* \xrightarrow{\sim} u_!$$

$$v_* \xrightarrow{\sim} u^* \qquad .$$

Preuve. — Il suffit d'exhiber un isomorphisme $v^* \xrightarrow{\sim} u_!$; l'autre isomorphisme s'en déduira par adjonction. Soient F un préfaisceau sur C et Y un objet de C'. On a alors :

$$v^* F(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(v(Y), F).$$

Puis en utilisant (3.4) :

$$\mathrm{Hom}(v(Y), F) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{C/F} \mathrm{Hom}(v(Y), .).$$

Mais v est adjoint à gauche de u et par suite :

$$\varinjlim_{C/F} \mathrm{Hom}(v(Y), .) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{C/F} \mathrm{Hom}(Y, u(.)).$$

Utilisant alors (5.4.3)), il vient :

$$\varinjlim_{C/F} \operatorname{Hom}(Y, u(.)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(Y, u_! F) \xrightarrow{\sim} u_! F(Y).$$

On a donc déterminé, pour tout objet Y de C', un isomorphisme $v^* F(Y) \xrightarrow{\sim} u_! F(Y)$ qui est visiblement fonctoriel en Y et en F, C.Q.F.D.

Corollaire 5.5.1. — *Soit $u : C \to C'$ un foncteur qui admet un adjoint à gauche. Le foncteur $u_! : \widehat{C} \to \widehat{C'}$ commute aux limites projectives (rappelons qu'il commute aux limites inductives par* (1.4.3)*).*

Remarque 5.5.2. — On trouve ainsi une « suite de *quatre* foncteurs adjoints » (cf. 5.3) : 28

$$v_!, v^* = u_!, v_* = u^*, u_*,$$

dont les trois premiers (resp. derniers) commutent donc aux $\varinjlim$ (resp. $\varprojlim$).

Proposition 5.6. — *Les hypothèses sont celles de 5.4. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Le foncteur u est pleinement fidèle.*
ii) *Le foncteur $u_!$ est pleinement fidèle.*
iii) *Le morphisme d'adjonction $\mathrm{id}_{\widehat{C}} \to u^* u_!$ est un isomorphisme.*
iv) *Le foncteur u_* est pleinement fidèle.*
v) *Le morphisme d'adjonction $u^* u_* \to \mathrm{id}_{\widehat{C}}$ est un isomorphisme.*

Preuve. — Il est clair que ii) ⇔ iii) et iv) ⇔ v) (propriétés générales des foncteurs adjoints) et que ii) ⇒ i) (5.4.3)). Montrons que i) ⇒ iii). Les foncteurs $\mathrm{id}_{\widehat{C}}$, u^* et $u_!$ commutent aux limites inductives. D'après (3.4), il suffit donc de démontrer que $H \to u^* u_! H$ est un isomorphisme lorsque H est représentable ce qui est évident. Montrons que iii) est équivalent à v). Pour tout objet H (resp. K) de $\widehat{C}$ désignons par $\Phi(H) : H \to u^* u_! H$ (resp. par $\Psi(K) : u^* u_* \to K$) le morphisme d'adjonction. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\widehat{C}}(H, u^* u_* K) \arrow[rr, "\operatorname{Hom}(H, \Psi(K))"] \arrow[d, dash, "\wr"'] & & \operatorname{Hom}_{\widehat{C}}(H, K) \\
\operatorname{Hom}_{\widehat{C}}(u_! H, u_* K) \arrow[d, dash, "\wr"'] & & \\
\operatorname{Hom}_{\widehat{C}}(u^* u_! H, K) \arrow[uurr, "\operatorname{Hom}(\Phi(H), K)"'] & &
\end{tikzcd}.$$

Par suite $\Phi(H)$ est un isomorphisme pour tout H si et seulement si $\Psi(\mathscr{K})$ est un isomorphisme pour tout K, C.Q.F.D. 29

Remarque 5.7. — a) Les équivalences ii) ⇔ iii) ⇔ iv) ⇔ v) sont des résultats généraux sur les foncteurs adjoints.

b) La forme explicite de $u_!$ resp. u_* donnée dans la démonstration de 1.4 montre aussitôt que, sous les hypothèses générales de 1.1, si u est pleinement fidèle, alors le morphisme d'adjonction $\mathrm{id} \to u^*u_!$ (resp. $u^*u_* \to \mathrm{id}$) est un isomorphisme, i.e. que $u_!$ (resp. u_*) est pleinement fidèle.

5.8.0. — Soient γ une espèce de structure algébrique définie par limites projectives finies $\mathcal{U}$-γ-Ens la catégorie des γ-objets de $\mathcal{U}$-Ens, esj : $\mathcal{U}$-γ-Ens $\to$ $\mathcal{U}$-Ens le foncteur ensemble sous-jacent (pour simplifier nous supposons que l'espèce de structure envisagée a un seul ensemble de base). Soit C une catégorie. La composition avec esj fournit un foncteur noté

$$\mathrm{esj}\hat{\ } : \mathbf{Hom}(C^\circ, \mathcal{U}\text{-}\gamma\text{-}\mathrm{Ens}) \longrightarrow \widehat{C}.$$

Comme dans $\widehat{C}$, les limites projectives se calculent argument par argument, le foncteur esj$\hat{\ }$ se factorise en une équivalence.

$$\mathbf{Hom}(C^\circ, \mathcal{U}\text{-}\gamma\text{-}\mathrm{Ens}) \xrightarrow{\approx} \widehat{C}_\gamma, \tag{5.8.1}$$

où $\widehat{C}_\gamma$ est la catégorie des γ-objets de $\widehat{C}$, et un foncteur encore noté

$$\mathrm{esj}\hat{\ } : \widehat{C}_\gamma \longrightarrow \widehat{C},$$

et appelé le foncteur « *préfaisceau d'ensembles sous-jacent* ».

30 *5.8.2.* — Supposons que le foncteur est : $\mathcal{U}$-γ-Ens $\to$ $\mathcal{U}$-Ens admette un adjoint à gauche Lib : $\mathcal{U}$-Ens $\to$ $\mathcal{U}$-γ-Ens [(3)] (on peut montrer en fait que cette condition est toujours satisfaite). La composition avec Lib fournit un foncteur

$$\mathrm{Lib}\hat{\ } : \widehat{C} \longrightarrow \mathbf{Hom}(C^\circ, \mathcal{U}\text{-}\gamma\text{-}\mathrm{Ens})$$

et en composant avec l'équivalence (5.8.1), un foncteur encore noté

$$\mathrm{Lib}\hat{\ } : \widehat{C} \longrightarrow \widehat{C}_\gamma$$

et appelé le foncteur « préfaisceau de γ-objets libres engendré ». Le foncteur Lib$\hat{\ }$ est adjoint à gauche au foncteur esj$\hat{\ }$.

Proposition 5.8.3. — *Soient γ une espèce de structure algébrique définie par limites projectives finies telle que dans la catégorie des γ-objets de $\mathcal{U}$-*Ens*, les $\mathcal{U}$-limites inductives soient représentables* [(3)]*, C une catégorie appartenant à $\mathcal{U}$, C' une $\mathcal{U}$-catégorie, $u : C \to C'$ un foncteur. Désignons par $\widehat{C}_\gamma$ (resp. $\widehat{C'}_\gamma$) la catégorie des γ-objets de $\widehat{C}$ (resp. $\widehat{C'}$) et par $u^{*\gamma}$ le foncteur sur les γ-objets déduit du foncteur u^*. Il résulte de 5.1 et de l'équivalence 5.8.1 qu'il existe un foncteur adjoint à gauche (resp. à droite) au foncteur $u^{*\gamma}$. Ce foncteur est noté $u_{!_\gamma}$ (resp. u_{*_γ}).*

---

(3) Le foncteur Lib est le foncteur « γ-objets libre engendré ». Exemple : groupe libre, groupe commutatif libre, A-module libre, etc.

(3) On peut montrer que cette condition est toujours satisfaite.

(1) *Le foncteur $u^{*\gamma}$ commute aux limites inductives et projectives. Le diagramme*

(∗)
$$\begin{tikzcd}
\widehat{C'}_\gamma \arrow[r, "u^{*\gamma}"] \arrow[d, "\mathrm{esj}'^{\wedge}"'] & \widehat{C}_\gamma \arrow[d, "\mathrm{esj}^{\wedge}"] \\
\widehat{C'} \arrow[r, "u_*"] & \widehat{C}
\end{tikzcd}$$

est commutatif ($\mathrm{esj}'^{\wedge}$ *et* $\mathrm{esj}^{\wedge}$ *désignent les foncteurs « ensemble sous-jacent »),* 31

(2) *Le foncteur u_{*_γ} commute aux limites projectives. Le diagramme*

(∗∗)
$$\begin{tikzcd}
\widehat{C}_\gamma \arrow[r, "u_{*\gamma}"] \arrow[d, "\mathrm{esj}^{\wedge}"'] & \widehat{C'}_\gamma \arrow[d, "\mathrm{esj}'^{\wedge}"] \\
\widehat{C} \arrow[r, "u_*"] & \widehat{C'}
\end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près.

(3) *Le foncteur $u_{!_\gamma}$ commute aux limites inductives. Supposons que* $\mathrm{esj}^{\wedge}$ *(resp.* $\mathrm{esj}'^{\wedge}$*) admette un adjoint à gauche* $\mathrm{Lib}^{\wedge}$ *(resp.* $\mathrm{Lib}'^{\wedge}$*)* (5.8.2). *Le diagramme*

(∗∗∗)
$$\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[r, "u_!"] \arrow[d, "\mathrm{Lib}^{\wedge}"'] & \widehat{C'} \arrow[d, "\mathrm{Lib}'^{\wedge}"] \\
\widehat{C}_\gamma \arrow[r, "u_{!\gamma}"] & \widehat{C'}_\gamma
\end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près.

Supposons que $u_!$ commute aux limites projectives finies (5.4) et (5.6). Alors le diagramme

(∗∗∗∗)
$$\begin{tikzcd}
\widehat{C}_\gamma \arrow[r, "u_{!\gamma}"] \arrow[d, "\mathrm{esj}^{\wedge}"'] & \widehat{C'}_\gamma \arrow[d, "\mathrm{esj}'^{\wedge}"] \\
\widehat{C} \arrow[r, "u_!"] & \widehat{C'}
\end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près, et $u_{!_\gamma}$ commute aux limites projectives finies.

Preuve. — L'assertion (1) est évidente. L'assertion (2) aussi car u_* est un adjoint à droite et par suite (2.11) commute aux limites projectives et, en particulier, aux limites projectives finies ; d'où la commutativité du diagramme (∗∗). La commutativité du diagramme (∗∗∗) se déduit de l'unicité, à isomorphisme près du foncteur adjoint à gauche, et enfin la commu- 32 tativité du diagramme $(****)$ se déduit immédiatement du fait que $u_!$ commute aux limites projectives finies.

Notation 5.9. — Par abus de notation, les foncteurs $u^{*\gamma}$ et $u_{*\gamma}$ seront souvent notés u^* et u_*, ce qui ne risque pas d'apporter des confusions en vertu de la commutativité des diagrammes $(*)$ et $(**)$. En revanche, lorsque $u_!$ ne commute pas aux limites projectives finies, le diagramme $(****)$ n'est pas commutatif à isomorphisme près, et les notations $u_!$ et $u_{!\gamma}$ devront être employées pour éviter des confusions.

5.10. — Soit C une petite catégorie. Pour tout objet X de $\widehat{C}$, on désigne par C/X la catégorie des flèches de but X et de source un objet de C. Le foncteur source définit un foncteur $j_X : C/X \to C$. Soit $m : Y \to X$ un morphisme de $\widehat{C}$. La composition des morphismes définit un foncteur $j_m : C/Y \to C/X$. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} C/Y \arrow[rr, "j_m"] \arrow[dr, "j_Y"'] & & C/X \arrow[dl, "j_X"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est commutatif. Il résulte de 5.1 que pour tout objet F de $(C/X)\hat{}$ et tout objet Y de C, on a :

(5.10.1) $$j_{X!}F(Y) = \coprod_{u \in \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(Y,X)} F(u).$$

La formule (5.10.1) permet de définir $j_{X!}$ lorsque C est une $\mathscr{U}$-catégorie, et on vérifie que le
33 foncteur $j_{X!}$ ainsi défini est toujours adjoint à droite au foncteur $j_X^* : \widehat{C} \to (C/X)\hat{}$ (5.0).

Proposition 5.11. — *Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie, X un préfaisceau sur C.*

1) *Le foncteur*
$$j_{X!} : (C/X)\hat{} \longrightarrow \widehat{C}$$
se factorise par la catégorie $\widehat{C}/X$:
$$(C/X)\hat{} \xrightarrow{e_X} \widehat{C}/X \longrightarrow \widehat{C}.$$
Le foncteur e_X est une équivalence de catégories.

2) *Le foncteur $e_X \circ j_X^* : \widehat{C} \to \widehat{C}/X$ est canoniquement isomorphe au foncteur $H \mapsto (H \times X \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} X)$.*

Preuve. — 1) Soit f l'objet final de $(C/X)\hat{}$. On a un isomorphisme canonique $f \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{Y \in \mathrm{ob}\, C/X} Y$ et par suite $j_{X!}(f) = \varinjlim_{Y \in \mathrm{ob}\, C/X} j_X(Y)$ (5.4). Or $j_{X!}(f) \simeq X$; d'où la factorisation. Pour montrer que e_X est une équivalence nous nous contenterons d'exhiber un foncteur quasi-inverse : A tout objet $H \to X$ de $\widehat{C}/X$ on associe le préfaisceau sur C/X :
$$(Y \to X) \longmapsto \mathrm{Hom}_{\widehat{C}/X}((Y \to X), (H \to X)).$$

2) Le foncteur $e_X \circ j_X^*$ est adjoint à droite au foncteur d'oubli et par suite le foncteur $e_X \circ j^*$ est canoniquement isomorphe au foncteur $H \mapsto (H \times H \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} X)$.

5.12. — Soit $m : Y \to X$ un morphisme de $\widehat{C}$. D'après (5.11), le morphisme m est canoniquement isomorphe à l'image par e_X d'un objet de $(C/X)\hat{}$ que nous noterons $[m]$. Le foncteur e_X définit, par restriction aux sous-catégories, une équivalence

$$(C/X)/[m] \xrightarrow{e_m} C/Y.$$

Le diagramme 34

$$\begin{tikzcd}
(C/X)/[m] \arrow[rr, "e_m"] \arrow[dr, "j_{[m]}"'] & & C/Y \arrow[dl, "j_m"] \\
& C/X &
\end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près.

5.13. — Signalons un résultat qui nous sera utile dans Exp. VI. Soit $u : C \to C'$ un foncteur entre petites catégories. Pour tout objet H de $\widehat{C}$ désignons par $u/H : C/H \to C'/u_!H$ le foncteur qui associe à tout morphisme $m : X \to H$ le morphisme $u_!X \xrightarrow{u_!m} u_!H$ (on sait (5.4) qu'on peut toujours poser $u_!X = uX$). Le diagramme ci-après est commutatif :

(5.13.1)
$$\begin{tikzcd}
C/H \arrow[r, "u/H"] \arrow[d, "J_H"'] & C'/u_!H \arrow[d, "j_{u_!H}"] \\
C \arrow[r, "u"] & C'
\end{tikzcd}.$$

On a donc un diagramme commutatif à isomorphisme près : et comme $(u/H)_!$ transforme l'objet final de $(C/H)\hat{}$ en l'objet final de $(C'/u_!H)\hat{}$, le diagramme :

(5.13.3)
$$\begin{tikzcd}
(C/H)\hat{} \arrow[r, "(u/H)_!"] \arrow[d, "e_H"'] & (C'/u_!H)\hat{} \arrow[d, "e_{u_!H}"] \\
C\hat{}/H \arrow[r, "u_!/H"] & C'\hat{}/u_!H
\end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près (6.1). 35

Proposition 5.14. — *Soit $u : C \to C'$ un foncteur entre petites catégories. On suppose que u possède la propriété suivante :*

(PPF) *Pour tout objet X de C le foncteur $u/X : C/X \to C'/uX$ est pleinement fidèle.*

Alors :

1) *Soit f l'objet final de $\widehat{C}$. Le foncteur u se factorise en*

$$C = C/f \xrightarrow{u/f} C'/u_! f \xrightarrow{j_{u_! f}} C'.$$

Le foncteur u/f est pleinement fidèle.

2) *Le foncteur $u_! : \widehat{C} \to \widehat{C'}$ se factorise en*

$$\widehat{C} = (C/f)\widehat{\ } \xrightarrow{(u/f)_!} (C'/u_! f)\widehat{\ } \xrightarrow{e_{u_! f}} \widehat{C'}/u_! f \longrightarrow \widehat{C'},$$

où le foncteur $(u/f)_!$ est pleinement fidèle, le foncteur $e_{u_! f}$ une équivalence, et le foncteur $\widehat{C'}/u_! f \to \widehat{C'}$ le foncteur d'oubli.

3) *En particulier le foncteur $u_!$ est fidèle et par suite le morphisme d'adjonction* $\mathrm{id} \xrightarrow{\Phi} u^* u_!$ *est un monomorphisme. De plus, pour tout morphisme $\alpha : H \to K$ de $\widehat{C}$, le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, hook, "\Phi(H)"] \arrow[d, "\alpha"'] & u^* u_! H \arrow[d, "u.u^{\bullet}(\alpha)"] \\ K \arrow[r, hook, "\Phi(K)"] & u^* u_! K \end{tikzcd}$$

est cartésien.

36 ***Preuve***. — 1) La factorisation provient du diagramme (5.13.1). Le foncteur u est fidèle. Donc u/f est fidèle. Montrons qu'il est pleinement fidèle. Soient X et Y deux objets de C, $\mathrm{can}_X : uX \to u_! f$ (resp. $\mathrm{can}_Y : uY \to u_! f$) les morphismes canoniques et

$$\begin{tikzcd} uX \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "\mathrm{can}_X"'] & & uY \arrow[dl, "\mathrm{can}_Y"] \\ & u^{\bullet} f & \end{tikzcd}$$

un morphisme de $C'/u_! f$. On a $u_! f = \varinjlim_{Z \in \mathrm{ob}\, C} uZ$ et par suite (3.1) :

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{C'}}(uX, u_! f) = \varinjlim_{Z \in \mathrm{ob}\, C} \mathrm{Hom}_{C'}(uX, uZ).$$

Par définition de la limite inductive, dire que $\mathrm{can}_Y\, m = \mathrm{can}_X$ équivaut à dire qu'il existe

a) une suite finie d'objets de C, X_i, $i \in [0, n]$, $X_\circ = X$, $X_n = Y$,

b) pour tout i, un morphisme $m_i : uX \to uX_i (m_\circ = \mathrm{id}_X, m_n = m)$,

c) pour tout couple $(i, i+1)$ un morphisme $f_i : X_i \to X_{i+1}$ ou bien $f_i : X_{i+1} \to X_i$, tels que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} & uX \arrow[dl, "m_i"'] \arrow[dr, "m_{i+1}"] & \\ uX_i \arrow[rr, "u(f_i)"] & & uX_{i+1} \end{tikzcd} \quad \text{ou bien} \quad \begin{tikzcd} & uX \arrow[dl, "m_i"'] \arrow[dr, "m_{i+1}"] & \\ uX_i & & uX_{i+1} \arrow[ll, "u(f_i)"'] \end{tikzcd} \quad ,$$

soient commutatifs.

On démontre alors immédiatement, par récurrence sur i et en utilisant la propriété (PPF), que m_i est de la forme $u(p_i)$. En particulier $m = u(p)$ et par suite u/f est pleinement fidèle.

2) La factorisation est immédiate. Le foncteur $(u/f)_!$ est pleinement fidèle en vertu du 37
5.6. Les autres assertions résultent de 5.11.

3) Le foncteur $u_!$ est composé du foncteur d'oubli qui est fidèle, et de foncteurs pleinement fidèles. Il est par suite fidèle. Il en résulte, d'après les propriétés générales des foncteurs adjoints, que le morphisme d'adjonction $\mathrm{id} \to u^* u_!$ est un monomorphisme. D'après 2) le foncteur $u_!$ apparaît comme le composé d'un foncteur pleinement fidèle $v : \widehat{C} \to \widehat{C'}/u_! f$ et du foncteur d'oubli. Le foncteur u^*, adjoint à droite de $u_!$, est donc le composé du foncteur « produit par $u_! f$ », adjoint à droite du foncteur d'oubli, et d'un foncteur w adjoint à droite de v. De plus, v étant pleinement fidèle, le morphisme d'adjonction $\mathrm{id} \to wv$ est un isomorphisme. La dernière assertion en résulte aisément.

6. Foncteurs fidèles et foncteurs conservatifs 38

Définition 6.1. — *Soient E une catégorie, $(\varphi_i : E \to F_i)_{i \in I}$ une famille de foncteurs*

$$\varphi_i : E \longrightarrow F_i .$$

On dit que la famille de foncteurs (φ_i) est fidèle si pour tout couple d'objets X, Y, de E, et tout couple de flèches $u, v : X \rightrightarrows Y$, la relation $\varphi_i(u) = \varphi_i(v)$ pour tout $i \in I$ implique $u = v$ (en d'autres termes, si l'application $\mathrm{Hom}(X, Y) \to \Pi_i \mathrm{Hom}(\varphi_i(X), \varphi_i(Y))$ définie par (φ_i) est injective). On dit que la famille de foncteurs (φ_i) est conservative si toute flèche u de E, telle que $\varphi_i(u)$ soit un isomorphisme pour tout $i \in I$, est un isomorphisme. On dit que (φ_i) est conservative pour les monomorphismes (resp. pour les épimorphismes, resp. ...) si la condition précédente est vérifiée chaque fois que u est un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. ...).

6.1.1. — Si on introduit le foncteur unique

$$\varphi : E \longrightarrow F = \prod_{i \in I} F_i$$

défini par la famille de foncteurs (φ_i), il est clair que celle-ci est fidèle (resp. conservative, resp. conservative pour les monomorphismes, resp. ...) si et seulement si le foncteur φ est fidèle (resp. conservatif, resp. ...) (par quoi on entend que la famille réduite au seul objet φ est fidèle, resp. conservative, resp. ...). On pourrait donc sans inconvénient majeur nous borner par la suite au cas d'une famille réduite à un seul foncteur. Pour la commodité des futures références, nous donnerons néanmoins les énoncés suivants pour les familles.

39 Les notions de 6.1 sont surtout utiles lorsque les φ_i satisfont à des propriétés d'exactitude convenables, et dans ce cas ont une tendance à coïncider :

Proposition 6.2. — *Les notations sont celles de 5.1.*

(i) *Si les noyaux de doubles flèches, ou les conoyaux de doubles flèches, sont représentables dans E, et si les φ_i y commutent, alors on a l'implication*

$$(\varphi_i) \text{ conservative} \Longrightarrow (\varphi_i) \text{ fidèle.}$$

(ii) *Supposons que les produits fibrés (resp. les sommes amalgamées) soient représentables dans E, et que les φ_i y commutent. Supposons (φ_i) fidèle ou conservative; alors pour toute flèche u de E, u est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si pour tout $i \in I$, il en est ainsi pour $\varphi_i(u)$.*

(iii) *Supposons que dans E les produits fibrés et les sommes amalgamées sont représentables et que les φ_i y commutent, et que toute flèche dans E qui est un bimorphisme (i.e. un monomorphisme et un épimorphisme) soit un isomorphisme. Alors on a l'implication*

$$(\varphi_i) \text{ fidèle} \Longrightarrow (\varphi_i) \text{ conservative.}$$

(iv) *Supposons que dans E les produits fibrés (resp. les sommes amalgamées) soient représentables, et que les φ_i y commutent. Alors, si (φ_i) est conservative pour les monomorphismes (resp. pour les épimorphismes) alors (φ_i) est même conservative.*

(v) *Soit D un type de diagramme, $F : d \mapsto F(d)$ un diagramme de type D dans E, X un objet de E et $u = (u_d)_{d \in D}$ une famille de flèches*

$$X \longrightarrow F(d) \quad (\text{resp. } F(d) \longrightarrow X).$$

40 *Supposons que (φ_i) soit conservative, que les limites projectives (resp. inductives) de type D soient représentables dans E, et que les φ_i y commutent. Alors, pour que u fasse de X une limite projective (resp. inductive) de F dans E, il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, $\varphi_i(u)$ fasse de $\varphi_i(X)$ une limite projective (resp. inductive) de $\varphi_i(D)$ dans E_i.*

Démonstration.

(i) Pour l'énoncé non respé, il suffit, pour une double flèche donnée $u, v : X \rightrightarrows Y$, d'exprimer l'égalité $u = v$ par la condition que l'inclusion $\mathrm{Ker}(u, v) \to X$ est un isomorphisme. Ici et par la suite, on se dispense de répéter l'argument dual pour l'énoncé dual.

(ii) Si (φ_i) est fidèle, on exprime la condition que $u : X \to Y$ soit un monomorphisme par l'égalité $\mathrm{pr}_1 = \mathrm{pr}_2$ pour le produit fibré $X \times_Y X$. Si (φ_i) est conservatif, on l'exprime par la condition que le morphisme diagonal $\delta : X \to X \times_Y X$ soit un isomorphisme.

(iv) Comme dans ce dernier argument, le morphisme δ est un monomorphisme, on voit qu'il suffisait en fait de supposer (φ_i) conservative pour les monomorphismes. Mais ceci implique alors que (φ_i) est conservative tout court. En effet, si $u \in F\ell\, E$ est telle que les $\varphi_i(u)$ soient des isomorphismes, on en conclut que ce sont des monomorphismes d'après ce qui précède, donc des isomorphismes d'après l'hypothèse sur (φ_i).

(iii) Est une conséquence triviale de (ii).

(v) Est une conséquence triviale des définitions.

Notons la conséquence suivante de (i) (ii) (iv) :

Corollaire 6.3. — *Supposons que dans E les produits fibrés et les sommes amalgamées soient représentables et que les φ_i y commutent, et que les noyaux de double flèches ou les conoyaux de double flèches soient représentables et que les φ_i y commutent. (Il suffit par exemple que les limites projectives finies et les limites inductives finies soient représentables dans E, et que les φ_i soient des foncteurs exacts.) Alors les conditions suivantes sont équivalentes :* 41

a) *(φ_i) est fidèle.*
b) *(φ_i) est conservative.*
c) *(φ_i) est conservative pour les monomorphismes.*
c') *(φ_i) est conservative pour les épimorphismes.*

Signalons aussi pour mémoire :

Proposition 6.4. — *Soient $\varphi : E \to F$ un foncteur admettant un adjoint à droite ψ (donc* $\mathrm{Hom}(\varphi(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}(X, \psi(Y))$*). Pour que φ (resp. ψ) soit fidèle, il faut et il suffit que pour tout élément X de E (resp. tout élément Y de F), le morphisme d'adjonction $X \to \psi\varphi(X)$ soit un monomorphisme. Pour que φ (resp. ψ) soit pleinement fidèle, il faut et il suffit que le morphisme d'adjonction précédent soit un isomorphisme.*

En effet, si X', X sont deux objets de E, l'application

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}(X', X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\varphi(X'), \varphi(X))$$

s'identifie à l'application déduite de

$$(**) \qquad X \longrightarrow \psi\varphi(X)$$

par application du foncteur $\mathrm{Hom}(X', -)$. Donc pour que $(*)$ soit un monomorphisme (resp. un isomorphisme) pour tout X', X étant fixé, il faut et il suffit que le morphisme d'adjonction $(**)$ soit un monomorphisme (resp. un isomorphisme). 42

Proposition 6.5. — *Soit $p : E' \to E$ un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *p est fidèle, conservatif et fibrant* (SGA 1 VI 6.1).
(ii) *p est un foncteur fibrant à fibres des catégories discrètes.*
(iii) *Pour tout $X' \in \mathrm{ob}\, E'$, le foncteur $E'_{/X'} \to E_{/p(X)}$ induit par p est une équivalence de catégories, surjective sur les objets.*
(iv) *(Lorsque E est une $\mathcal{U}$-catégorie). Il existe un élément $F \in \mathrm{ob}\,\widehat{C}$ et une équivalence de catégories sur E* (SGA 1 VI 4.3) *$E' \xrightarrow{\approx} E_{/F}$ (où $E_{/F}$ est la sous-catégorie pleine de $\widehat{E}_{/F}$ formée des flèches $X \to F$ dont la source est dans E).*

6.5.1. — Rappelons qu'une catégorie C dite est *discrète* si c'est un *groupoïde* (i.e. toute flèche y est inversible) et si elle est *rigide* (i.e. le groupe des automorphismes de tout objet est réduit au groupe unité) ; il revient au même de dire que la catégorie est équivalente à la catégorie C' définie par un ensemble I (avec $\mathrm{ob} C' = I$, et comme seules flèches les flèches identiques). Quand on suppose déjà que C est un groupoïde, alors dire que C est discrète revient à dire que pour deux objets X, Y de C, il existe au plus une flèche de X dans Y, i.e. que C est isomorphe à la catégorie définie par un ensemble préordonné.

43 L'équivalence des conditions (i) et (ii) de 6.5 est une conséquence immédiate des rappels précédents et du

Lemme 6.5.2. — *Soit $p : E' \to E$ un foncteur fibrant. Alors :*

(i) *Pour que p soit conservatif, il faut et il suffit que ses catégories fibres soient des groupoïdes.*
(ii) *Pour que p soit fidèle, il faut et il suffit que ses catégories fibres soient des catégories ordonnées.*

Démonstration de 6.5.2.

(i) Supposons p conservatif. Pour toute flèche u d'une fibre E'_X, $p(u) = \mathrm{id}_X$ est un isomorphisme, donc u est un isomorphisme dans E', donc aussi dans E'_X (car un inverse de u dans E' sera évidemment un inverse dans E'_X). Donc E'_X est un groupoïde. Inversement, supposons les E'_X des groupoïdes, et soit u' une flèche de E' telle que $p(u')$ soit un isomorphisme, prouvons que u est un isomorphisme. Pour ceci on note que, p étant fibrant, on peut factoriser $u' : X' \to Y'$ en un composé $X' \to u^*(Y') \to Y'$, où la première flèche est un X-morphisme (N.B. $X = p(X')$, $u = p(u')$) et la deuxième est un morphisme cartésien au-dessus de u. La première flèche est un isomorphisme puisque E'_X est un groupoïde, et la deuxième l'est, car un morphisme *cartésien* d'une catégorie fibrée est évidemment un isomorphisme dès que sa projection l'est.
(ii) Supposons p fidèle, et soient X', Y' deux objets d'une catégorie fibre E_X. Alors deux flèches de X' dans Y' sont au-dessus de la même flèche id_X de E, donc sont iden-
44 tiques, donc E_X est ordonnée. Inversement, supposons les catégories fibres ordonnées, et prouvons que p est fidèle. Soient donc u', $v' : X' \rightrightarrows Y'$ des flèches de E' au-dessus d'une même flèche $u : X \to Y$ de E. Elles se factorisent alors en $X' \rightrightarrows u^*(Y) \to Y'$, où les deux flèches $X' \rightrightarrows u^*(Y')$ sont des flèches de E'_X de même source et même but ; celles-ci sont donc égales, donc $u' = v'$, C.Q.F.D.

Revenons à la démonstration de 6.5. On a prouvé (i) ⇔ (ii). D'autre part (ii) ⇔ (iv) est assez claire : en effet, d'une part la catégorie $E_{/F}$ est fibrée sur E à catégories fibres les catégories discrètes définies par les ensembles $F(X)$, comme il résulte aussitôt des définitions ; d'autre part, si p est comme dans (ii), alors en vertu du sorite SGA 1 VI 8 la catégorie fibrée E' sur E est E-équivalente à la catégorie scindée sur E définie par le foncteur $E \to (\mathrm{Cat})$ définie par le foncteur $F : E \to (\mathrm{Ens})$, associant à tout $X \in \mathrm{ob}\, E$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de E'_X. Or cette catégorie scindée est E-isomorphe à la catégorie $E_{/F}$. Comme (iv) ⇒ (iii) est claire, il reste à prouver (iii) ⇒ (i). Or il est clair que pour que p soit fidèle (resp. conservatif) il faut et il suffit que les foncteurs induits $E'_{/X'} \to E_{/p(X)}$ le soient, *a fortiori* il suffit que ceux-ci soient pleinement fidèles ; donc il reste à prouver seulement que (iii) implique que p est fibrant. Mais on voit encore qu'un foncteur p est fibrant si et seulement si les foncteurs induits $E'_{/X'} \to E_{/p(X')}$ le sont. Il en est en particulier ainsi si ce sont des équivalences de catégories surjectives sur les objets.

7. Sous-catégories génératrices et cogénératrices

45

Définition 7.1. — *Soient E une catégorie, C une sous-catégorie pleine de E. On dit que C est une sous-catégorie de E* génératrice par épimorphismes stricts (resp. par épimorphismes) *si* *pour tout objet X de E, la famille des flèches de E de but X, de source $X' \in \mathrm{ob}\, C$, est épimorphique (resp. épimorphique stricte) (1.3). On dit que C est une sous-catégorie de E* génératrice (resp. génératrice pour les monomorphismes, resp. génératrice pour les monomorphismes stricts) *si pour toute flèche $u : Y \to X$ (resp. tout monomorphisme de E, resp. tout monomorphisme strict de E* (10.5)*), telle que pour tout $X' \in \mathrm{ob}\, C$, l'application correspondante* $\mathrm{Hom}(X', Y) \to \mathrm{Hom}(X', X)$ *soit bijective, u est un isomorphisme. Enfin, on dit qu'une famille (X_i) d'objets de E est génératrice par épimorphismes stricts (resp. ...) si la sous-catégorie pleine C de E engendrée par cette famille est génératrice par épimorphismes stricts (resp. ...).*

7.1.1. — Notons qu'en termes de la famille $(h_{X'})_{X' \in \mathrm{ob}\, C}$ des foncteurs

$$h_{X'} : E \longrightarrow (\mathrm{Ens})\ (X' \in \mathrm{ob}\, C)$$

représentés par les $X' \in \mathrm{ob}\, C$, on peut exprimer la condition que C soit génératrice (resp. génératrice pour les monomorphismes, resp. génératrice pour les monomorphismes stricts) par celle que le famille $(h_{X'})$ soit *conservative* (resp. conservative pour les monomorphismes, resp. conservative pour les monomorphismes stricts) (6.1). Il résulte également immédiatement des définitions que C est génératrice par épimorphismes si et seulement si la **46**
famille $(h_{X'})_{X' \in \mathrm{ob}\, C}$ est *fidèle* (6.1). On donnera aussi ci-dessous (7.2 (i)) une interprétation analogue pour la condition sur C d'être génératrice par épimorphismes stricts.

7.1.2. — Comme pour les notions introduites dans 6.1, les notions de 7.1 sont surtout utiles lorsque E possède des propriétés d'exactitude convenables, auquel cas les diverses notions introduites ont une nette tendance à être toutes équivalentes (7.3). C'est pourquoi la question de savoir laquelle de ces notions 7.1 doit être considérée comme la plus importante ne se pose guère ; dans les cas les plus importants, ces notions coïncident et le terme « sous-catégorie génératrice » peut donc être interprété indifféremment comme se rapportant à n'importe laquelle des propriétés envisagées dans 7.1 (par exemple la première, qui est la plus forte de toute comme nous allons voir (7.2 (ii))).

7.1.3. — Supposons que E soit une $\mathscr{U}$-catégorie, et considérons le foncteur canonique

$$\varphi : E \longrightarrow \widehat{C} = \mathbf{Hom}(C, \mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens}) \tag{7.1.3.1}$$

composé des foncteurs $E \to \widehat{E} \to \widehat{C}$, où le premier foncteur est le foncteur canonique (1.3.3), et le deuxième le foncteur restriction à C. Notons qu'il est évident qu'il revient au même de dire que le foncteur précédent φ est conservatif (resp. fidèle), ou de dire que la famille des foncteurs $h_{X'} : X \to \mathrm{Hom}(X', X) = \varphi(X)(X')$, pour $X' \in \mathrm{ob}\, C$ variable, est une famille conservative (resp. fidèle), c'est-à-dire aussi (7.1.2) que C est génératrice (resp. génératrice par épimorphisme). De même φ est conservative pour les monomorphismes **47**
(resp. pour les monomorphismes stricts) si et seulement la famille des $h_{X'} (X' \in \mathrm{ob}\, C)$ est conservative pour les monomorphismes (resp. pour les monomorphismes stricts), i.e. si et seulement si la sous-catégorie C de E est génératrice pour les monomorphismes (resp. pour les monomorphismes stricts).

Proposition 7.2. — *Soient E une $\mathscr{U}$-catégorie, C une sous-catégorie pleine.*

(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *C est une sous-catégorie génératrice par épimorphismes stricts.*

b) *Pour tout $X \in \mathrm{ob}\, E$, désignant par $C_{/X}$ la sous-catégorie pleine de $E_{/X}$ formée des flèches $X' \to X$ de source $X' \in \mathrm{ob}\, C$, la flèche naturelle du foncteur d'inclusion $j : C_{/X} \to E$ dans le foncteur constant sur $C_{/X}$ de valeur X fait de X une limite inductive de j :*

$$X \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{C_{/X}} X'.$$

c) *Le foncteur canonique φ de (7.1.3.1) est pleinement fidèle.*

(ii) *On a entre les notions de 7.1 les implications suivantes :*

48 (iii) *On a les implications conditionnelles suivantes :*

a) *Si dans E les familles épimorphiques de flèches sont épimorphiques strictes, on a* 2) $\Rightarrow$ 1). *Si dans E les monomorphismes sont stricts, on a* 5) $\Rightarrow$ 4).

b) *Si dans E les noyaux de couples de flèches (resp. les produits fibrés) sont représentables, alors on a* 3) $\Rightarrow$ 2) *(resp.* 4) $\Rightarrow$ 3)*).*

c) *Si dans E toute famille de morphismes $X_i \to X$ de même but X se factorise en une famille épimorphique stricte (resp. épimorphique) $X_i \to Y$ suivie d'une monomorphisme (resp. d'une monomorphisme strict) $Y \to X$, alors on a* 4) $\Rightarrow$ 1) *(resp.* 5) $\Rightarrow$ 2)*).*

Signalons tout de suite le

Corollaire 7.3. — *Toutes les notions envisagées dans* 6.1 *(et reprises dans le diagramme d'implications de* (ii) *ci-dessus) sont équivalentes dans chacun des deux cas suivants :*

(i) *Dans E, les noyaux de doubles flèches et les produits fibrés sont représentables, les monomorphismes sont stricts et les familles épimorphiques de flèches sont épimorphiques strictes.*

(ii) *Dans E, toute famille $(X_i \to X)_{i\in I}$ de flèches de même but X se factorise en une famille épimorphique $(X_i \to Y)$ suivie d'un monomorphisme $Y \to X$, tout monomorphisme de E est strict, et toute famille épimorphique de flèches de E est stricte.*

49 En effet, dans le cas (i) on a 4) $\Rightarrow$ 3) et 3) $\Rightarrow$ 2) grâce à b), et 5) $\Rightarrow$ 4) et 2) $\Rightarrow$ 1) grâce à a). Dans le cas (ii) on a grâce à c), les implications 4) $\Rightarrow$ 1) et 5) $\Rightarrow$ 2). On conclut donc grâce au diagramme d'implications 6.2 (ii).

Démonstration de 7.2.

(i) L'implication b) $\Rightarrow$ a) résulte aussitôt des définitions. Prouvons a) $\Rightarrow$ b). Donc sous l'hypothèse a), il faut prouver que pour tout $X, Y \in \mathrm{ob}\, E$, tout système de flèches

$$u_{X'} : X' \longrightarrow Y$$

indexé par les $X' \in \mathrm{ob}\, C_{/X}$, telle que l'on ait $u_{X'} f = u_{X''}$ pour toute flèche $f : X'' \to X'$ dans $C_{/X}$, se factorise par une flèche (nécessairement unique par l'hypothèse a)) $X \to Y$. D'après l'hypothèse a), il suffit de vérifier que pour tout objet Z de $E_{/X}$ et tout couple de morphismes $v' : Z \to X'$, $v'' : Z \to X''$ dans $E_{/X}$, avec X' et X'' dans $C_{/X}$, on a $u_{X'} v' = u_{X''} v''$. Or, grâce à l'hypothèse a), la famille des flèches $w : X''' \to Z$, avec $X''' \in \mathrm{ob}\, C$, est épimorphique, et il suffit donc de vérifier que pour toute telle w, on a $(u_{X'} v')w = (u_{X''} v'')w$, ce qui s'écrit aussi $u_{X'}(v' w) = u_{X''}(v'' w)$ et résulte aussitôt de l'hypothèse faite sur la famille des u.

Prouvons maintenant l'équivalence des conditions b) et c). Pour ceci notons que pour tout $X \in \operatorname{ob} E$, l'objet $\varphi(X)$ de $\widehat{C}$ est limite inductive dans $\widehat{C}$ du foncteur canonique $\widehat{C}_{/\varphi(X)} \to \widehat{C}$ (3.4) ; or $\widehat{C}_{/\varphi(X)}$ est canoniquement isomorphe à $C_{/X}$, de sorte qu'on a dans $\widehat{C}$

$$\varphi(X) = \varinjlim_{C_{/X}} X',$$

où on identifie l'objet X' de C avec le foncteur $\in \widehat{C}$ qu'il représente. On a par suite, 50
pour un deuxième objet Y de E, un isomorphisme canonique

$$(*) \qquad \begin{aligned} \operatorname{Hom}(\varphi(X), \varphi(Y)) \simeq \varprojlim_{C_{/X}} \operatorname{Hom}(X', \varphi(Y)) &\simeq \varprojlim_{C_{/X}} \varphi(Y)(X')(1.4) \\ &\simeq \varprojlim_{C_{/C}} \operatorname{Hom}(X', Y). \end{aligned}$$

Ceci posé, l'application

$$\operatorname{Hom}(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\varphi(X), \varphi(Y))$$

définie par φ n'est autre, via l'isomorphisme entre les membres extrêmes de $(*)$, que l'application

$$\operatorname{Hom}(X, Y) \longrightarrow \varprojlim_{C_{/X}} \operatorname{Hom}(X', Y)$$

déduite du système inductif de flèches $X' \to X$ indexé par $C_{/X}$ envisagé dans 7.2 (i) b). Donc la première application est bijective pour tout Y (X étant fixé) si et seulement si X est une limite inductive du foncteur d'inclusion $j : C_{/X} \to E$, ce qui prouve l'équivalence de b) et c).

(ii) Les implications 1) $\Rightarrow$ 2) et 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) sont triviales en vertu des définitions. L'implication 1) $\Rightarrow$ 3) s'obtient en interprétant la propriété 1) par la pleine fidélité de φ grâce à (i), et en observant qu'un foncteur pleinement fidèle est conservatif. Or on a déjà observé (7.1.1) que 3) signifie que φ est conservatif.

(iii) L'assertion a) est une tautologie. L'assertion b) résulte de 6.2 (i) (resp. 6.2 (iv)) 51
appliqué au foncteur φ, compte tenu que ce dernier est exact à gauche. Prouvons enfin c). Considérons, pour un $X \in \operatorname{ob} E$, la famille de tout les morphismes $X_i \to X$, avec $X_i \in \operatorname{ob} C$; par hypothèse sur E elle se factorise en une famille $X_i \to Y$ épimorphique effective (resp. épimorphique) suivie d'un monomorphisme (resp. d'un monomorphisme strict) $Y \to X$. Alors l'hypothèse 4) (resp. 5)) implique que $Y \to X$ est un isomorphisme, donc la famille envisagée est épimorphique stricte (resp. épimorphique), C.Q.F.D.

Proposition 7.4. — *Soient E une catégorie, C une sous-catégorie pleine de E, X un objet de E. On suppose C génératrice dans E (resp. C génératrice pour les monomorphismes, et que le produit fibré de deux sous-objets de X sur X est représentable dans E). Alors un sous-objet strict* (10.11) *(resp. un sous-objet) X' de X est connu quand on connaît, pour tout $T \in \operatorname{ob} C$, la partie de* $\operatorname{Hom}(T, X)$ *image de* $\operatorname{Hom}(T, X')$. *Par suite, le cardinal de l'ensemble des sous-objets stricts (resp. de l'ensemble des sous-objets) de X est majoré par $\prod_{T \in \operatorname{ob} C} 2^{\operatorname{card} \operatorname{Hom}(T,X)}$, et si $X \in \operatorname{ob} C$, il est majoré par $2^{\operatorname{card} F\ell\, C}$.*

Prouvons d'abord l'assertion respée. Soient X', X'' deux sous-objets de X tels que pour tout $T \in \operatorname{ob} C$, les images de $\operatorname{Hom}(T, X')$ et $\operatorname{Hom}(T, X'')$ dans $\operatorname{Hom}(T, X)$ soient égales. Elles sont donc aussi égales à l'image de $\operatorname{Hom}(T, X''')$, où X''' est le produit fibré de X' et X'' sur X. Comme C est génératrice pour les monomorphismes, il s'ensuit que les mono-
52 morphismes $X''' \to X'$ et $X''' \to X''$ sont des isomorphismes, donc X' et X'' sont égaux, étant séparément égaux au sous-objet X''' de X.

Prouvons l'assertion non respée. Par définition de la notion de sous-objet strict, il suffit de vérifier que la connaissance de la partie $\operatorname{Hom}(T, X')$ de $\operatorname{Hom}(T, X)$ pour tout $T \in \operatorname{ob} C$ implique la connaissance de celles des doubles flèches $X \overset{u,v}{\rightrightarrows} T$ telles que $ui = vi$, où $i : X' \to X$ est l'injection canonique. Or comme C est génératrice, la relation $ui = vi$ équivaut à la relation $(ui)f = (vi)f$ pour tout $f \in \operatorname{Hom}(T, X')$, i.e. à $ug = vg$ pour tout $g \in \operatorname{Hom}(T, X)$ provenant de $\operatorname{Hom}(T, X')$ (i.e. de la forme if, avec $f \in \operatorname{Hom}(T, X')$), ce qui prouve notre assertion.

Corollaire 7.5. — *Soient E une catégorie, C une sous-catégorie pleine génératrice, X un objet de C. Alors un quotient strict (10.8) X' de X est connu quand on connaît, pour tout $T \in \operatorname{ob} C$, la partie de* $\operatorname{Hom}(T, X)^2$ *formée des couples (u, v) tels que $qu = qv$, où $q : X \to X'$ est le morphisme canonique. Donc le cardinal de l'ensemble des quotients stricts de X est majoré par* $\prod_{T \in \operatorname{ob} C} 2^{\operatorname{card} \operatorname{Hom}(T,X)^2}$.

En effet, par définition, un quotient strict X' de X est connu quand on connaît, pour tout objet Y de E, la partie de $\operatorname{Hom}(Y, X) \times \operatorname{Hom}(Y, X)$ formée des couples (u, v) tels que $qu = qv$, où $q : X \to X'$ est le morphisme canonique. Or la relation $qu = qv$ équivaut à la relation $(qu)f = (qv)f$ pour tout morphisme $f : T \to Y$ de source T dans C, puisque C est génératrice. Cette relation s'écrit encore $q(uf) = q(vf)$, ce qui prouve la première assertion de 7.5. La seconde en résulte aussitôt.

53 *7.5.1.* — On peut généraliser 7.5, en introduisant, pour une famille d'objets $(X_i)_{i \in I}$ de E, la notion de *quotient strict dans E de la famille*, par quoi on entend une famille épimorphique stricte $(p_i : X_i \to X')_{i \in I}$ de morphismes de E, — étant entendu, comme pour les quotients ordinaires, qu'on identifie deux telles familles $(p_i : X_i \to X')$ et $(q_i : X_i \to X'')$ si on peut trouver un isomorphisme $v : X' \to X''$ (nécessairement unique) tel que l'on ait $fp_i = q_i$ pour tout $i \in I$. Avec cette terminologie, la démonstration de 7.5 s'applique *ne varietur* pour donner la

Variante 7.5.2. — Soient E, C comme dans 7.5, et $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de E. Alors un quotient strict X' de $(X_i)_{i \in I}$ dans E (7.5.1) est connu quand on connaît, pour tout $T \in \operatorname{ob} C$, et tout couple $(i, j) \in I \times I$, la partie de $\operatorname{Hom}(T, X_i) \times \operatorname{Hom}(T, X_j)$ formée des couples (u, v) tels que $p_i u = p_j v$, où pour tout $i \in I$, $p_i : X_i \to X'$ désigne le morphisme canonique. Par suite, le cardinal de l'ensemble des quotients stricts de $(X_i)_{i \in I}$ dans E est majoré par $\prod_{T \in \operatorname{ob} C} \prod_{i,j \in I} 2^{\operatorname{card} \operatorname{Hom}(T,X_i) \times \operatorname{card} \operatorname{Hom}(T,X_j)}$.

7.5.3. — On voit tout de suite que la conclusion analogue est vraie si on suppose seulement que C est génératrice pour les monomorphismes stricts, pourvu que l'on suppose que les produits $X_i \times X_j$ sont représentables et que l'on se borne aux quotients *effectifs* de la famille $(X_i)_{i\in I}$, i.e. aux quotients stricts X' tels que les produits fibrés $X_i \times_{X'} X_j$ soient représentables dans E (ce qui n'est pas une restriction si E est stable par produits fibrés).

Proposition 7.6. — *Soient E une catégorie, C une sous-catégorie pleine de E génératrice par épimorphismes (7.1), $\Pi_\circ$ = un cardinal infini $\geq$ card $F\ell C$, $\Pi \geq \Pi_\circ$ un cardinal, $(u_i : X_i \to X)_{i\in I}$ une famille épimorphique universelle (10.3) dans E formée de morphismes quarrables (10.7) à sources $X_i \in \mathrm{ob}\, C$, et telle que* card $I \leq \Pi$. *Alors* card $F\ell C_{/X} \leq \Pi^{\Pi_\circ}$. 54

Soit $T \in \mathrm{ob}\, C$, il suffira de prouver qu'on a

$$\text{(7.6.1)} \qquad \mathrm{card}\,\mathrm{Hom}(T, X) \leq \Pi^{\Pi_\circ},$$

car on en conclura successivement

$$\mathrm{card}\,\mathrm{ob}\, C_{/X} \leq (\Pi^{\Pi_\circ}) \times \mathrm{card}\,\mathrm{ob}\, C_{/X} \leq (\Pi^{\Pi_\circ}) \times \Pi_\circ = \Pi^{\Pi_\circ},$$

enfin card $F\ell C_{/X} \leq ((\Pi^{\Pi_\circ})^2) \times \Pi_\circ = \Pi^{\Pi_\circ}$, puisque pour deux objets S, T de $C_{/X}$, on a card $\mathrm{Hom}_{C_{/X}}(S, T) \leq$ car $\mathrm{Hom}_C(S, T) \leq \Pi_\circ$. Pour prouver 7.5.3, notons d'abord le

Lemme 7.6.2. — *Soit J un ensemble tel que* card $J = \Pi_\circ$. *Pour tout objet T de C, et tout homomorphisme $f : T \to X$, il existe une famille $(v_j : S_j \to T)_{j\in J}$ épimorphique, à sources $S_j \in \mathrm{ob}\, C$, et pour tout $j \in J$ un $i(j) \in I$ et un $g_j : S_j \to X_{i(j)}$ tels que l'on ait $u_{i(j)} g_j = f v_j$.*

En effet, la famille des $X_i \times_X T \to$ est épimorphique par hypothèse, d'autre part, comme C est génératrice par épimorphismes stricts, pour tout i, la famille des flèches $S \to X_i \times_X T$ de source $S \in \mathrm{ob}\, C$ est épimorphique, donc par transitivité la famille des flèches $v : S \to T$ de source dans $\mathrm{ob}\, C$ qui se factorisent par un des $X_i \times_X T$ est épimorphique. Or ce sont les flèches $v : S \to T$ de source dans C pour lesquelles il existe un $i \in I$ et un $g : S \to X_i$ tel que $u_i g = f v$. Comme l'ensemble de ces flèches $v : S \to T$ est contenu dans $F\ell\, C$, donc de cardinal $\leq \Pi_\circ$, il peut s'indexer par l'ensemble d'indices J, d'où le lemme. 55

Notons maintenant qu'un morphisme $f : T \to X$ est connu quand on connaît les $f v_j$, qui sont connus quand on connaît les g_j. donc card $\mathrm{Hom}(T, X)$ est majoré par le cardinal de l'ensemble des familles $(i(j), S_j, v_j, g_j)_{j\in J}$; comme le cardinal de l'ensemble des applications $j \to I$ est $\leq \Pi^{\Pi_\circ}$, et comme pour une telle application $j \mapsto i(j)$ fixée, le cardinal de l'ensemble des familles correspondantes S_j, f_j, v_j est majoré par celui de l'ensemble des applications de J dans $F\ell C \times F\ell C$, qui est $\leq \Pi_\circ^{\Pi_\circ}$ puisque card$(F\ell C \times F\ell C) = \Pi_\circ^2 = \Pi_\circ$, on trouve que le premier membre de (7.6.1) est majoré par $\Pi^{\Pi_\circ} \times \Pi_\circ^{\Pi_\circ} = \Pi^{\Pi_\circ}$, ce qui achève la démonstration de 7.6.

Proposition 7.7. — *Soient E une catégorie où les produits fibrés sont représentables, $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'objets de E génératrice, $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de foncteurs $\varphi_i : E \to E_i$ commutant aux produits fibrés. Pour que (φ_i) soit conservative (5.1), il faut et il suffit que pour tout $\alpha \in A$ et pouf tout sous-objet X' de X_α distinct de X_α, il existe un $i \in I$ tel que $\varphi_i(X') \to \varphi_i(X_\alpha)$ ne soit pas un isomorphisme. Dans ce cas, si E est une $\mathcal{U}$-catégorie et si A est $\mathcal{U}$-petit, il existe une partie $\mathcal{U}$-petite J de I telle que $(\varphi_j)_{j\in J}$ soit déjà une famille conservative de foncteurs.*

La nécessité de la condition envisagée de conservativité étant évidente, prouvons sa suffisance. En vertu de 6.1 (iv), il suffit de prouver que (φ_i) est conservative pour les monomorphismes. Soit $u : Y' \to Y$ un monomorphisme dans E qui n'est pas un isomorphisme, il faut prouver qu'il existe $i \in I$ tel que $\varphi_i(u)$ n'est pas un isomorphisme. Par hypothèse sur 56

(X_α), il existe un α et un morphisme $X_\alpha \to Y$ qui ne se factorise pas par Y', en d'autres termes, tel que l'image inverse X' de Y' soit un sous-objet de X_α distinct de X_α. Par hypothèse, il existe un $i \in I$ tel que $\varphi_i(X') \to \varphi(X)$ ne soit pas un isomorphisme. Comme $\varphi_i(X') \simeq \varphi(X_\alpha) \times_{\varphi_{i(Y)}} \varphi_i(Y')$, il s'ensuit bien que $\varphi_i(Y') \to \varphi_i(Y)$ n'est pas un isomorphisme.

La deuxième assertion de 7.7 résulte aussitôt de la première, compte tenu de 7.4.

Corollaire 7.7.1. — *Soient E une $\mathscr{U}$-catégorie où les produits fibrés sont représentables, et admettant une famille génératrice d'objets qui soit $\mathscr{U}$-petite. Alors pour toute famille génératrice $(Y_i)_{i\in I}$ de E, il existe une sous-famille génératrice $\mathscr{U}$-petite $(Y_j)_{j\in J}$* (card $J \in \mathscr{U}$).

Il suffit en effet d'appliquer 7.7 à une $\mathscr{U}$-petite famille génératrice $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ de E et à la famille des foncteurs φ_i $(i \in I)$ représentés par les Y_i.

Proposition 7.8. — *Soient E une catégorie, C une sous-catégorie pleine génératrice par épimorphismes stricts, D une catégorie, $\mathbf{Hom}'(E, D)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Hom}(E, D)$ formée des foncteurs qui commutent aux limites inductives du type $C_{/X}$, où X est un objet quelconque de E. Alors le foncteur $F \to F|C$ induit un foncteur pleinement fidèle*

$$\mathbf{Hom}'(E, D) \longrightarrow \mathbf{Hom}(C, D).$$

57 *Par suite, si $\mathbf{Hom}(C, D)$ est une $\mathscr{U}$-catégorie* (1.1.), *par exemple* (1.1.1. b)) *si C est $\mathscr{U}$-petite et D est une $\mathscr{U}$-catégorie, alors $\mathbf{Hom}(E, D)$ est également une $\mathscr{U}$-catégorie.*

Soient $F, G : E \to D$ deux foncteurs dans le premier membre, et $u : F \to G$ un homomorphisme. Si $X = \varinjlim X_i$ dans E et si F et G commutent à la limite inductive envisagée, alors $u(X) : F(X) \to G(X)$ s'identifie à la limite des morphismes $u(X_i) : F(X_i) \to G(X_i)$, et est donc connu quand on connaît les $u(X_i)$. Ceci montre que le foncteur envisagé dans 7.8 est fidèle, compte tenu de l'implication a) ⇒ b) dans 7.2 (i). Soit inversement $v : F|D \to G|D$ un homomorphisme, prouvons qu'il provient d'un homomorphisme $u : F \to G$. On définira, pour tout $X \in \operatorname{ob} E$,

$$u(X) : F(X) = \varinjlim_{C_{/X}} F(X_i) \longrightarrow G(X) = \varinjlim_{C_{/X}} G(X_i)$$

comme la limite inductive des $v(X_i)$. Il est immédiat que l'on obtient bien un homomorphisme fonctoriel en X, donc un $u : F \to G$, en enfin que le morphisme induit par u de $F|C'$ dans $G|C'$ est v, ce qui achève la démonstration.

7.9. Familles et sous-catégories cogénératrices. — Soient E une catégorie, C une sous-catégorie pleine de E. On dit que C est cogénératrice par monomorphismes stricts (resp. cogénératrice par monomorphismes, resp. cogénératrice, resp. cogénératrice pour les épimorphismes, resp. cogénératrice pour les épimorphismes stricts) si la sous-catégorie pleine C° de E° est génératrice par épimorphismes stricts (resp. etc.). Terminologie analogue pour les familles. Tous les résultats du présent numéro concernant la notion de
58 sous-catégorie génératrice et ses variantes (7.1), redonnent donc des résultats correspondants pour les notions duales, que nous laissons au lecteur le soin de formuler pour sa satisfaction personnelle.

Proposition 7.10. — *Soient E une catégorie, C une sous-catégorie pleine génératrice* (7.1)*, D une sous-catégorie pleine de E. Pour que D soit cogénératrice* (7.9)*, il faut et il suffit que pour toute double flèche $T \overset{u,v}{\rightrightarrows} X$ dans E de source $T \in \mathrm{ob}\, C$, avec $u \neq v$, il existe une flèche $w : X \to I$ de but $I \in \mathrm{ob}\, D$, telle que $wu \neq wv$.*

Par définition, dire que D est cogénératrice signifie que pour toute double flèche $Y \overset{u,v}{\rightrightarrows} X$ dans E telle que $u \neq v$, il existe une flèche $w : X \to I$, avec $I \in \mathrm{ob}\, D$, telle que $wu \neq wv$. Donc 7.10 signifie simplement qu'il suffit de tester cette propriété lorsque $Y \in \mathrm{ob}\, C$. Or comme C est génératrice, l'hypothèse $u \neq v$ implique qu'il existe $f : T \to Y$ telle que $uf \neq vf$, d'où par hypothèse l'existence d'une $w : X \to I$ de but $I \in \mathrm{ob}\, D$ telle que $w(uf) \neq w(vf)$, d'où $wu = wv$, C.Q.F.D.

Corollaire 7.11. — *Les notations étant celles de 7.10, supposons que les objets I de D sont des objets injectifs de E, i.e. tels que pour tout monomorphisme $X \to Y$ dans E, l'application* $\mathrm{Hom}(Y, I) \to \mathrm{Hom}(X, I)$ *correspondante soit surjective. Supposons de plus que toute double flèche $T \overset{u,v}{\rightrightarrows} X$ dans E se factorise en une double flèche épimorphique (resp. épimorphique effective) $Y \overset{u',v'}{\rightrightarrows} X$ suivie d'un monomorphisme $i : X' \to X$. Alors dans le critère 7.10 pour que D soit cogénératrice, on peut se borner aux doubles flèches (u, v) qui sont épimorphiques (resp. épimorphiques effectives).*

On en conclut : 59

Corollaire 7.12. — *Soit E une $\mathscr{U}$-catégorie admettant une petite sous-catégorie génératrice C, et telle que tout objet de E soit source d'un monomorphisme dans un objet injectif de E. Supposons de plus que pour tout $T \in \mathrm{ob}\, C$, la somme $T \amalg T$ dans E soit représentable, et que tout morphisme de source $T \amalg T$ se factorise en un épimorphisme effectif suivi d'un monomorphisme. Alors E admet une petite sous-catégorie pleine D cogénératrice. De façon précise, on peut prendre D telle que* $\mathrm{card}\, \mathrm{ob}\, D \leq \prod_{T,T' \in \mathrm{ob}\, C} 2^{\mathrm{card}(\mathrm{Hom}(T', T \coprod T))^2}$.

En effet, en vertu de 7.11, il suffit pour tout $T \in \mathrm{ob}\, C$ et pour tout quotient effectif X de $T \amalg T$, de choisir un plongement de X dans un objet injectif I de E, et de prendre pour D la sous-catégorie pleine de E engendrée par ces I. La conclusion résulte alors de 7.5.

Exemples 7.13. — Pour construire de petites sous-catégories cogénératrice en termes de petites sous-catégories génératrices, on est donc amené à chercher des conditions pour qu'une $\mathscr{U}$-catégorie E admette « suffisamment d'injectifs », i.e. que tout objet se plonge dans un objet injectif (par un monomorphisme). Il est bien connu [Tohoku] que cette condition est satisfaite dans une $\mathscr{U}$-catégorie abélienne à (petites) limites inductives filtrantes exactes (axiome $AB\, 5$ de *loc. cit.*) admettant une petite famille génératrice. La construction de *loc. cit.* n'est d'ailleurs pas liée de façon essentielle aux catégories abéliennes, et marche également dans la catégorie des faisceaux de $\mathscr{U}$-ensembles sur un espace topologique $X \in \mathscr{U}$. Nous n'énoncerons pas ici les propriétés d'exactitude qui font marcher la construction en question, et nous bornerons à signaler que dans le cas particulier de la catégorie des faisceaux 60
d'ensembles sur X, on se ramène immédiatement au cas de *loc. cit.* de la façon suivante. On note que si $\mathscr{O}_X$ est un Anneau sur X, alors tout objet injectif I de la catégorie des

$\mathscr{O}_X$-Modules est aussi injectif en tant qu'objet de la catégorie des faisceaux d'ensembles. En effet, si F est un faisceau d'ensembles, et $\mathscr{O}_X[F]$ le « $\mathscr{O}_X$-Module libre engendré par F », on a par définition un homomorphisme de faisceaux d'ensembles

$$F \longrightarrow \mathscr{O}_X[F] \tag{$*$}$$

donnant lieu à un isomorphisme, fonctoriel en F

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X[F], I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(F, I).$$

Comme le foncteur $F \mapsto \mathscr{O}_X[F]$ transforme manifestement monomorphisme en monomorphisme, il s'ensuit aussitôt que si I est un $\mathscr{O}_X$-Module injectif, c'est aussi un faisceau d'ensembles injectif. Il s'ensuit que si le morphisme $(*)$ est un monomorphisme (ce qui est le cas si on prend pour $\mathscr{O}_X$ un Anneau constant de valeur un anneau $A \neq 0$), alors un plongement de $\mathscr{O}_X[F^*]$ dans un $\mathscr{O}_X$-Module injectif I donne un plongement de F dans le faisceau d'ensembles injectif sous-jacent à I.

Le même argument s'applique, sans changement, au cas de la catégorie des faisceaux de $\mathscr{U}$-ensembles sur un $\mathscr{U}$-site, qui sera introduite dans l'exposé suivant.

L'intérêt de l'existence d'une petite sous-catégorie cogénératrice réside surtout dans le critère de représentabilité 8.12.7 plus bas.

8. Ind-objets et pro-objets

61

8.1. Foncteurs cofinaux et sous-catégories cofinales. —

Définition 8.1.1. — *Soit*

$$\varphi : I \longrightarrow I' \tag{8.1.1.1}$$

un foncteur. On dit que φ est un foncteur cofinal si pour toute catégorie C et pour tout foncteur $u : I' \to C$, considérant $\varinjlim u$ et $\varinjlim u \circ \varphi$ comme des objets de $\mathbf{Hom}(G(\mathscr{V}\text{-}\mathrm{Ens}))^\circ$ (2.1, 2.3.1) (où $\mathscr{V}$ est un univers tel que $I, I' \in \mathscr{V}$, et que C soit une $\mathscr{V}$-catégorie), le morphisme canonique

$$\varinjlim u \circ \varphi \longrightarrow \varinjlim u \tag{8.1.1.2}$$

est un isomorphisme. Lorsque φ est le foncteur d'inclusion d'une sous-catégorie de I', on dit que I est une sous-catégorie cofinale si φ est cofinal.

8.1.2. — Remarquons que pour φ, u données, la bijectivité de (8.1.1.2) ne dépend pas du choix de l'univers $\mathscr{V}$.

Revenant à la définition des termes figurant dans (8.1.1.2) (2.1, 2.3.1), on voit que dire que φ est cofinal signifie aussi que pour tout univers $\mathscr{V}$ tel que I et I' soient $\mathscr{V}$-petits, et tout foncteur

$$v : I'^\circ \longrightarrow (\mathscr{V}\text{-}\mathrm{Ens}),$$

l'homomorphisme canonique

$$\varprojlim v \longrightarrow \varprojlim v \circ \varphi \tag{8.1.2.1}$$

est un isomorphisme i.e. une bijection. Pour voir que cette condition est bien nécessaire, on observera, posant $v = v^\circ$, qu'elle signifie aussi que la condition de la définition 8.1.1 est
62 remplie quand on y fait $C = (\mathscr{V}\text{-}\mathrm{Ens})^\circ$ (ce qui implique que les limites inductives envisagées

dans (8.1.1.2) sont représentables dans C).

8.1.2.2. — Il est immédiat sur la définition que *le composé de deux foncteurs cofinaux est cofinal.*

Proposition 8.1.3. — *Soit $\varphi : I \to I'$ un foncteur.*

a) *Pour que φ soit cofinal, il faut que φ satisfasse la condition :*
   F 1) *Pour tout objet i' de I', il existe un objet i de I tel que $\varphi(i)$ majore i' (i.e. tel que* $\mathrm{Hom}(i', \varphi(i)) \neq \phi$*).*

b) *Supposons I filtrante. Pour que φ soit cofinal, il faut et il suffit que φ satisfasse la condition* (F 1) *ainsi que la condition suivante :*
   F 2) *Pour tout objet i de I et toute double flèche $i' \overset{f',g'}{\rightrightarrows} \varphi(i)$ dans I' de but $\varphi(i)$, il existe une flèche $h : i \to j$ dans I telle que $\varphi(h)f' = \varphi(h)g'$.*
   De plus, si φ est cofinal, I' est filtrante.

c) *Supposons I' filtrante, et φ pleinement fidèle. Pour que φ soit cofinal, il faut et il suffit qu'il satisfasse la condition* F 1) *de* a)*. Cela implique que I est filtrante.*

Démonstration. Pour la nécessité dans a) et b), on utilisera la définition 8.1.1 dans le seul cas où u est le foncteur d'inclusion canonique (1.3.3)

$$u : I' \hookrightarrow \hat{I}'$$

(un univers $\mathcal{U}$ tel que I, I' soient $\mathcal{U}$-petits étant choisi). On peut alors interpréter (8.1.1.2) comme une flèche de $\hat{I}'$ (3.1), dont le but est le foncteur *final* sur I' 3.4). On voit immé- 63
diatement que la condition F 1) exprime que cette flèche est un épimorphisme de $\hat{I}'$, i.e. est surjective sur chaque argument (compte tenu que les limites inductives dans $\hat{I}'$ se calculent « argument par argument »). Cela prouve a). Supposons maintenant I filtrante et φ cofinal. Alors I est filtrante : en effet, la condition que deux objets de I' soient majorés par un troisième résulte aussitôt de la même condition sur I, et de F 1), et il faut seulement encore prouver la condition PS 2) de 2.7, i.e. que pour toute double flèche

$$f', g' : i' \rightrightarrows j'$$

dans I', il existe une flèche $h' : j' \to k'$ de I' telle que $h'f' = h'g'$. Or en vertu de F 1) on peut supposer k' de la forme $\varphi(i)$. Mais comme par l'hypothèse φ cofinal, pour tout objet i' de I' $\varinjlim_i \mathrm{Hom}(i', \varphi(i))$ est l'ensemble réduit à un élément, il résulte de la description standard des limites inductives *filtrantes* dans (Ens) (2.8.1) que cela implique l'existence d'une flèche $h : i \to j$ dans I telle que $\varphi(h)f' = \varphi(h)g'$. Cela achève donc de prouver que I' est filtrant, et prouve en même temps la condition F 2).

Pour prouver que les conditions énoncées dans b) sont suffisantes pour que φ soit cofinal, on utilise la forme 8.1.2 de la définition. On constate aussitôt que la condition F 1) implique que (8.1.2.1) est un monomorphisme i.e. est injectif sur chaque argument, tandis que la condition F 2) (jointe à F 1) assure qu'il est bijectif (compte tenu du calcul des limites projectives dans $\widehat{I'^{\circ}}$ argument par argument). Cela prouve donc b).

Enfin, si I' est filtrante et φ pleinement fidèle, alors il est immédiat que la condition F 1) 64
implique que I est filtrante, et implique la condition F 2). Donc c) résulte de a) et de b).

8.1.4. — Lorsque I' est une catégorie filtrante, I une sous-catégorie pleine de I', on voit donc par 8.1.3 c) que la condition que I soit cofinale dans I' ne dépend que de la partie Ob I de l'ensemble préordonné $OB\, I'$ (pour la relation de préordre « $x \leq y$ » $\Leftrightarrow$ « $\mathrm{Hom}(x, y) \neq \varnothing$ »). Si J' est un ensemble préordonné, J une partie de J', on dira parfois que J est une *partie cofinale de* J' lorsque tout élément de J' est majoré par un élément de J. Lorsque J' est filtrante, cela signifie donc que le foncteur d'inclusion $\mathscr{J} \hookrightarrow \mathscr{J}'$ pour les catégories associées est cofinal.

8.1.5. — Dans la suite, nous n'utiliserons la notion de foncteur cofinal que dans les cas où les catégories I et I' sont filtrantes. Classiquement, on se bornait même à des catégories associées à des ensembles préordonnés (i.e. dans lesquelles il existe au plus une flèche de source et de but donnés). Il apparaît cependant que cette restriction est gênante dans les applications, les catégories filtrantes « naturelles » qui s'introduisent dans de nombreuses applications n'étant *pas* des catégories ordonnées. Le résultat suivant, dû à P. Deligne, montre cependant qu'il n'y a pas de différence essentielle entre les deux points de vue :

65 ***Proposition 8.1.6.*** — *Soit I une petite catégorie filtrante. Alors il existe un petit ensemble ordonné E, et un foncteur cofinal $\varphi : \mathscr{E} \to I$, où $\mathscr{E}$ désigne la catégorie associée à E.*

Supposons d'abord que l'ensemble préordonné Ob I n'ait pas de plus grand élément. Appelons sous-diagramme de I un couple $D = (\mathscr{O}, F)$ formé d'une partie F de $F\ell(I)$ et d'une partie $\mathscr{O}$ de Ob I, tel que pour toute $f \in F$, la source et le but de f appartiennent à $\mathscr{O}$. Un élément e de $\mathscr{O}$ est appelé *objet final* du sous-diagramme D si pour tout $x \in D'$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(x, e) \cap F$ des flèches de D de source x et de but y a exactement un élément f_x, si pour toute flèche $g : x \to y$ de D, on a $f_x = f_y \circ g$ et si $f_e = \mathrm{id}_e$. Soit E l'ensemble des sous-diagrammes *finis* D de I ayant un élément final *unique* $\varphi(D)$, et ordonnons E par inclusion. Si D, D' sont deux éléments de E et $D \subset D'$, alors il existe une unique flèche $\varphi(D', D)$ de D' de source $\varphi(D)$, de but $\varphi(D')$, et si on a des inclusions $D \subset D' \subset D''$ dans E, on a évidemment $\varphi(D'', D) = \varphi(D'', D')\varphi(D', D)$; on a également $\varphi(D, D) = \mathrm{id}_{\varphi(D)}$. On trouve donc un foncteur $\varphi : \mathscr{E} \to I$, et tout revient à prouver que E est filtrant et que φ est cofinal. Compte tenu de 8.1.3 b), on doit faire trois vérifications :

1) Condition F 1) de 8.1.3 : pour tout $i \in I$, on prend pour D le sous-diagramme de I réduit à l'objet i et sa flèche identique, alors $i \leq \varphi(D) = i$. Cette condition F 1) montre en même temps que $E \neq \varnothing$.
2) Condition F 2) : Pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$, tout $D \in E$ et toute double flèche $i \rightrightarrows \varphi(D)$, trouver un diagramme $D' \in E$, contenant D, tel que $\varphi(D', D) : \varphi(D) \to \varphi(D')$
66 *égalise* la double flèche. Or comme I est filtrant, il existe un objet j de I et une flèche $f : \varphi(D) \to j$ qui égalise la double flèche. Comme I n'a pas de plus grand élément, on peut supposer que j est un majorant *strict* de $\varphi(D)$, ce qui implique qu'il est distinct de tous les autres objets de D. Soit alors D' le sous-diagramme de I dont l'ensemble d'objets est $\mathscr{O} \cup \{j\}$, et l'ensemble des flèches est formé des flèches de D, plus les composés $x \xrightarrow{f_x} \varphi(D) \xrightarrow{f} j$, où x est un objet de D et f_x est l'unique flèche de D de source x et de but $\varphi(D)$, et id_j. Il est clair alors que D' est un sous-diagramme fini de I, qu'il admet j comme unique objet final, donc $D' \in E$, et D' satisfait à la condition voulue.

3° Deux sous-diagrammes D, $D' \subset E$ sont contenus dans un même $D'' \in E$. On peut en effet trouver un majorant strict j de $\varphi(D)$ et de $\varphi(D')$,

$$\begin{tikzcd} \varphi(D) \arrow[dr, "f"] & \\ & j \\ \varphi(D') \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd},$$

et on prend pour D'' le sous-diagramme dont l'ensemble des objets est la réunion de l'ensemble des objets de D, de D' et de $\{j\}$, et l'ensemble des flèches est la réunion de l'ensemble des flèches de D, de D', de l'ensemble des composés $f \circ f_x$ (x objet de D) et $f' \circ f'_{x'}$ (x' objet de D'), et $\{\mathrm{id}_j\}$. On obtient bien ainsi un sous-diagramme fini de E, montrons que, quitte à remplacer j, f, f' par j', gf, gf' avec $g : j \to j'$ convenable, on peut obtenir que j soit un objet final de D'. Il revient au même de dire que pour tout x qui est à la fois objet de D et de D', on a $f f_x = f' f'_{x'}$. Or c'est là d'un ensemble *fini* de doubles-flèches qu'il s'agit d'égaliser par un $g : j \to j'$, ce **67**
qui est possible puisque I est filtrante.

Cela achève la démonstration dans le cas envisagé. On ramène le cas général à celui-ci, en introduisant la catégorie filtrante $\mathbf{N}$ associée à l'ensemble ordonné $\mathbf{N}$ des entiers naturels, et en notant que la catégorie $\mathbf{N} \times I$ est filtrante, qu'elle n'a pas de plus grand élément, et que la projection $\mathbf{N} \times I \to I$ est un foncteur cofinal.

Corollaire 8.1.7. — *Soit I une $\mathscr{U}$-catégorie. Pour qu'il existe un petit ensemble ordonné filtrant E, et un foncteur cofinal $\mathscr{E} \to I$, il faut et il suffit que I soit filtrante et que* Ob I *admette une petite partie cofinale I' (8.1.4).*

C'est nécessaire en vertu de 8.1.3 a), et suffisant en vertu de 8.1.6 appliqué à la sous-catégorie pleine de I définie par I'.

Définition 8.1.8. — *Soit I une catégorie filtrante. On dit que I est essentiellement petite si I est une $\mathscr{U}$-catégorie, et si elle satisfait aux conditions équivalentes de 8.1.7.*

8.2. Ind-objets et foncteurs ind-représentables. —

8.2.1. — Nous fixons dans la suite une $\mathscr{U}$-catégorie C, que nous considérons toujours comme plongée dans la catégorie $\widehat{C}$ des $\mathscr{U}$-préfaisceaux à l'aide du foncteur canonique (1.3.1)

$$h : C \hookrightarrow \widehat{C}. \tag{8.2.1.1}$$

Nous appellerons *ind-objet de C* (ou *système inductif* de C), tout foncteur

$$\varphi : I \longrightarrow C, \tag{8.2.1.2}$$

où I est une catégorie *filtrante* (2.7), appelée la *catégorie d'indices* du ind-objet. (I est par **68**
ailleurs quelconque, et nous n'exigeons pas, notamment, que I soit une $\mathscr{U}$-catégorie.) Il sera souvent commode de désigner un ind-objet φ par la notation indicielle $(X_i)_{i \in \mathrm{ob}\, I}$, ou

même (par nouveau abus de notation) $(X_i)_{i\in I}$, ou $(X_i)_i$ ou (X_i), où $X_i = \varphi(i)$ pour $i \in \operatorname{ob} I$. Cette notation n'est ni plus ni moins abusive que la notation utilisée classiquement pour les systèmes inductifs indexés par les ensembles ordonnés filtrants (où la mention des morphismes de transition est également absente). Les X_i s'appellent les *objets composants* du ind-objet $\mathscr{X}$. On fera attention que dans le cas général envisagé ici, les « *morphismes de transition* » $\varphi(f)$ du système inductif sont indexés par l'ensemble $F\ell\, I$ des flèches de I, qui ne s'identifie pas en général à une partie de $\operatorname{Ob} I \times \operatorname{Ob} I$; en d'autres termes, pour i et j donnés, j majorant i, il peut exister plus d'un morphisme de transition de X_i dans X_j.

8.2.2. — Les ind-objets $\mathscr{X} = (X_i)_{i\in I}$ de C les plus utiles sont ceux pour lesquels la catégorie d'indices I est essentiellement petite (8.1.8) ; un tel ind-objet est appelé *essentiellement petit*. Si $(X_i)_{i\in I}$ est ainsi, utilisant le fait que dans $\widehat{C}$ les petites limites inductives sont représentables (3.1), on peut considérer

$$L(\mathscr{X}) \overset{def}{=} \varinjlim h\cdot\mathscr{X} = \varinjlim_i X_i \in \operatorname{ob}\widehat{C}, \tag{8.2.2.1}$$

où la dernière limite est prise *dans* $\widehat{C}$. Donc $L(\mathscr{X})$ est le préfaisceau

$$L(\mathscr{X}) : Y \longmapsto \varinjlim_i \operatorname{Hom}(Y, X_i) \tag{8.2.2.2}$$

69 sur C. On dit que ce préfaisceau est le *préfaisceau ind-représenté par le ind-objet* $\mathscr{X} = (X_i)_{i\in I}$ *de* C. Un préfaisceau F sur C est appelé un *préfaisceau ind-représentable* s'il est isomorphe à un préfaisceau $L(\mathscr{X})$ ind-représenté par un ind-objet essentiellement petit. Il résulte d'ailleurs de 8.1.6 que dans cette définition, on peut supposer que I est une petite catégorie, et même que I est associée à un ensemble ordonné $\in \mathscr{U}$.

8.2.3. — Considérons un ind-objet $\mathscr{X} = (X_i)_{i\in I}$, donné par un foncteur $\varphi : I \to C$, et soit

$$u : I' \longrightarrow I$$

un foncteur, où I est une deuxième catégorie filtrante. Alors le foncteur $\varphi\circ u$ est un ind-objet $\mathscr{X}'$ de C de catégorie d'indices I', qui en notation indicielle s'écrit $(X_{u(i')})_{i'\in I'}$, qu'on appelle le ind-objet de C *déduit de* $(X_i)_{i\in I}$ *par changement de catégories d'indices* à l'aide du foncteur u. Si I et I' (i.e. $\mathscr{X}$ et $\mathscr{X}'$) sont essentiellement petits, on trouve un morphisme canonique

$$L(\mathscr{X}') = \varinjlim_{i'} X_{u(i')} \longrightarrow L(\mathscr{X}) = \varinjlim_i X_i \tag{8.2.3.1}$$

entre les préfaisceaux ind-représentés par $\mathscr{X}'$ et $\mathscr{X}$ respectivement. Lorsque u est un foncteur cofinal (8.1.1), alors $\mathscr{X}$ est essentiellement petit si et seulement si $\mathscr{X}'$ l'est (8.1.7), et l'homomorphisme précédent (8.2.3.1) est un isomorphisme

$$L(\mathscr{X}') \simeq L(\mathscr{X}). \tag{8.2.3.2}$$

70 *8.2.4.* — Soient

$$\mathscr{X} = (X_i)_{i\in I}, \mathscr{Y} = (Y_j)_{j\in I} \tag{8.2.4.1}$$

deux ind-objets de C essentiellement petits, indexés par des catégories (filtrantes et essentiellement petites) I et J. On appelle *morphisme* du ind-objet $\mathscr{X}$ dans le ind-objet $\mathscr{Y}$ tout morphisme

$$L(\mathscr{X}) \longrightarrow L(\mathscr{Y}) \tag{8.2.4.2}$$

entre les préfaisceaux qu'ils ind-représentent. On pose

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{ind-ob}}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) = \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(L(\mathscr{X}), L(\mathscr{Y})). \tag{8.2.4.3}$$

(On supprime l'indice ind-ob au Hom si on ne craint pas de confusion). On définit la composition des ind-objets de $\mathscr{C}$ comme le composition des morphismes des préfaisceaux qu'ils ind-représentent. Si $\mathscr{V} \supset \mathscr{U}$ est un univers contenant $\mathscr{U}$, et si on se borne aux ind-objets essentiellement petits qui sont $\in \mathscr{V}$, ceux-ci forment donc l'ensemble d'objets d'une catégorie, dont l'ensemble des flèches est formé des triples $(\mathscr{X}, \mathscr{Y}, u)$, où $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ sont des ind-objets essentiellement petits $\in \mathscr{V}$ et où $u : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est un morphisme de ind-objets, i.e. un morphisme $L(\mathscr{X}) \to L(\mathscr{Y})$. La catégorie ainsi obtenu est notée

$$\mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}(C, \mathscr{U}). \tag{8.2.4.4}$$

Lorsque $\mathscr{V} = \mathscr{U}$, on la note simplement

$$\mathrm{Ind}_{\mathscr{U}}(C) \text{ ou } \mathrm{Ind}(C), \tag{8.2.4.5}$$

et on l'appelle *catégorie des ind-objets de C* relativement à $\mathscr{U}$, en supprimant la mention de $\mathscr{U}$ quand aucune confusion n'est à craindre.

Évidemment, si $\mathscr{V} \subset \mathscr{V}'$ sont deux univers contenant $\mathscr{U}$, $\mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}(C, \mathscr{U})$ est une sous- 71
catégorie pleine de $\mathrm{Ind}_{\mathscr{V}'}(, \mathscr{U})$; il résulte alors de 8.2.3 que le foncteur d'inclusion est une *équivalence de catégories* :

$$\mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}(C, \mathscr{U}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Ind}_{\mathscr{V}'}(C, \mathscr{U}). \tag{8.2.4.6}$$

Cela montre en particulier que *tout ind-objet essentiellement petit de C définit un élément de* Ind(C)*, à isomorphisme unique près.* Cette constatation justifie l'abus de langage, assez courant en pratique, consistant à identifier tout ind-objet essentiellement petit de C à un objet de Ind(C).

Il résulte aussitôt des définitions que pour tout univers $\mathscr{V}$, nous avons un foncteur canonique

$$L : \mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}(C, \mathscr{U}) \longrightarrow \widehat{C} \tag{8.2.4.7}$$

qui est pleinement fidèle. Ces foncteurs sont évidemment connus à isomorphisme unique près, grâce à (8.2.4.6), lorsqu'on connaît l'un d'eux, et en particulier lorsqu'on connaît le foncteur canonique

$$L : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \widehat{C}. \tag{8.2.4.8}$$

Comme ce foncteur est pleinement fidèle, on l'utilise fréquemment pour identifier un objet du premier membre avec le foncteur qu'il pro-représente, voire pour identifier Ind(C) avec son image essentielle dans $\widehat{C}$, formée des préfaisceaux ind-représentables. On fera attention cependant que cette identification présente nettement plus d'inconvénients que l'identification analogue de C à une sous-catégorie pleine de $\widehat{C}$ par le foncteur h (8.2.1.1), car contrairement à ce dernier, le foncteur (8.2.4.8) n'est pas en général injectif sur les objets.

8.2.5. — Explicitons la définition (8.2.4.3) en termes des expressions indicielles (8.2.4.1) des 72
ind-objets considérés. On trouve, compte tenu de la définition (8.2.2.1) :

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y}) \simeq \varprojlim_i \mathrm{Hom}(X_i,\mathscr{Y}) \overset{dfn}{=} \varprojlim_i \mathrm{Hom}(X_i, L(\mathscr{Y})) = \varprojlim_i \varinjlim_j \mathrm{Hom}_C(X_i, Y_j),$$

la dernière égalité provenant de (8.2.2.2) appliqué à $\mathscr{Y}$. On trouve donc une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}((X_i)_{i\in I},(Y_j)_{j\in J}) \simeq \varprojlim_{i\in I} \varinjlim_{j\in J} \mathrm{Hom}_C(X_i, Y_j). \tag{8.2.5.1}$$

Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter la composition des morphismes de ind-objets sur cette formule. Notons qu'il résulte aussitôt de cette formule que l'ensemble $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ d'homomorphismes de ind-objets est *$\mathscr{U}$-petit,* i.e. que les catégories (8.2.4.4) sont des $\mathscr{U}$-catégories. Il revient au même de dire (en vertu de (8.2.4.6)) que la *catégorie* $\mathrm{Ind}(C)$ *est une $\mathscr{U}$-catégorie,* i.e. que le deuxième membre de (8.2.5.1) est petit lorsque $I, J \in \mathscr{U}$, ce qui résulte aussitôt du fait que C est une $\mathscr{U}$-catégorie donc les $\mathrm{Hom}_C(X_i, Y_j)$ sont petits.

8.2.6. — Soit I une catégorie filtrante essentiellement petite. Alors on voit sur (8.2.5.1), ou sur la fonctorialité de la limite inductive d'un foncteur $I \to \widehat{C}$ par rapport au dit foncteur, qu'on a un foncteur canonique

$$\mathbf{Hom}(I, C) \longrightarrow \mathrm{Ind}(C). \tag{8.2.6.1}$$

On fera attention que ce foncteur *n'est pas* en général pleinement fidèle, ni même fidèle.

73 ***Remarque 8.2.7.*** — Les définitions de 8.2.4 rendent claire la notion d'*isomorphie* de deux ind-objets (essentiellement petits), qui signifie aussi l'isomorphie des préfaisceaux qu'ils ind-représentent. On fera attention que c'est une notion d'isomorphie très faible, si on la compare à la notion d'isomorphie dans des catégories de la forme $\mathbf{Hom}(I, C)$. Ainsi, un grand nombre de relations assez naturelles qu'on peut imposer à un ind-objet (tel que celle d'avoir ses composantes dans une sous-catégorie strictement pleine donnée, ou celle d'être strict (8.12 ci-dessous)) *ne sont pas* stables par isomorphisme. Il faudra donc, si on tient à travailler avec des notions stables par isomorphisme de ind-objets, « saturer » les notions envisagées en passant à la sous-catégorie strictement pleine de $\mathrm{Ind}(C)$ engendrée par la sous-catégorie de $\mathrm{Ind}(C)$ formée des objets satisfaisant à la condition envisagés. Voir par exemple la notion de ind-objet essentiellement constant, introduite plus bas (8.4).

Exercice 8.2.8. — Soient $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$ deux univers et C un $\mathscr{U}$-catégorie qui appartienne à $\mathscr{V}$. On désigne par $\mathrm{SysInd}(C)$ la catégorie suivante :

a) Les objets de $\mathrm{SysInd}(C)$ sont les foncteurs $\varphi : I \to C$ où I est une catégorie filtrante essentiellement $\mathscr{U}$-petite appartenant à $\mathscr{V}$.
b) Soient (I, φ) et (J, ψ) deux objets de $\mathrm{SysInd}(C)$. Un morphisme de $\mathrm{SysInd}(C)$ de (I, φ) dans (J, ψ) est une couple (m, u), où $m : I \to J$ est un foncteur et où $u : \varphi \to \psi \circ m$ est un morphisme de foncteurs. La composition des morphismes dans $\mathrm{SysInd}(C)$ se définit de manière évidente.

74 Notons S l'ensemble des morphismes $(m, u) : (I, \varphi) \to (J, \Psi)$ de $\mathrm{SysInd}(C)$ tel que m soit cofinal et u un isomorphisme. Soit (I, φ) un objet de $\mathrm{SysInd}(C)$. La catégorie $F\ell(I)$ des

flèches de I s'envoie par deux foncteurs naturels dans I : la source et le but. De plus ces deux foncteurs sont liés par le morphisme canonique de foncteurs v : source $\to$ but. D'où deux morphismes dans $\mathrm{SysInd}(C)$ de $(F\ell(I), \varphi \circ \text{ source})$ dans (I, φ) : $p_1(I, \varphi) = (\text{source, id})$, $p_2(I, \varphi) = (\text{but}, \varphi^* v : \varphi \circ \text{source} \to \varphi \circ \text{ but})$. Notons $p : \mathrm{SysInd}(C) \to \mathrm{Ind}(C)$ le foncteur évident. Soit B une catégorie. Montrer que le foncteur $F \mapsto F \circ p$:

$$\mathbf{Hom}(\mathrm{Ind}(C), B) \longrightarrow \mathbf{Hom}(\mathrm{SysInd}(C), B)$$

est pleinement fidèle, et qu'un foncteur $G : \mathrm{SysInd}(C) \to B$ appartient à l'image essentielle si et seulement s'il possède les deux propriétés suivantes :

1) Pour tout $s \in S$, $F(s)$ est un isomorphisme de B.
2) Pour tout objet (I, φ) de $\mathrm{SysInd}(C)$, $F(p_1(I, \varphi)) = F(p_2(I, \varphi))$.

8.3. Caractérisation des foncteurs ind-représentables. —

Proposition 8.3.1. — *Soit F un préfaisceau ind-représentable sur C. Alors F est exact à gauche, i.e. (2.3.2) pour toute catégorie finie J et tout foncteur $\varphi : J \to C$ tel que $\varinjlim \varphi$ soit représentable (i.e. $\varprojlim \varphi^\circ$ soit représentable), l'application canonique*

$$F(\varinjlim \varphi) \longrightarrow \varprojlim F \circ \varphi$$

est bijective.

En effet, les préfaisceaux représentables étant évidemment exacts à gauche, il résulte 75
aussitôt de 2.8 qu'il en est de même de toute limite inductive filtrante de tels foncteurs, C.Q.F.D.

8.3.2. — F étant un préfaisceau sur C, nous aurons à travailler souvent avec la catégorie

$$C_{/F} \hookrightarrow \widehat{C}_{/F}, \tag{8.3.2.1}$$

qui désigne la sous-catégorie pleine du deuxième membre formée des flèches $X \to F$ *de source dans* C. Il résulte de 1.4 que les objets de cette catégorie s'identifient aux couples (X, u), où X est un objet de C et $u \in F(X)$. Un morphisme de (X, u) dans (X', u') s'interprète alors comme une flèche $f : X \to X'$ dans C telle que l'on ait $F(f)(u') = u$. Le foncteur « oubli du but » de $\widehat{C}_{/F}$ dans $\widehat{C}$ induit un foncteur (qualifié de *canonique*).

$$C_{/F} \longrightarrow C, \tag{8.3.2.2}$$

déjà considéré dans 3.4, où on prouve que la limite inductive de ce foncteur existe dans $\widehat{C}$ (sans condition de petitesse sur $C_{/F}$!) et est isomorphe canoniquement à F.

8.3.2.3. — Notons que si dans C les limites inductives finies sont représentables, et si F est exact à gauche (i.e. les transforme en limites projectives finies de (Ens)), alors il en est de même dans $C_{/F}$, et fortiori (2.7.1) $C_{/F}$ est filtrante. Si, plus généralement, dans C les sommes de deux objets et les conoyaux de doubles flèches sont représentables, et si F les transforme en produits resp. en noyaux, alors $C_{/F}$ est stable sous les mêmes types de limites inductives 76
finies, donc elle est filtrante si et seulement si elle est non vide, i.e. si et seulement si le foncteur F n'est pas le foncteur constant de valeurs $\varnothing$.

Théorème 8.3.3. — *Soient C une $\mathscr{U}$-catégorie, et $F \in \mathrm{ob}\,\widehat{C}$, $F : C^\circ \to (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$ un $\mathscr{U}$-préfaisceau sur C. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *F est ind-représentable (8.2.2).*
(ii) *La catégorie $C_{/F}$ (8.3.2) est filtrante et essentiellement petite.*
(iii) *(si dans C les limites inductives finies sont représentables.) Le foncteur F est exact à gauche, et* ob $C_{/F}$ *admet une petite partie cofinale (8.1.4).*
(iii bis) *(Si dans C les sommes de deux objets et les conoyaux de doubles flèches sont représentables.) Le foncteur F transforme somme de deux objets de C en produits, conoyaux de doubles flèches de C en noyaux, la catégorie $C_{/F}$ est non vide i.e. le foncteur F n'est pas le foncteur constant de valeur $\varnothing$, enfin il existe une petite famille d'objets de $C_{/F}$ telle que tout objet X de $C_{/F}$ soit majoré par un objet X_i, i.e. admette un F-morphisme $X_i \to X$.*
(iv) *(si la catégorie C est équivalente à une petite catégorie.) La catégorie $C_{/F}$ est filtrante.*
(v) *(Si la catégorie C est équivalente à une petite catégorie, et si les limites inductives filtrantes y sont représentables.) Le foncteur F est exact à gauche.*

77 *Démonstration.* (i) ⇒ (ii). Supposons F ind-représenté par $(X_i)_{i\in I}$, avec I petit. Prouvons que $C_{/F}$ est filtrante. Soient X, X' deux objets de $C_{/F}$, i.e. des objets de C munis de morphismes $X \to F$, $X' \to F$, prouvons qu'ils sont majorés par un troisième objet de $C_{/F}$. Or les morphismes $X \to F$, $X' \to F$ proviennent de morphismes $X \to X_i$, $X' \to X'_i$, et quitte à remplacer i, i' par un majorant commun dans Ob I, on peut supposer $i = i'$, et on prend comme majorant commun de X, X' l'objet X_i muni du morphisme canonique $X_i \to F$. Soit maintenant $X \overset{f,g}{\rightrightarrows} X' \xrightarrow{h} F$ une double flèche dans $C_{/F}$, prouvons qu'elle est égalisée par une flèche $X' \to X''$ de $C_{/F}$. Or $h : X' \to F$ est donné par un morphisme $h_i : X' \to X_i$, et la condition $hf = hg$ signifie qu'il existe $\alpha : i \to j$ dans I tel que $\varphi(\alpha)(h_i f) = \varphi(\alpha)(h_i g)$, i.e. quitte à remplacer h_i par $\varphi(\alpha)h_i$, on égalise f et g. Cela prouve que $C_{/F}$ est filtrante. Il est alors immédiat qu'elle est essentiellement petite puisque les objets $(X_i \to F)_{\in \mathrm{Ob}\, I}$ forment une petite famille dans Ob $C_{/F}$ qui est cofinale.

(ii) ⇒ (i). Posons $I = C_{/F}$, et considérons le foncteur canonique (8.3.2.1)

$$\varphi : I = C_{/F} \longrightarrow F.$$

On sait que le préfaisceau représenté par cet ind-objet de C est F (3.4), donc F est ind-représentable par définition (8.2.2).

(ii) ⇔ (iii). En effet, (ii) ⇒ (iii) car un foncteur ind-représentable est exact à gauche (8.3.1),
78 et (iii) ⇒ (ii) car on a signalé (8.3.1), que F exact à gauche implique que $C_{/F}$ est filtrante, et on applique la définition 8.1.8 pour conclure que cette catégorie est essentiellement petite.

(ii) ⇔ (iii bis) se prouve de même que (ii) ⇔ (iii).

Les équivalences (ii) ⇔ (iv) et (iii) ⇔ (v) sont triviales, puisque pour C équivalente à une petite catégorie, $C_{/F}$ est évidemment équivalente également à une petite catégorie et *a fortiori* elle est automatiquement essentiellement petite dès qu'elle est filtrante. Cela achève la démonstration de 8.3.3.

Remarque 8.3.4. — Soit $F : C' \to C''$ un foncteur entre $\mathscr{U}$-catégories. Il apparaît que la notion d'exactitude à gauche (2.3.2) ne présente guère d'intérêt en pratique que si dans C' les limites projectives finies sont représentables. Dans le cas où $C'' = (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$, et où C' est $\mathscr{U}$-petit, écrivant C' sous la forme C° (donc $C = C'^\circ$), il convient de considérer que la « bonne notion » qui remplace, dans le cas général, celle d'exactitude à gauche est

celle de ind-représentabilité de F (considéré comme préfaisceau sur C° ; i.e. celle de pro-représentabilité de F, considéré comme foncteur sur C', cf. 8.10). Cette notion coïncide bien avec celle d'exactitude à gauche lorsque dans C' les limites projectives finies sont représentables *i.e.* dans C les limites inductives finies sont représentables (8.3.3). Lorsque l'on ne suppose plus C' $\mathscr{U}$-petit ou tout au moins équivalente à une catégorie $\mathscr{U}$-petite, alors les deux notions pour un foncteur F, d'exactitude à gauche et de pro-représentabilité, ne coïncident plus nécessairement, même si dans C' les limites projectives finies sont représentables (cf. 8.12.9). En fait, il semble que dans ce cas, les foncteurs exacts à gauche non 79
ind-représentables doivent être considérés comme étant de nature pathologique, les « bons » objets restant les foncteurs ind-représentables ; comparer 8.13.3. Pour le cas des foncteurs $F : C' \to C''$, avec C' et C'' à nouveau des $\mathscr{U}$-catégories quelconques, nous développerons plus bas (8.11.5), plus généralement, une notion qui « améliore » celle d'exactitude à gauche, (savoir celle d'un foncteur admettant un foncteur pro-adjoint).

8.4. Ind-objets constants, essentiellement constants. — Choisissons une catégorie finale e, i.e. telle que $\operatorname{Ob} e$ et $F\ell\, e$ soient réduits à un élément (par exemple, on peut prendre pour e la sous-catégorie pleine de (Ens) formée par l'ensemble vide, si on veut un choix canonique). C'est évidemment une catégorie filtrante et petite. Si X est un objet de C, on lui associe le ind-objet constant indexé par e, de valeur X, soit $c(X)$. Il est clair que pour X variable, on trouve ainsi un foncteur pleinement fidèle

$$c : C \longrightarrow \operatorname{Ind}(C), \tag{8.4.1}$$

d'ailleurs injectif sur les objets, et par lequel nous identifierons C à une sous-catégorie pleine de $\operatorname{Ind}(C)$. On notera que le foncteur composé

$$C \xrightarrow{c} \operatorname{Ind}(C) \xrightarrow{L} \widehat{C} \tag{8.4.2}$$

est le foncteur canonique h (8.2.1.1).

8.4.3. — Plus généralement, soit I une catégorie filtrante. Le foncteur constant sur I de 80
valeur sur un objet X de C est aussi appelé *le ind-objet constant de valeur X indexé par I*. Il est clair, si I est essentiellement petit, que cet ind-objet ind-représente le foncteur $h(X)$ représenté par X, donc cet ind-objet est isomorphe à $c(X)$.

8.4.4. — Un ind-objet $\mathscr{X}$ de C est dit *essentiellement constant* s'il est isomorphe (dans une catégorie $\operatorname{Ind}_{\mathscr{V}}(C, \mathscr{V}')$, pour $\mathscr{V}, \mathscr{V}'$ convenables) à un ind-objet de la forme $c(X)$, $X \in \operatorname{ob} C$. L'objet X, qui est alors déterminé à isomorphisme canonique près, est appelé la *valeur* du ind-objet essentiellement constant envisagé. Donc par définition, le foncteur c de (8.4.1) induit une équivalence de C avec la sous-catégorie pleine de $\operatorname{Ind}(C)$ formée des ind-objets qui sont essentiellement constants, cette sous-catégorie étant l'image essentielle du foncteur c.

Évidemment un ind-objet constant est essentiellement constant, l'inverse n'étant vrai que dans le seul cas, trivial, où C est vide ou une catégorie ponctuelle.

8.5. Limites inductives filtrantes dans $\operatorname{Ind}(C)$. —

Proposition 8.5.1. — *Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie. Dans* $\mathrm{Ind}(C)$, *les petites limites inductives filtrantes sont représentables, et le foncteur canonique* (8.2.4.8)

$$L : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \widehat{C}$$

y commute.

81 Compte tenu du fait que L est pleinement fidèle, les assertions de la proposition équivalent à la suivante :

Corollaire 8.5.2. — *Toute petite limite inductive filtrante (dans $\widehat{C}$) de préfaisceaux ind-représentables est ind-représentable.*

Cela résulte facilement du critère 8.3.3 (ii). Le détail de la vérification est laissée au lecteur.

8.5.3. — Le cas « tautologique » de limites inductives filtrantes dans $\mathrm{Ind}(C)$ est celui où on part d'un ind-objet essentiellement petit $\mathscr{X} = (X_i)_{i\in I}$ de C. On a alors, dans $\widehat{C}$ donc aussi dans $\mathrm{Ind}(C)$ (ou dans $\widehat{C}$) :

$$\mathscr{X} = \varinjlim_{I} X_i. \tag{8.5.3.1}$$

On fera attention, en écrivant cette formule, qu'il ne s'agit pas d'une limite inductive dans C, et que même lorsque cette dernière existe, elle n'est pas isomorphe dans $\mathrm{Ind}(C)$ à $\mathscr{X}$: en effet, le foncteur canonique (8.4.1) $c : C \to \mathrm{Ind}(C)$ *ne commute pas en général aux limites inductives filtrantes.* (Cf. 8.5.5 ci-dessous.)

Pour obvier à cette possibilité de confusion dans l'écriture de (8.5.3.1), « certains auteurs » (= P. Deligne) préfèrent l'écrire

$$\mathscr{X} = «\varinjlim_{I}» X_i, \tag{8.5.3.2}$$

le rôle des guillemets étant d'indiquer que la limite inductive est prise dans une catégorie de Ind-objets $\mathrm{Ind}(C)$. Par extension, il y aurait lieu alors de dénoter par « lim » toute opération de limite inductive dans $\mathrm{Ind}(C)$ (sans que les composants du système inductif envisagé dans $\mathrm{Ind}(C)$ soient nécessairement dans l'image, ou l'image essentielle, de $c : C \to \mathrm{Ind}(C)$).

82 *8.5.4.* — Pour calculer la limite inductive ou projective d'un foncteur

$$\varphi : J \longrightarrow \mathrm{Ind}(C), \tag{8.5.4.1}$$

où J est maintenant une catégorie quelconque, il est souvent commode d'expliciter φ à l'aide d'un foncteur

$$\Phi : J \times I \longrightarrow C, \tag{8.5.4.2}$$

où I est une catégorie filtrante essentiellement petite, ou de préférence petite. Un tel Φ définit en effet un foncteur

$$J \longmapsto (i \longmapsto \Phi(j,i)) : J \longmapsto \mathbf{Hom}(I, C),$$

d'où, en composant avec flèche canonique (8.2.6.1) $\mathbf{Hom}(I, C) \to \mathrm{Ind}(C)$, un foncteur

$$J \longmapsto (i \longmapsto \Phi(j,i)) : J \longrightarrow \mathrm{Ind}(C). \tag{8.5.4.3}$$

On pourra dire que Φ est une *expression indicielle de φ, indexée par la catégorie (filtrante) I*, si le foncteur correspondant (8.5.4.3) est isomorphe à φ. Nous étudierons plus bas (8.8) des conditions générales d'existence d'une expression indicielle pour un foncteur φ donné, et nous bornerons ici à partir d'un foncteur φ donné sous forme indicielle (8.5.4.3), dans le cas où J est une petite catégorie filtrante, pour indiquer dans ce cas le calcul de «$\varinjlim$» φ = «$\varinjlim_j$» $\varphi(j)$. La formule (8.5.3.2), et la formule d'associativité des limites inductives (2.5.0) donne alors immédiatement la « *calcul tautologique* » de «$\varinjlim$» φ :

(8.5.4.4) $$\text{«}\varinjlim_J\text{»}\,\varphi = \text{«}\varinjlim_{J\times I}\text{»}\,\Phi,$$

i.e. 83

(8.5.4.5) $$\text{«}\varinjlim_j\text{»}\,(i \longmapsto \Phi(j,i)) = \text{«}\varinjlim_{j,i}\text{»}\,\Phi(j,i),$$

Ainsi, le système inductif cherché n'est autre que Φ lui-même (la catégorie d'indices étant $J \times I$, qui est bien filtrante puisque J et I le sont).

Exercice 8.5.5. — Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie

a) Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) Dans C les petites limites inductives sont représentables, et le foncteur $c : C \to \mathrm{Ind}(C)$ y commute.
   (iii) Le foncteur c est une équivalence de catégories.
   (ii) Dans C les petites limites inductives sont représentables, et pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,C$, le foncteur $Y \mapsto \mathrm{Hom}(X,Y)$ commute aux dites limites.
   (iv) Les petites limites inductives filtrantes sont représentables dans C, et le foncteur $\lim c : \mathrm{Ind}\,C \to C$ (cf. 8.7.1.5) est pleinement fidèle (ou encore, une équivalence).

b) Si C est une catégorie finie, prouver que les conditions précédentes équivalent à la suivante : pour tout projecteur dans C (10.6), l'image est représentable dans C.

8.6. Extension d'un foncteur aux ind-objets. —

8.6.1. — Soit

(8.6.1.1) $$f : C \longrightarrow C'$$

un foncteur entre $\mathscr{U}$-catégories. Pour tout ind-objet

$$\varphi : I \longrightarrow C$$

de C (I une catégorie filtrante), le foncteur composé $f \circ \varphi$ est un ind-objet de C', noté aussi 84
$\mathrm{Ind}(f)(\varphi)$. En notations indicielles, si φ est écrit sous la forme $\mathscr{X} = (X_i)_{i\in I}$, on obtient

(8.6.1.2) $$\mathrm{Ind}(f)(X_i)_{i\in I} = (f(X_i))_{i\in I}.$$

Soit $\mathscr{Y} = (Y_j)_{j\in J}$ un deuxième système inductif de C. On trouve alors une application évidente, également notée $u \to \mathrm{Ind}(f)(u)$:

(8.6.1.3) $$\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y}) = \varprojlim_i \varinjlim_j \mathrm{Hom}(X_i, Y_j) \to \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}(f)(\mathscr{X}), \mathrm{Ind}(f)(\mathscr{Y})) \simeq \varprojlim_i \varinjlim_j \mathrm{Hom}(f(X_i), f(Y_j)).$$

On constate immédiatement que ces applications sont compatibles avec la composition des morphismes de ind-objets, en se référant à la formule non écrite de composition des morphismes de ind-objets (8.2.5). On a ainsi obtenu, pour tout univers $\mathscr{V}$, un foncteur

(8.6.1.4) $$\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}(C, \mathscr{U}) \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}(C', \mathscr{U})$$

(notations de (8.2.4.5)), et en particulier un foncteur

(8.6.1.5) $$\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \mathrm{Ind}(C').$$

Si on a un deuxième foncteur

$$g : C' \longrightarrow C'',$$

on a évidemment une identité de foncteurs entre catégories Ind (ou $\mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}$, au choix) :

(8.6.1.6) $$\mathrm{Ind}(gf) = \mathrm{Ind}(g) \circ \mathrm{Ind}(f),$$

85 et pour $C' = C$, on a la sempiternelle formule

(8.6.1.7) $$\mathrm{Ind}(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{\mathrm{Ind}(C)}\,.$$

De façon imagée, on peut donc dire que la catégorie $\mathrm{Ind}(C)$ *dépend fonctoriellement de* C (de façon covariante) [(3)]. Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter même une dépendance 2-*fonctorielle*, en définissant, pour tout couple de $\mathscr{U}$-catégories C, C', un foncteur canonique

(8.6.1.8) $$\mathbf{Ind}(f) : \mathbf{Hom}(C, C') \longrightarrow \mathbf{Hom}(\mathrm{Ind}(C), \mathrm{Ind}(C')),$$

et en précisant la nature fonctorielle des isomorphismes identiques (8.6.1.6) et (8.6.1.7).

8.6.2. — Reprenons le foncteur (8.6.1.1), et considérons le foncteur correspondant (5.1)

(8.6.2.1) $$f_! : \widehat{C} \longrightarrow \widehat{C'},$$

et le diagramme de foncteurs

(8.6.2.2)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ind}(C) \arrow[r, "\mathrm{ind}(f)"] \arrow[d, "L_C"'] & \mathrm{Ind}(C') \arrow[d, "L_{C'}"] \\ \widehat{C} \arrow[r, "f_!"] & \widehat{C'} \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales désignent les foncteurs canoniques L de (8.2.4.8). Comme le foncteur $f_!$ « prolonge f » et commute aux limites inductives (5.4.3), et que les foncteurs L_C et $L_{C'}$ commutent aux petites limites inductives filtrantes (8.5.1), il résulte de (8.5.3.2) que pour tout ind-objet $(X_i)_{i\in I}$ de C, on a dans $\widehat{C'}$ un isomorphisme canonique

$$f_!(L_C((X_i)_{i\in I})) \simeq \varinjlim_i f_! L_C(X_i) \simeq \varinjlim_i L_{C'} f(X_i) = L_{C'}(f(X_i)_{i\in I})$$

86 i.e. un isomorphisme canonique

$$f_! L_C(\mathscr{X}) \simeq L_{C'}(\mathrm{Ind}(f)(\mathscr{X})).$$

[(3)] Pour une dépendance contravariante, sous certaines conditions, cf. 8.11.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que ce dernier est fonctoriel, i.e. qu'il correspond à un isomorphisme canonique

$$f_! L_C \simeq L_{C'} \circ \operatorname{Ind}(f). \tag{8.6.2.3}$$

En d'autres termes, le *carré (8.6.2.2) est commutatif à isomorphisme canonique près.* Compte tenu du fait que $f_!$ commute aux petites limites inductives, et de 8.5.1, on conclut de ceci :

Proposition 8.6.3. — *Soit $f : C \to C'$ un foncteur entre $\mathscr{U}$-catégories. Alors le foncteur*

$$\operatorname{Ind}(f) : \operatorname{Ind}(C) \longrightarrow \operatorname{Ind}(C')$$

commute aux limites inductives filtrantes. De plus, il rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c_C"'] & C' \arrow[d, "c_{C'}"] \\ \operatorname{Ind}(C) \arrow[r, "\operatorname{Ind}(f)"] & \operatorname{Ind}(C') \end{tikzcd} ,$$

où les flèches verticales c_C, $c_{C'}$ sont les foncteurs canoniques (8.4.1).

La dernière assertion est triviale sur les définitions, et a été mis pour la commodité des références. Noter d'ailleurs que les propriétés énoncées dans 8.6.3 *caractérisent le foncteur* $\operatorname{Ind}(f)$ à isomorphisme unique près, comme étant induit par le foncteur $f_!$ (8.6.2.1), comme 87
il résulte de la démonstration qu'on vient de donner de (8.6.2.3).

Proposition 8.6.4. — *Les notations sont celles de* 8.6.3.

a) *Pour que* $\operatorname{Ind}(f)$ *soit fidèle (resp. pleinement fidèle), il faut et il suffit que f le soit.*
b) *Pour que* $\operatorname{Ind}(f)$ *soit une équivalence de catégories, il faut et il suffit que f soit pleinement fidèle, et que tout objet de C' soit isomorphe à facteur direct* (10.6) *d'un objet dans l'image de f.*

Démonstration.

a) La nécessité résulte évidemment du fait que f est induit par $\operatorname{Ind}(f)$. Pour la suffisance, il suffit d'utiliser la forme (8.6.1.3) de $\operatorname{Ind}(f)$ sur des ensembles $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, en se rappelant que les limites inductives filtrantes d'ensembles, et les limites projectives quelconques, transforment monomorphismes en monomorphismes, isomorphismes en isomorphismes.
b) On peut supposer déjà g donc $\operatorname{Ind}(f)$ pleinement fidèle. Comme tout objet de $\operatorname{Ind}(C')$ est une petite limite inductive filtrante d'objets de C', la pleine fidélité de $\operatorname{Ind}(f)$ implique que pour ce foncteur soit essentiellement surjectif, il revient au même que tout objet X' de C' soit dans l'image essentielle. Or si on a un isomorphisme

$$X' \xrightarrow{\sim} «\varinjlim» f(X_i),$$

cet isomorphisme se factorise par un des $f(X_i)$, ce qui montre que X' est un facteur direct de $f(X_i)$, ce qui prouve la nécessité dans b). Pour la suffisance, utilisant la pleine fidélité de $\operatorname{Ind}(f)$, elle résulte aussitôt du

88 ***Corollaire 8.6.5.*** — *Dans* Ind(E) *les images de projecteurs (10.6) sont représentables, et le foncteur* Ind(f) : Ind$(C) \to$ Ind(C') *commute à la formation desdites images.*

Cela résulte en effet du fait que dans Ind(C) les petites limites inductives filtrantes sont représentables (8.5.1) et que Ind(f) y commute (8.6.3), compte tenu que l'image d'un projecteur $p : X \to X$ s'interprète comme la limite inductive d'un système inductif filtrant indexé par $\mathbf{N}$

$$X \xrightarrow{p} X \xrightarrow{p} X \longrightarrow \dots$$

ou au choix, comme limite inductive du foncteur qu'on devine sur la catégorie filtrante P ayant un seul objet, et une flèche non identique Π telle que $\Pi^2 = \Pi$.

8.7. — *Le foncteur* $\varinjlim_C$: Ind$(C) \to C$. *Caractérisations universelles de la catégorie* Ind(C).

8.7.1. — Reprenons une $\mathscr{U}$-catégorie C, et le foncteur canonique

$$c : C \longrightarrow \mathrm{Ind}(C). \tag{8.7.1.1}$$

Soit $\mathscr{X} = (X_i)_{i\in I}$ un objet de Ind(C). Il résulte immédiatement de la définition des limites inductives représentables (2.1, 2.1.1) que $\varinjlim_i X_i$ *est représentable dans* C *si et seulement si l'adjoint à gauche de* c *est défini en* $\mathscr{X}$, et que dans le cas $\varinjlim_i X_i$ (calculé dans C) n'est autre que la valeur en $\mathscr{X}$ dudit adjoint à gauche :

$$\mathrm{Hom}_C(\varinjlim_i X_i, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C)}((X_i)_{i\in I}, c(Y)). \tag{8.7.1.2}$$

89 Si on désigne par

$$\mathrm{Ind}(C)' \subset \mathrm{Ind}(C) \tag{8.7.1.3}$$

la sous-catégorie pleine de Ind(C) formée des ind-objets de C qui admettent une limite inductive *dans* C, il résulte de l'observation précédente que cette sous-catégorie est *strictement pleine*, et que l'on a un foncteur canonique

$$\varinjlim_C : \mathrm{Ind}(C)' \longrightarrow C, \tag{8.7.1.4}$$

dont la valeur en chaque objet $(X_i)_{i\in I}$ de Ind$(C)'$ est sa limite inductive dans C. Dans le cas particulier où dans C les petites limites inductives filtrantes sont représentables, on obtient donc un foncteur naturel

$$\varinjlim_C : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow C. \tag{8.7.1.5}$$

8.7.1.6. — Bien entendu, on peut définir les foncteurs précédents également sur des catégories du type Ind$_{\mathscr{V}}(C,\mathscr{U})'$, Ind$_{\mathscr{V}}(C,\mathscr{U})$, mais, compte tenu de (8.2.4.6), ils sont déjà déterminés (à isomorphisme unique près) par la connaissance des foncteurs précédents, correspondant au cas $\mathscr{V} = \mathscr{U}$.

8.7.1.7. — De la construction précédente du $\varinjlim_C$ comme un foncteur adjoint à gauche, il résulte immédiatement que ce foncteur *commute aux limites inductives quelconques*, et en particulier aux petites limites inductives filtrantes (ces dernières étant représentables dans $\mathrm{Ind}(C)$ (8.5.1)). Notons aussi que $\mathrm{Ind}(C)'$ contient toujours l'image essentielle de c (formée des ind-objets essentiellement constants), et que l'on a un isomorphisme canonique fonctoriel en $X \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Ind}(C)'$:

(8.7.1.8) $$\varinjlim_C c(X) \simeq X,$$

i.e. , dans le cas favorable où C est stable par petites limites inductives, on a un isomorphisme 90
canonique

(8.7.1.9) $$\varinjlim_C \circ\, c \simeq \mathrm{id}_C\,.$$

8.7.2. — Considérons maintenant un foncteur

(8.7.2.1) $$f : C \longrightarrow E,$$

où E est une $\mathscr{U}$-catégorie où les petites limites inductives sont représentables, de sorte qu'on a un foncteur

$$\varinjlim_E : \mathrm{Ind}(E) \longrightarrow E.$$

Comme on a défini également (8.6)

$$\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \mathrm{Ind}(E),$$

on peut considérer le composé

(8.7.2.2) $$\overline{f} = \varinjlim_E \circ\, \mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow E,$$

qu'on appelle parfois le *prolongement canonique de f aux ind-objets* (mais qu'on se gardera de confondre avec $\mathrm{Ind}(f)$!). Comme composé de deux foncteurs commutant aux petites limites inductives filtrantes (8.6.3, 8.7.1.7), ce foncteur lui-même commute aux petites limites inductives filtrantes. De plus, il résulte de l'isomorphisme (8.7.1.9) appliqué à E, et de (8.6.2.3), que $\overline{f}$ *prolonge* f à isomorphisme près, i.e. qu'on a un isomorphisme canonique

(8.7.2.3) $$\overline{f} \circ c_C \simeq f.$$

Il est assez clair d'ailleurs, compte tenu du fait que tout objet de $\mathrm{Ind}(C)$ est petite limite 91
inductive filtrante d'objets de C, que les deux propriétés précédentes *caractérisent* encore $\overline{f}$, à isomorphisme unique près. On peut préciser ce point pour obtenir en même temps une caractérisation universelle, à équivalence près, de $\mathrm{Ind}(C)$ parmi les $\mathscr{U}$-catégories E où les petites limites inductives filtrantes sont représentables. Si E et F sont deux telles $\mathscr{U}$-catégories, désignons par

(8.7.2.4) $$\mathbf{Hom}(E, F)' \subset \mathbf{Hom}(E, F)$$

la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Hom}(E, F)$ formée des foncteurs qui commutent aux petites limites inductives filtrantes. On a alors :

Proposition 8.7.3. — *Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie, et utilisons la notation ci-dessus (8.7.2.4). Alors le foncteur canonique*

$$c_C : C \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$$

est 2*-universel parmi les foncteurs de source C et de but une $\mathscr{U}$-catégorie à petites limites inductives filtrantes représentables. En d'autres termes,* $\mathrm{Ind}(C)$ *est une telle catégorie (8.2.5, 8.5.1), et si E est une telle catégorie, le foncteur*

$$g \longmapsto g \circ c_C \,:\, \mathbf{Hom}(\mathrm{Ind}(C), E)' \longrightarrow \mathbf{Hom}(C, E) \tag{8.7.3.1}$$

est une équivalence de catégories.

Pour prouver ce dernier point, il suffit de vérifier que l'application $f \mapsto \overline{f}$ définie par (8.7.2.2) peut se préciser par un *foncteur*

$$f \longmapsto \overline{f} = \varinjlim_E \cdot \mathrm{Ind}(f) \,:\, \mathbf{Hom}(C, E) \longrightarrow \mathbf{Hom}(\mathrm{Ind}(C), E)', \tag{8.7.3.2}$$

92 et que ce dernier est aussi-inverse de (8.7.3.1). Le détail de la vérification, essentiellement triviale, est laissé au lecteur. On peut aussi invoquer 7.8 pour conclure d'abord que (8.7.3.1) est pleinement fidèle, et (8.7.2.3) pour conclure qu'il est essentiellement surjectif.

8.7.4. — Reprenons un foncteur entre $\mathscr{U}$-catégories

$$f \,:\, C \longrightarrow E, \tag{8.7.4.1}$$

où E est une $\mathscr{U}$-catégorie où les petites limites inductives filtrantes sont représentables, d'où un foncteur

$$\overline{f} \,:\, (X_i)_{i \in I} \longmapsto \lim_i f(X_i) \,:\, \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow E. \tag{8.7.4.2}$$

Nous nous proposons d'étudier des conditions sur f qui assurent que $\overline{f}$ est pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories. Comme f est isomorphe au composé $\overline{f} \circ c_C$, et que $c_C \,:\, C \to \mathrm{Ind}(C)$ est pleinement fidèle, on voit que pour que $\overline{f}$ soit pleinement fidèle, il *faut* que f le soit. Quitte à remplacer C par son image essentielle dans E, on voit donc qu'on ne perd pas en généralité, essentiellement, en supposant que f est le foncteur d'inclusion d'une sous-catégorie C de E, ce que nous supposerons par la suite, pour simplifier les notations.

Proposition 8.7.5. — *Les notations sont celles de 8.7.4.*

a) *Pour que la foncteur $\overline{f}$ soit pleinement fidèle, il faut et il suffit que l'on ait :*
   (i) *Tout objet X de C satisfait à la condition suivante :*
93 (PF) *Pour tout petit système inductif filtrant $(Y_i)_{i \in I}$ dans C, de limite inductive $\varinjlim_i Y_i$ dans E, l'application canonique*

$$\varinjlim_i \mathrm{Hom}(X, Y_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, \varinjlim_i Y_i) \tag{8.7.5.1}$$

est bijective.

b) *Pour que le foncteur $\overline{f}$ soit une équivalente de catégories, il faut et il suffit que C satisfasse la condition* (i)*, et les deux conditions suivantes :*
   (ii) *C est une sous-catégorie de E génératrice par épimorphismes stricts (7.1).*
   (iii) *Pour tout objet X de E, la sous-catégorie pleine $C_{/X}$ de $E_{/X}$, formée des objets X' au-dessus de X de source dans* $\mathrm{Ob}\, C$*, est filtrante et essentiellement petite.*

La condition (iii) *est vérifiée en particulier si C est équivalente à une petite catégorie, et si les limites inductives finies dans C sont représentables et le foncteur d'inclusion $f \,:\, C \to E$ y commute (i.e. pour toute catégorie finie J et tout foncteur $\varphi \,:\, J \to C$ la limite inductive de $f\varphi$ est représentable et est isomorphe dans E à une objet de C).*

Démonstration.

a) Avec les notations de la condition (i), si $\mathscr{Y}$ désigne le ind-objet (Y_i), $\mathscr{X}$ le ind-objet constant défini par X, alors (8.7.5.1) n'est autre que l'application canonique

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\overline{f}(\mathscr{X}), \overline{f}(\mathscr{Y})),$$

donc si $\overline{f}$ est pleinement fidèle cette application est bien bijective. Réciproquement, si $\mathscr{X} = (X_j)_{j\in J}$ et $\mathscr{Y} = (Y_i)_{i\in I}$ sont deux ind-objets quelconques de E, alors l'application $u : \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) \to \mathrm{Hom}(\overline{f}(\mathscr{X}), \overline{f}(\mathscr{Y}))$ est la limite projective sur j des 94 applications $u_j : \mathrm{Hom}(\mathscr{X}_j, \mathscr{Y}) \to \mathrm{Hom}(\overline{f}(\mathscr{X}_j), \mathscr{Y})$, où $\mathscr{X}_j$ est le ind-objet constant de valeur X_j ; donc u est bijective si les u_j le sont, et (i) implique donc que $\overline{f}$ est pleinement fidèle.

b) Supposons (i), (ii), (iii) vérifiées, et prouvons que $\overline{f}$ est une équivalence. Il reste à prouver qu'il est essentiellement surjectif, donc que tout $X \in \mathrm{ob}\, E$ est dans l'image essentielle. Or l'hypothèse (ii) signifie que $\varinjlim_{C_{/X}} Z \to X$ est un isomorphisme, et (iii) que la catégorie $C_{/X}$ est filtrante et essentiellement petite, donc X est l'image du ind-objet de E défini par le foncteur naturel $C_{/X} \to E$. Inversement, supposons que $\overline{f}$ est une équivalence, donc en vertu de a), il reste à vérifier (ii) et (iii). On peut supposer que $E = \mathrm{Ind}(C)$, C étant identifiée à la sous-catégorie $c(C)$ de E. Mais on sait (8.3.3 (ii)) que pour tout $X \in \mathrm{Ind}(C)$, identifié si on le désire au foncteur F sur C° qu'il ind-représente, $C_{/X} = C_{/F}$ est une catégorie filtrante essentiellement petite (ce qui prouve (iii)) et que la limite inductive dans $\widehat{C}$ du foncteur $C_{/F} \to \widehat{C}$ est F. A fortiori, il en est ainsi dans la sous-catégorie pleine E de $\widehat{C}$, puisque $F = X$ est dans E, ce qui prouve (ii). Reste à prouver la dernière assertion de b). Or l'hypothèse faite sur C implique évidemment que dans la catégorie $C_{/X}$, les limites inductives finies sont représentables, *a fortiori* la catégorie $C_{/X}$ est filtrante.

Remarque 8.7.5.2. — Le raisonnement qu'on vient de faire montre plus généralement que 95
lorsque la condition (i) est vérifiée, alors l'image essentielle du foncteur pleinement fidèle $\overline{f}$ (8.7.4.2) est formée des $X \in \mathrm{ob}\, E$ tels que la catégorie $C_{/X}$ soit filtrante et essentiellement petite (condition automatiquement satisfaite si C satisfait les conditions énoncées à la fin de b)), *et* que la limite inductive du foncteur canonique $C_{/X} \to E$ soit X.

Corollaire 8.7.6. — *Soit E_{PF} la sous-catégorie pleine de E formée des objets satisfaisant la condition (PF) de 8.7.5 a). Alors pour tout foncteur $J \to E_{PF}$, J une catégorie finie, qui admet une limite inductive X dans E, on a $X \in \mathrm{ob}\, E_{PF}$. Le foncteur canonique $(X_i)_{i\in I} \to \varinjlim_{i} {}_E X_i$ déduit de l'inclusion $g : E_{PF} \hookrightarrow E$*

$$\overline{g} : \mathrm{Ind}(E_{PF}) \longrightarrow E \tag{8.7.6.1}$$

est pleinement fidèle, et si dans E les limites inductives finies sont représentables et si E_{PF} est équivalente à une petite catégorie, alors l'image essentielle du foncteur $\overline{f}$ est formée des objets X de E tels que le morphisme canonique $\varinjlim_{(E_{PF})_{/X}} Y \to X$ soit un isomorphisme. Si on suppose de plus que la sous-catégorie E_{PF} de E est génératrice par épimorphismes stricts (7.1), alors le foncteur (8.7.6.1) est une équivalence de catégories.

Tous les faits sont évidents, dans l'ordre où ils sont donnés, compte tenu de 8.7.5, en utilisant 2.8 pour la première assertion.

96 ***Corollaire 8.7.7.*** — *Supposons que dans E les limites inductives finies soient représentables. Soit C une sous-catégorie pleine de E, équivalente à une petite catégorie, et considérons le foncteur* $(X_i)_{i\in I} \to \varinjlim_{i} {}_E X_i$ *:*

$$\overline{f} : \mathrm{Ind}(C) \to E. \tag{8.7.7.1}$$

Soit E_{PF} comme dans 8.7.6. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le foncteur $\overline{f} : \mathrm{Ind}(C) \to E$ est une équivalence.*

(ii) *La catégorie C dans E est génératrice par épimorphismes stricts, contenue dans E_{PF}, et tout objet de E_{PF} est isomorphe dans E (ou dans E_{PF}, cela revient au même (8.7.6)) à un facteur direct d'un objet de C.*

Lorsque la sous-catégorie C de E est stable par facteurs directs (10.6), les conditions précédentes équivalent encore aux suivantes :

(ii bis) *$C = E_{PF}$, et C est génératrice dans E par épimorphisme stricts.*

(iii) *La sous-catégorie C de E est génératrice par épimorphismes stricts, contenue dans E_{PF}, et les limites inductives finies y sont représentables.*

Lorsque de plus dans E les limites inductives finies sont représentables, ces conditions équivalent aussi à

(iii bis) *La sous-catégorie C de E est génératrice par épimorphismes stricts, contenue dans E_{PF}, et stable dans E par limites inductives finies (ou ce qui revient au même, par sommes finies, et par conoyaux de doubles flèches).*

97 On sait déjà (8.7.5) que la condition (i) implique que $C \subset E_{PF}$, et que C est génératrice par épimorphismes stricts ; prouvons aussi qu'alors tout objet X de E_{PF} est isomorphe à un facteur direct d'un objet de C. En effet on sait que X est une limite inductive filtrante $\varinjlim_i X_i$ dans E d'objets de C, et par définition de E_{PF}, on voit que pour i convenable l'homomorphisme canonique $X_i \to X$ admet un inverse à gauche, de sorte que X est bien facteur direct de l'objet X_i de C. Cela prouve que (i) ⇒ (ii) (sans hypothèse sur C ni E, d'ailleurs). Prouvons (ii) ⇒ (i). Comme C est équivalente à une petite catégorie et tout objet de E_{PF} est facteur direct d'un objet de C, on voit que E_{PF} est également équivalente à une petite catégorie, donc en vertu de 8.7.6 le foncteur (8.7.6.1) est une équivalence de catégories, et on conclut grâce à 8.6.4 b) appliqué à l'inclusion $E \hookrightarrow E_{PF}$.

Lorsque tout facteur direct dans E d'un objet de C est dans C, il est clair que (ii) ⇔ (ii bis). D'autre part (ii bis) implique (iii) resp. (iii bis) en vertu de 8.7.6. Enfin, (iii) (et *a fortiori* (iii bis)) implique (i) en vertu de 8.7.5. Cela achève la démonstration.

Exercice 8.7.8. — (*Enveloppes de Karoubi*). Soient C une $\mathscr{U}$-catégorie, $E = \mathrm{Ind}(C)$, et $E_{PF} \supset C$ la sous-catégorie pleine de E définie dans 8.7.6.

a) Prouver que dans E_{PF} les images de projecteurs sont représentables, et que tout objet de E_{PF} est facteur direct d'un objet de C.

b) Appelons *karoubienne* une catégorie F dans laquelle les images de projecteurs sont représentables. Soit alors

$$\varphi : C \longrightarrow K$$

un foncteur pleinement fidèle, tel que K soit karoubienne et que tout objet de K soit 98
facteur direct d'un objet de l'image de C. Prouver que φ est 2-*universel* parmi les foncteurs de C à valeurs dans des catégories karoubiennes, de façon précise : pour toute catégorie karoubienne F, le foncteur

$$g \longmapsto g \circ \varphi : \mathbf{Hom}(K, F) \longrightarrow \mathbf{Hom}(K, F)$$

est une équivalence de catégories. (On utilisera le fait que tout foncteur commute aux images de projecteurs.) La catégorie K munie de φ, déterminée à équivalence près (elle-même déterminée à isomorphisme unique près) par les propriétés précédentes, s'appelle l'*enveloppe de Karoubi* $\widetilde{C}$ de C. (Comparer aussi IV 7.5.)

c) Déduire de a) et b) que $\mathrm{Ind}(C)_{PF}$, munie du foncteur $C \to \mathrm{Ind}(C)_{PF}$ induit par $c : C \to \mathrm{Ind}(C)$, fait de $\mathrm{Ind}(C)_{PF}$ une enveloppe de Karoubi de C.

d) Montrer que tout foncteur $f : C \to C'$ se prolonge de façon essentiellement unique en un foncteur $\widetilde{f} : \widetilde{C} \to \widetilde{C'}$ des enveloppes de Karoubi, et que si on prend ces enveloppes de Karoubi comme dans c), $\widetilde{f}$ est le foncteur induit par $\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \to \mathrm{Ind}(C')$. Montrer que les conditions de 8.5.4 b) équivalent encore à la suivante : $\widetilde{f}$ est une équivalence de catégories.

Exercice 8.7.9. — Soit E une $\mathcal{U}$-catégorie.

a) Montrer que les conditions sont équivalentes :
   (i) E est équivalente à une catégorie de la forme $\mathrm{Ind}(C)$, avec C une $\mathcal{U}$-catégorie.
   (i bis) Comme (i), avec de plus C karoubienne (8.7.8 b)). 99
   (ii) La sous-catégorie E_{PF} de E (8.7.6) est génératrice par épimorphismes stricts, et pour tout objet X de E, $(E_{PF})_{/X}$ est une catégorie filtrante essentiellement petite.

   Montrer que si C est une $\mathcal{U}$-catégorie *karoubienne* telle que E soit équivalente à $\mathrm{Ind}(C)$, alors C est équivalente à E_{PF} (par une équivalence déterminée à isomorphisme unique près). Établir une 2-équivalence entre la 2-catégorie formée des catégories E satisfaisant aux conditions précédentes et les foncteurs entre icelles *commutant aux petites limites inductives filtrantes,* et la 2-catégorie formée des $\mathcal{U}$-catégories *karoubiennes* et les foncteurs quelconques entre icelles.

b) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) E est équivalente à une catégorie de la forme $\mathrm{Ind}(C)$, où C est une $\mathcal{U}$-catégorie où les limites inductives finies sont représentables.
   (i bis) Comme (i), mais avec de plus C karoubienne.
   (ii) Les limites inductives finies dans E sont représentables, la sous-catégorie E_{PF} de E est génératrice par épimorphismes stricts, et pour tout objet X de E, il existe une petite partie I de $\mathrm{Ob}\, E_{PF/X}$ telle que tout objet de $E_{PF/X}$ soit majoré par un objet de I. (Utiliser 8.9.5 b).)

100

8.8. Représentation indicielle d'un foncteur $J \to \mathrm{Ind}(C)$. —

8.8.1. — Soit

$$\varphi : J \longrightarrow \mathrm{Ind}(C) \text{ i.e. } \varphi \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Hom}(J, \mathrm{Ind}(C))$$

un foncteur, C étant une $\mathscr{U}$-catégorie. Rappelons (8.5.4) qu'une *représentation indicielle de* φ est par définition un ind-objet de $\mathbf{Hom}(J, C)$

$$\psi : I \longrightarrow \mathbf{Hom}(J, C),$$

I catégorie filtrante essentiellement petite, dont la limite inductive dans $\mathbf{Hom}(J, \mathrm{Ind}(C))$ soit isomorphe à φ par un isomorphisme donné. Donc φ admet une représentation indicielle si et seulement si il est isomorphe à une limite inductive filtrante essentiellement petite dans $\mathbf{Hom}(J, \mathrm{Ind}(C))$ d'objets de la sous-catégorie pleine $\mathbf{Hom}(J, C)$. Nous dirons que la catégorie J est *admissible pour* C si tout foncteur $\varphi : J \to \mathrm{Ind}(C)$ admet une représentation indicielle.

Comme dans $\mathrm{Ind}(C)$ les petites limites inductives filtrantes sont représentables (8.5.1), il en est de même dans $\mathbf{Hom}(J, \mathrm{Ind}(C))$, et elles se calculent « argument par argument ». Par suite, le foncteur d'inclusion

(8.8.1.1) $$\mathbf{Hom}(J, C) \hookrightarrow \mathbf{Hom}(J, \mathrm{Ind}(C))$$

se prolonge canoniquement en un foncteur

(8.8.1.2) $$\mathrm{Ind}(\mathbf{Hom}(J, C)) \longrightarrow \mathbf{Hom}(J, \mathrm{Ind}(C))$$

(8.7.2). Les éléments de l'image essentielle de ce foncteur sont alors précisément les φ admettant une représentation indicielle ; donc dire que J est admissible pour C signifie aussi que le foncteur (8.8.1.2) est essentiellement surjectif. Signalons à ce propos :

101 ***Proposition 8.8.2***. — *Si la catégorie J est équivalente à une catégorie finie, le foncteur canonique* (8.8.1.2) *est pleinement fidèle ; donc J est admissible pour C si et seulement si c'est une équivalence de catégories.*

En vertu de 8.7.5 a) tout revient à prouver que pour tout petit système inductif filtrant $(\varphi_i)_{i\in I}$ dans $\mathbf{Hom}(J, C)$ et tout objet φ de $\mathbf{Hom}(C, J)$, l'application canonique

(8.8.2.1) $$\varinjlim_i \mathrm{Hom}(\varphi, \varphi_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\varphi, \varinjlim_i \varphi_i)$$

est bijective, où $\varinjlim_i \varphi_i$ désigne la limite inductive prise dans $\mathrm{Hom}(J, \mathrm{Ind}(C))$. Or, si φ, ψ sont deux foncteurs $J \to C$, on a un diagramme exact d'ensembles, fonctoriel en φ et ψ :

$$\mathrm{Hom}(\varphi, \psi) \longrightarrow \prod_{X \in \mathrm{Ob}\, J} \mathrm{Hom}(\varphi(X), \psi(X)) \rightrightarrows \prod_{\substack{f \in F\ell J \\ f : X \to Y}} \mathrm{Hom}(\varphi(X), \psi(Y)).$$

Comme les limites inductives filtrantes commutent aux noyaux de doubles flèches et aux produits finis, la bijectivité de (8.8.2.1) s'ensuit quand J est finie. Le cas où J est équivalente à une catégorie finie se ramène aussitôt au cas précédent.

Proposition 8.8.3. — *Soit $\varphi : J \to \mathrm{Ind}(C)$ un foncteur, avec J équivalente à une petite catégorie. Pour que φ admette une représentation indicielle, il suffit qu'il satisfasse aux deux conditions suivantes, et cela est également nécessaire lorsque J est équivalente à une catégorie finie :*

a) *La catégorie $\mathbf{Hom}(J, C)_{/\varphi}$ (formée des flèches de $\mathbf{Hom}(J, \mathrm{Ind}(C))$ de but φ et de source dans $\mathrm{Hom}(J, C)$) est filtrante.*

102 b) *Pour tout objet j de $\boldsymbol{J}$, le foncteur*

$$\psi \longmapsto \psi(j) \,:\, \mathbf{Hom}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C})_{/\varphi} \longrightarrow \boldsymbol{C}_{/\varphi(j)} \tag{8.8.3.1}$$

est cofinal. i.e. satisfaisant aux conditions F 1), F 2) *de* 8.1.3.

Démonstration. Supposons a) et b) vérifiées, prouvons que φ admet une représentation indicielle. On peut supposer évidemment $\boldsymbol{J}$ petite. Soit

$$\boldsymbol{I} = \mathbf{Hom}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C})_{/\varphi}, \tag{8.8.3.2}$$

qui est une catégorie filtrante par hypothèse, et supposons d'abord $\boldsymbol{I}$ essentiellement petite, de sorte que « l'inclusion » de $\boldsymbol{I}$ dans $\mathbf{Hom}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C})$ définit un ind-objet de $\mathbf{Hom}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C})$, $i \mapsto \psi_i$. De plus, on a un homomorphisme canonique

$$\varinjlim_{i} \psi_i \longrightarrow \varphi, \tag{8.8.3.3}$$

donné argument par argument par l'homomorphisme

$$\varinjlim_{\boldsymbol{I}} \psi_i(j) \longrightarrow \varphi(j) = \varinjlim_{\boldsymbol{C}_{/\varphi(j)}} X$$

déduit du foncteur (8.8.3.1). Comme ce dernier est cofinal, on en conclut que (8.8.3.3) est un isomorphisme, d'où la conclusion. Dans le cas où on ne suppose pas $\boldsymbol{I}$ essentiellement petite, il suffit de construire une sous-catégorie pleine essentiellement petite $\boldsymbol{I}'$, telle que (8.8.3.3) reste un isomorphisme en prenant $\varinjlim_{\boldsymbol{I}'}$ au lieu de $\varinjlim_{\boldsymbol{I}}$. Pour ceci, il suffit que les foncteurs composés

$$\boldsymbol{I}' \longrightarrow \boldsymbol{I} \longrightarrow \boldsymbol{C}_{/\varphi(j)}$$

induits par les foncteurs (8.8.3.1) soient tous cofinaux. On conclut alors par le lemme suivant, 103
dont la démonstration est immédiate grâce au critère (8.1.3 b)), et est laissée au lecteur :

Lemme 8.8.3.4. — *Soient $\boldsymbol{I}$ une $\mathcal{U}$-catégorie filtrante, et*

$$f_j \,:\, \boldsymbol{I} \longrightarrow \boldsymbol{I}_j \quad (j \in \boldsymbol{J})$$

une petite famille de foncteur cofinaux de $\boldsymbol{I}$ dans des catégories filtrantes essentiellement petites. Alors il existe une sous-catégorie pleine $\boldsymbol{I}'$ de $\boldsymbol{I}$ qui est filtrante et essentiellement petite, et telle que les foncteurs induits par les f_j soient cofinaux.

Prouvons enfin la nécessité dans 8.8.3 lorsqu'on suppose $\boldsymbol{J}$ équivalente à une catégorie finie. Une représentation indicielle de φ à l'aide d'une catégorie d'indices filtrante essentiellement petite $\boldsymbol{I}$ définit un foncteur ψ

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{I} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, dashed, "\psi_j"'] & \mathbf{Hom}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C})_{/\varphi} \arrow[d, dashed] \\ & \boldsymbol{C}_{/\varphi(j)} \end{tikzcd} \quad , \tag{8.8.3.5}$$

et il suffit de prouver que ψ et chacun des foncteurs ψ_j qui s'en déduit sont cofinaux : en vertu de 8.1.3 b) il s'ensuivra bien que $\mathbf{Hom}(J, C)_{/\varphi}$ est filtrante, et par définition 8.1.1 que la flèche verticale de (8.8.3.5) est également cofinale. En vertu de 8.8.2 on peut identifier φ à un objet de $\mathrm{Ind}(E)$, où $E = \mathbf{Hom}(J, C)$, et le fait que le foncteur

$$\psi : I \longrightarrow E_{/\varphi},$$

104 déduit de ind-objet φ de E indexé par I, est cofinal est un fait général, qui se vérifie immédiatement à l'aide des critères (F 1) et (F 2) de 8.1.3. La même raison (où E, φ sont remplacés par C, $\varphi(j)$) montre que ψ_j est cofinal, ce qui achève la démonstration.

Remarque 8.8.4. — a) Dans le cas où J est équivalente à une catégorie finie, si φ admet une représentation indicielle, on a vu que (8.8.3.5) est un foncteur cofinal, ce qui implique que la catégorie $\mathbf{Hom}(J, C)_{/\varphi}$ est elle-même essentiellement petite.

b) Supposons que dans C les limites inductives finies soient représentables. Alors il en est de même dans $E = \mathbf{Hom}(J, C)$, et celles-ci se calculent argument par argument, et ce sont également des limites inductives dans $\mathbf{Hom}(J, \widehat{C})$ et *a fortiori* dans $\mathbf{Hom}(J, \mathrm{Ind}(C))$. Il s'ensuit aussitôt que la condition a) de 8.8.3 est alors automatiquement satisfaite, et tout revient à regarder la condition b). J'ignore si elle est automatiquement satisfaite lorsque de plus J est supposée petite.

Nous en arrivons au résultat principal du présent numéro :

Proposition 8.8.5. — *Soit J une catégorie équivalente à une catégorie finie, et supposons de plus J rigide i.e. que pour tout $j \in \mathrm{Ob}\, J$, tout endomorphisme de j soit l'identité. Alors J est admissible pour C (quelle que soit la $\mathcal{U}$-catégorie C), i.e. tout foncteur $J \to \mathrm{Ind}(C)$ admet une représentation indicielle.*

105 Quitte à remplacer J par une catégorie équivalente, nous pouvons supposer que J est *réduite* i.e. que deux objets isomorphes de J sont identiques. Alors J est même finie. Nous procédons par récurrence sur $\mathrm{card}\, \mathrm{Ob}\, J$, le cas où ce nombre est ≤ 0 étant trivial ; nous le supposerons donc ≥ 1. Soit $j_\circ$ un objet *maximal* de J, i.e. tel que pour toute flèche $j_\circ \to j$, il existe une flèche $j \to j_\circ$; compte tenu du fait que J est rigide, cela implique que $j_\circ \to j$ est un isomorphisme, et comme J est réduite, cela implique $j_\circ = j$. Soit donc J' la sous-catégorie pleine déduite de J en lui enlevant l'objet $j_\circ$, et J'' la sous-catégorie pleine réduite à l'objet $j_\circ$. La proposition résulte alors du

Lemme 8.8.5.1. — *Soient J une catégorie finie, J' et J'' deux sous-catégories pleine telles que $\mathrm{Ob}\, J = \mathrm{Ob}\, J' \cup \mathrm{Ob}\, J''$, et que pour tout $j' \in \mathrm{Ob}\, J'$ et $J'' \in \mathrm{Ob}\, J''$, on ait $\mathrm{Hom}(j'', j') = \varnothing$. Si J' et J'' sont admissibles pour C, il en est de même de J.*

Tout revient à prouver les critères a) et b) de 8.8.3, ce qui revient à faire six vérifications élémentaires, savoir les deux dernières conditions des catégories filtrantes pour $\mathbf{Hom}(J, C)_{/\varphi}$, et les conditions F 1) et F 2) pour les foncteurs (8.8.3.1), dans le cas $j \in \mathrm{Ob}\, J'$ et $j \in \mathrm{Ob}\, J''$ successivement ; ces dernières conditions impliquant d'ailleurs que $\mathbf{Hom}(J, C)_{/\varphi}$ est non vide. La vérification assez fastidieuse n'offre pas de difficulté, et est laissée au lecteur. (Le rédacteur a vainement cherché une démonstration élégante qui court-circuiterait ces déplaisantes vérifications.)

Exercice 8.8.6. — a) Soient J, J' deux catégories admissibles pour C, l'une d'elles étant **106**
finie. Prouver que $J \times J'$ est admissible pour C. (Utiliser 8.8.2.)

b) Prouver qu'une petite catégorie discrète est admissible pour toute catégorie C.

c) Soit J une catégorie satisfaisant les conditions suivantes : (i) J est rigide, (ii) $\mathrm{Ob}\, J$ est dénombrable, (iii) Pour deux objets quelconques j, j' de J, $\mathrm{Hom}(j, j')$ est fini, (iv) Pour tout objet j de J, l'ensemble des objets de J qui sont majorés par j i.e. qui sont source d'une flèche de but j, est fini. Montrer que J est admissible pour toute $\mathcal{U}$-catégorie C. (Montrer d'abord qu'on peut écrire J comme réunion filtrante de sous-catégories pleines finies J_n, telles que tout objet de J majoré par un objet de J_n soit dans J_n. Vérifier ensuite les critères a), b) de 8.8.3.)

Exercice 8.8.7. — Nous identifions dans les notations un ensemble ordonné et la catégorie qu'il définit.

a) Soit C un ensemble ordonné. Soit $C^{\sim}$ l'ensemble des parties A de C qui sont filtrantes et telles que $x \in A$ et $y \leq x$ implique $y \in A$. Soit $L_\circ : C \to C^{\sim}$ l'application qui associe à tout $x \in C$ l'ensemble $L_\circ(x)$ des $y \in A$ tels que $y \leq x$. Montrer que L est une application injective et que l'ordre de C est induit par celui de $C^{\sim}$. Pour tout $A \in C^{\sim}$, considérons l'inclusion $f(A) : A \to C$, c'est un ind-objet de C ; pour tout ind-objet $\varphi : I \to C$ de C, soit $g(\varphi) \in C^{\sim}$ la partie de C formée des éléments
de C majorés par un élément de la forme $\varphi(i)$. Montrer qu'on obtient ainsi deux **107**
équivalences quasi-inverses l'une de l'autre

$$\mathrm{Ind}(C) \overset{f,g}{\underset{}{\xleftrightarrow{\ \approx\ }}} C^{\sim},$$

transformant le foncteur $L_\circ$ en le foncteur canonique $L : C \to \mathrm{Ind}(C)$.

b) Supposons que pour tout $x \in C$, l'ensemble des éléments majorant (resp. minorant) x est fini. Montrer que tout ind-objet (resp. pro-objet) de C est essentiellement constant, et même que pour tout tel $\varphi : I \to C$ (resp. $\varphi : I^\circ \to C$) il existe un $i_\circ \in \mathrm{Ob}\, I$ tel que le foncteur induit sur $I_{/i_\circ}$ soit constant (i.e. transforme toute flèche en un isomorphisme).

c) Prenons $C \subset \mathbf{N}^\circ \times \mathbf{N}$ formé des couples d'entiers naturels (j, i) tels que $i \geq j$. Montrer que $\mathbf{N}^{\sim}$ est isomorphe à l'ensemble ordonné déduit de $\mathbf{N}$ (identifié à un sous-ensemble ordonné de $\mathbf{N}^{\sim}$ comme dans a)) en lui ajoutant un plus grand élément ∞. Montrer que $C^{\sim}$ est isomorphe à $\mathbf{N}^\circ \times \mathbf{N}^{\sim}$. Considérons le foncteur

$$\varphi : \mathbf{N}^\circ \longrightarrow C^{\sim} \quad , \quad \varphi(j) = (j, \infty).$$

Montrer que :

1) la limite projective de φ n'est pas représentable dans $C^{\sim}$, bien que les limites projectives filtrantes dans C soient représentables (et soient essentiellement constantes, en vertu de b)).

2) Pour tout foncteur $\psi : \mathbf{N}^\circ \to C$, on a $\mathrm{Hom}(\psi, \varphi) = \varnothing$, et *a fortiori* le foncteur φ n'admet pas de représentation sous forme indicielle.

Exercice 8.8.8. — Soient $X = \mathbf{N} \amalg \mathbf{N}$ l'ensemble somme de deux copies de $\mathbf{N}$, s la symétrie **108**
de X, et pour tout $i \in \mathbf{N}$, soit X_i la partie $\Delta_{i+1} \amalg \Delta_i$ de $\mathbf{N}$ (où Δ_i désigne la partie de $\mathbf{N}$

formée des j tels que $j \leq i$). Soit C la sous-catégorie de la catégorie des sous-ensembles de X, dont les objets sont les X_i, et les flèches les applications entre des X_i qui sont induites par l'identité de X ou par sa symétrie s, et $C^{\sim}$ la catégorie définie de façon analogue, mais où on admet de plus l'objet X.

a) Montrer que $\mathrm{Ind}(C)$ est équivalente à $C^{\sim}$, le foncteur canonique $C \to \mathrm{Ind}(C)$ correspondant à l'inclusion $C \to C^{\sim}$. Montrer qu'il n'existe pas de couple (Y, f) d'un objet Y de C et d'un endomorphisme f de Y, et de morphisme d'objets à endomorphisme de $\mathrm{Ind}(C)$ de (Y, f) dans (X, s).

b) En conclure que si J est la catégorie ayant un seul objet, et en plus de la flèche identique une seule flèche d'ordre 2, alors le foncteur $J \to \mathrm{Ind}(C)$ défini par (X, s) n'admet pas de représentation indicielle.

8.9. Propriétés d'exactitude de $\mathrm{Ind}(C)$. —

Proposition 8.9.1. — *Soit C une $\mathcal{U}$-catégorie.*

a) *Les foncteurs canoniques L (8.2.4.8) et c (8.4.1)*

$$C \xrightarrow{c} \mathrm{Ind}(C) \xrightarrow{L} \widehat{C}$$

commutent aux limites projectives.

b) *Supposons que dans C les limites inductives finies soient représentables, et que C soit équivalente à une petite catégorie. Alors dans $\mathrm{Ind}(C)$ les petites limites projectives sont représentables.*

109 c) *Si dans C les petites limites projectives (resp. les limites projectives finies) sont représentables, alors il en est de même dans $\mathrm{Ind}(C)$. Soit J une catégorie qui est finie et rigide, ou discrète ; si les limites projectives de type J sont représentables dans C, ce même type de limites projectives est représentables dans $\mathrm{Ind}(C)$.*

d) *Les petites limites inductives filtrantes dans $\mathrm{Ind}(C)$ (elles sont représentables en vertu de 8.5.1) sont exacts à gauche, i.e. commutent aux limites projectives finies.*

Démonstration.

a) Le fait que L commute aux limites projectives résulte du fait qu'il est pleinement fidèle et du calcul des limites projectives dans $\widehat{C}$ « argument par argument », qui implique que pour vérifier qu'un système projectif de morphismes $F \to F_i$ ($i \in I$) dans $\widehat{C}$ fait de F une limite projective des F_i, il suffit de vérifier que l'assertion analogue est vraie pour les systèmes projectifs d'applications ensemblistes $\mathrm{Hom}(X, F) \to \mathrm{Hom}(X, F_i)$, pour tout $X \in \mathrm{Ob}\, C$. Or $C \subset \mathrm{Ind}(C)$.

Le fait que c commute aux limites projectives résulte formellement du fait que L y commute, ainsi que le composé $L \circ c : C \to \widehat{C}$.

b) Compte tenu de a), l'assertion revient à dire que toute limite projective de préfaisceaux ind-représentables est ind-représentable, ce qui résulte aussitôt du critère 8.3.3 (v), compte tenu qu'une limite projective de foncteurs exacts à gauche est exact à gauche (ce qui résulte du fait que « les limites projectives commutent aux limites projectives » (2.5.0)).

110 c) Résulte formellement de la propriété analogue de $\widehat{C}$ (3.3), et du fait que L est conservatif (étant pleinement fidèle) et commute aux limites du type envisagé (a) et 8.5.1).

d) Il est bien connu (cf. 2.3) que la représentabilité des limites projectives finies équivaut à celle des limites projectives des types

$$\text{vide}\,,\dots,\quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dl] \\ & \bullet & \end{tikzcd}$$

(correspondants à des ensembles ordonnés finis particuliers), et celle des petites limites projectives revient à celle des produits et des limites projectives finies. Donc la deuxième assertion faite dans (c) implique la première.

Supposons d'abord I fini. Utilisant le résultat 8.8.5 sur la représentabilité des foncteurs $\varphi : J \to \mathrm{Ind}(C)$ sous forme indicielle (8.5.4)

$$\phi : J \times I \longrightarrow C, \tag{8.9.1.1}$$

l'existence des $\varprojlim \varphi$ est donc un cas particulier du résultat plus précis et plus général :

Corollaire 8.9.2. — *Considérons un foncteur $\varphi : J \to \mathrm{Ind}(C)$ donné sous forme indicielle Φ (8.9.1.1), J étant une catégorie finie. Si pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$, le foncteur partiel $j \to \Phi(j,i)$ a une limite projective (resp. inductive) représentable dans C, alors φ a une limite projective (resp. inductive) représentable dans* $\mathrm{Ind}(C)$, *et on a un isomorphisme canonique*

$$\varprojlim \varphi \simeq «\varinjlim_i» \varprojlim_j \Phi(j,i) \tag{8.9.2.1}$$

(resp. 111

$$\varinjlim \varphi \simeq «\varinjlim_i» \varprojlim_j \Phi(j,i)), \tag{8.9.2.2}$$

où $\varprojlim_j$ (resp. . $\varinjlim_j$) est calculé dans C.

Pour la première formule, on utilise simplement que dans $\mathrm{Ind}(C)$ les limites inductives filtrantes commutent à $\varprojlim_j$, et que c commute à $\varprojlim_J$ (8.9.1 d) et a)) :

$$\varprojlim \varphi = \varprojlim_j «\varinjlim_i» \Phi(j,i) \xleftarrow{\sim} «\varinjlim_i» \varprojlim_j{}^{\mathrm{Ind}(C)} \Phi(j,i) \simeq «\varinjlim_i» \varprojlim_j{}^{C} \Phi(j,i).$$

La seconde se prouve de même, en utilisant la commutation des limites inductives de type I aux limites inductives de type J (2.5.0) et le fait que c commute aux limites inductives de type J, prouvé dans 8.9.4 a) ci-dessous.

Cas J discret. Ce cas est contenu dans l'assertion plus précise suivante :

Corollaire 8.9.3. — *Soient I_α des catégories filtrantes essentiellement petites indexées par un petit ensemble A, et pour tout $\alpha \in A$, soit $X(\alpha) = (X(\alpha)_{i_\alpha})_{i_\alpha \in I_\alpha}$ un ind-objet de C indexé par I_α. Soit I la catégorie produit des I_α, et supposons que pour tout $i = (i_\alpha)_{\alpha \in A} \in I$, le produit $\prod_{\alpha \in A} X(\alpha)_{i_\alpha}$ soit représentable dans C. Alors le produit $\prod_{\alpha\in A} X(\alpha)$ est représentable dans* $\mathrm{Ind}(C)$, *et il est canoniquement isomorphe à l'ind-objet indexé par I donné par la formule*

$$\prod_{\alpha\in A} «\varinjlim_{i_\alpha \in I_\alpha}» X(\alpha)_{i_\alpha} \simeq «\varinjlim_{i=(i_\alpha)_{\alpha\in A}\in I}» \left(\prod_{\alpha\in A} A(\alpha)_{i_\alpha} \right), \tag{8.9.3.1}$$

où le produit du deuxième membre est le produit calculé dans C. (On notera que I est filtrant 112 *et essentiellement petit, les I_α l'étant.)*

En effet, il et bien connu (et immédiat par réduction au cas où on travaille dans la catégorie des ensembles) que la formule envisagée est valable quand on calcule les limites dans $\widehat{C}$. La conclusion résulte alors du fait que L commute aux limites envisagées (8.9.1 a) et 8.5.1).

Remarques 8.9.4. — La démonstration donnée de 8.9.2, 8.9.3 montre, plus généralement, que si pour tout $i \in \operatorname{Ob} I$, $\varprojlim_j \Phi(j,i)$ (resp. $\varinjlim_j \Phi(j,i)$) *calculé dans* $\operatorname{Ind}(C)$ est représentable, alors il en est de même de $\varprojlim_i \varphi$ (resp. de $\varinjlim_j \varphi$). Ceci et l'argument de c) montre que pour une catégorie donnée J provenant d'un ensemble ordonné fini ou discret (ou plus généralement, qui est C-admissible (8.3.1)), les limites projectives (resp. inductives) de type J sont représentables dans $\operatorname{Ind}(C)$ si (et seulement si) pour tout foncteur $\varphi : J \to C$, la limite projective (resp. inductive) de φ *calculée dans* $\operatorname{Ind}(C)$ est représentable. Dans le cas non respé, cela signifie aussi, en vertu de (a), que toute limite projective de type J de préfaisceaux représentables sur C est ind-représentable.

Proposition 8.9.5. — *Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie.*

a) *Le foncteur canonique*

$$c : C \longrightarrow \operatorname{Ind}(C)$$

est exact à droite (donc exact, compte tenu de 8.9.1 a)*).*

b) *Si les limites inductives finies (resp. les sommes finies) sont représentables dans C, alors les petites limites inductives (resp. les petites sommes) sont représentables dans* $\operatorname{Ind}(C)$*.*
113 *Soit J un ensemble préordonné fini ou discret ; si les limites inductives de type J sont représentables dans C, il en est de même dans* $\operatorname{Ind}(C)$*.*

Démonstration.

a) Supposons que dans C on ait $X \simeq \varinjlim_J X_j$, où J est une catégorie finie, X et les X_j dans C. On a alors, pour tout ind-objet $\mathscr{Y} = (Y_i)_{i\in I}$ de C :

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(X,\mathscr{Y}) &\simeq \varinjlim_i \operatorname{Hom}(X,Y_i) \simeq \varinjlim_i \varprojlim_j \operatorname{Hom}(X_j,Y_i) \\ &\overset{2.8}{\simeq} \varprojlim_j \varinjlim_i \operatorname{Hom}(X_j,Y_i) \simeq \varprojlim_j \operatorname{Hom}(X_j,\mathscr{Y}), \end{aligned}$$

et la conclusion voulue résulte de la comparaison des termes extrêmes.

b) On a déjà noté dans 8.8.4 que les assertions faites résultent de a) et de 8.9.2, du moins pour les limites inductives finies. Pour prouver les conclusions faites dans les cas infinis, on est ramené au cas des sommes, qui peut s'interpréter comme une limite inductive filtrante de sommes finies, et on conclut donc grâce à 8.5.1.

Remarque 8.9.6. — On a déjà observé que la foncteur c ne commute pas en général aux limites inductives filtrantes, donc pas non plus aux sommes infinies, contrairement à ce qui a lieu pour $L : \operatorname{Ind}(C) \to \widehat{C}$. Par contre, à l'exception de la commutation aux limites inductives *filtrantes* (8.5.1), L n'a pratiquement jamais de propriétés de commutation à quelque autre type de limites inductives (objet initial, somme de deux objets conoyaux de doubles flèches). Ainsi, si C admet un objet initial $\varnothing_C$, qui est donc objet initial de $\operatorname{Ind}(C)$ en vertu de a), $\varnothing_C$ n'est jamais objet initial de $\widehat{C}$ (i.e. identique au préfaisceau constant de valeur $\varnothing$), puisque $\mathrm{Hom}(\varnothing_C, \varnothing_C) \neq \varnothing$!

Proposition 8.9.7. — *Soit* 114

$$f : C \longrightarrow C'$$

un foncteur entre $\mathcal{U}$*-catégories, et soit* J *une catégorie finie et rigide* (8.8.5)*. Si les limites inductives (resp. projectives) de type* J *sont représentables dans* C *et si* f *y commute, alors* $\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \to \mathrm{Ind}(C')$ *commute également à ce type de limites.*

Cela résulte aussitôt de 8.8.5 et du calcul 8.9.2 des limites finies dans une catégorie de ind-objets, pour un foncteur représenté sous forme indicielle.

Corollaire 8.9.8. — *Si dans* C *les limites inductives (resp. projectives) finies sont représentables, et si* f *est exact à droite (resp. à gauche) alors il en est de même de* $\mathrm{Ind}(f)$ *; dans le cas non respé,* $\mathrm{Ind}(f)$ *commute même aux petites limites inductives quelconques.*

La première assertion résulte de 8.9.7. La deuxième résulte de la première, compte tenu que $\mathrm{Ind}(f)$ commute aux limites inductives filtrantes (8.6.3).

Exercice 8.9.9. — Soit C une $\mathcal{U}$-catégorie.

a) Supposons que dans C les sommes finies sont représentables. Montrer que si dans C les sommes *finies* sont disjointes (resp. universelles) (cf. II 4.5), alors dans $\mathrm{Ind}(C)$ les *petites* sommes sont disjointes (resp. universelles).
b) Supposons que dans C tout morphisme se factorise en un épimorphisme suivi d'un monomorphisme (resp. en un épimorphisme effectif suivi d'un monomorphisme, re- 115
sp. en un épimorphisme suivi d'un monomorphisme effectif, resp. un épimorphisme effectif suivi d'un monomorphisme effectif). Montrer que $\mathrm{Ind}(C)$ satisfait à la même propriété. Dans le dernier cas respé, on conclut donc que tout épimorphisme de $\mathrm{Ind}(C)$ est effectif, tout monomorphisme de $\mathrm{Ind}(C)$ est effectif, tout bimorphisme de $\mathrm{Ind}(C)$ est un isomorphisme ; montrer que dans ce cas tout épimorphisme (resp. monomorphisme) de $\mathrm{Ind}(C)$ peut se représenter par un système inductif d'épimorphismes (resp. de monomorphismes) de C. Si on suppose de plus que dans C tout épimorphisme (resp. tout monomorphisme) est *universel*, la même propriété est vraie dans $\mathrm{Ind}(C)$.
c) Supposons C additive (resp. abélienne), alors $\mathrm{Ind}(C)$ l'est également.
d) Soient $X =$ « $\varinjlim_I$ » X_i un ind-objet de C, $R \rightrightarrows X$ une relation d'équivalence dans X. Pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$, soit $R_i \rightrightarrows X_i$ la relation d'équivalence dans X_i (considéré comme objet de $\mathrm{Ind}(C)$) induite par R via $X_i \to X$. (On suppose que le produit fibré $R_i = R \times_{X_X X} X_i \times X_i$ dans $(\mathrm{Ind}(C))$ est représentable par un objet de $\mathrm{Ind}(C)$, ce qui est le cas si dans C les limites projectives finies sont représentables.) Montrer que pour que R soit effective, il suffit que les R_i le soient.
e) Soient X un objet de C, R une relation d'équivalence dans $c(X)$ i.e. dans X considéré comme objet de $\mathrm{Ind}(C)$. Supposons que dans C les produits fibrés soient représentables. Pour que R soit effective, il faut que R soit de la forme « $\varinjlim_i$ » R_i, où les R_i sont des relations d'équivalence dans X (regardé comme un objet de C), et cette condition est suffisante si on suppose que dans C les relations d'équivalence sont 116

effectives.

f) Supposons que dans C tout morphisme se factorise en un épimorphisme effectif suivi d'un monomorphisme effectif, et que les limites projectives finies soient représentables. Soit X un objet de C, et R un sous-objet de $X \times X$, regardé comme élément de $\mathrm{Ind}(C)$. Écrivons R sous la forme « $\varinjlim$ " Z_i, où $(Z_i)_{i \in I}$ est une famille filtrante croissante de sous-objets de $X \times X$ *dans* C (c'est possible grâce a b)). Montrer que pour que R soit une relation d'équivalence dans X, il faut et il suffit que pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$, existe un $j \in \mathrm{Ob}\, I$ qui contienne $s(Z_i)$ et $Z_i \circ Z_i$, où s est la symétrie de $X \times X$.

g) Supposons que dans C les limites projectives finies ainsi que les sommes finies soient représentables, que toute relation d'équivalence y soit effective, et tout morphisme s'y factorise en épimorphisme effectif suivi par un monomorphisme effectif. Montrer que dans $\mathrm{Ind}(C)$ les relations d'équivalence sont universelles si et seulement si C satisfait à la condition suivante :

   ST) Pour tout objet X de C et tout sous-objet Z de $X \times X$ dans C, si on définit par récurrence la suite de sous-objets Z_n $(n \geq 0)$ de $X \times X$ dans C par $Z_\circ = Z$, $Z_n = \mathrm{Sup}(Z_n, s(Z_n), Z_n \circ Z_n)$ (le Sup pris dans l'ensemble des sous-objets de $X \times X$, qui existe grâce aux hypothèses faites sur C), alors la suite $(Z_n)_{n \geq 0}$ est *stationnaire.*

k) Montrer que dans Ind((Ens)), les relations d'équivalence ne sont pas nécessairement effectives.

   * NB. Pour des critères pour que $\mathrm{Ind}(C)$ soit un topos, cf. VI 8.9.9.$_*$

117 ***Exercice 8.9.10.*** — Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie. Posons $\mathrm{Pro}(C) = (\mathrm{Ind}(C^\circ))^\circ$ (cf. 8.11).

a) Supposons que dans C les sommes finies (resp. les petites sommes) sont représentables. Montrer que si elles sont disjointes (cf. II 4.5), alors $\mathrm{Pro}(C)$ satisfait la même condition.

b) Soit J un petit ensemble, tel que les sommes indexées par J soient représentables dans C, donc aussi dans $\mathrm{Pro}(C)$. Soit $(X(\alpha))_{\alpha \in J}$ une famille d'éléments de $\mathrm{Pro}(C)$, avec $X(\alpha) =$ « $\varprojlim_{I_\alpha}$ » X_{i_α}. Montrer que pour que la somme des $X(\alpha)$ dans $\mathrm{Ind}(C)$ soit universelle, il suffit qu'il en soit de même pour chacune des familles $\varprojlim_J X_{i_\alpha}$, où $(i_\alpha)_{a \in I} \in \prod_{\alpha \in J} I_\alpha$. En conclure que si dans C les sommes de type J sont universelles, pour qu'il en soit de même dans $\mathrm{Pro}(C)$, il faut et il suffit que pour toute famille $(X(\alpha))_{\alpha \in J}$ comme dessus, avec $I_\alpha = I$ pour tout $\alpha \in J$, l'homomorphisme canonique dans $\mathrm{Pro}(C)$

$$\text{« }\varprojlim_{I}\text{ » } \amalg_\alpha X(\alpha)_i \longleftarrow \text{« }\varprojlim_{I^J}\text{ » } \amalg_{\alpha \in J} X(\alpha)_{i_\alpha}$$

soit un isomorphisme. En conclure que dans Pro((Ens)) les sommes de type J sont universelles si et seulement si J est fini.

Exercice 8.9.11. — Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie.

a) Soit $(X_i \to X)_{i \in I}$ une famille de morphismes dans C. Montrer que pour qu'elle soit épimorphique dans $\mathrm{Ind}(C)$, il suffit qu'il existe une sous-famille *finie* qui soit épimorphique dans C. Prouver que cette condition est également nécessaire lorsqu'on

suppose que dans C toute famille finie de morphismes de but X_i se factorise en une famille épimorphique, suivie d'un monomorphisme effectif (10.5). (Pour cette der- 118
nière assertion, soit P l'ensemble des parties finies de I, ordonné par inclusion, et soit $X' = (X'_J)_{J\in P}$ le ind-objet formé des images des sous-familles finies de la famille donnée, enfin soit $X'' = X \amalg_{X'} X = $ « lim » $X \amalg_{X'_J} X$. Montrer que les deux morphismes canoniques $X \rightrightarrows X''$ sont distincts, mais coïncident sur les X'_J.)

b) Supposons que dans C toute famille finie de morphismes de même but se factorise en une famille épimorphique, suivie d'un monomorphisme effectif. Prouver que $\mathrm{Ind}(C)$ admet une petite sous-catégorie génératrice par épimorphismes (7.1) si et seulement si C admet une petite sous-catégorie C' telle que tout objet de C soit but d'une famille épimorphique *finie* de source dans C'. Lorsqu'on suppose que C admet une petite sous-catégorie génératrice (7.1), alors $\mathrm{Ind}(C)$ admet une petite sous-catégorie génératrice par épimorphismes si et seulement si C est équivalente à une petite catégorie. (Pour ce dernier énoncé, utiliser 7.5.2).

c) $\mathrm{Ind}((\mathrm{Ens}))$ n'admet pas de petite sous-catégorie génératrice.

Exercice 8.9.12. — Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie, et considérons $\mathrm{Pro}(C) = \mathrm{Ind}(C^\circ)^\circ$.

a) Montrer que si $\mathrm{Pro}(C)$ admet une petite sous-catégorie P' génératrice par épimorphismes (7.1), alors il existe une petite sous-catégorie C' de C qui est génératrice par épimorphismes dans $\mathrm{Pro}(C)$. (Prendre la catégorie des composants des objets de P'.)

b) Montrer que la catégorie $\mathrm{Pro}((\mathrm{Ens}))$ n'a pas de petite sous-catégorie génératrice par 119
épimorphismes. (Si C' est comme dans a), choisir un ensemble X dont le cardinal majore strictement les cardinaux des éléments de C', et considérer le pro-ensemble $\mathscr{X}$ formé par les complémentaires dans X des parties de cardinal $< \mathrm{card}(X)$. Montrer que pour tout ensemble Y non vide de cardinal $< \mathrm{card}(X)$, on a $\mathrm{Hom}(Y, \mathscr{X}) = \varnothing$, mais que $\mathscr{X}$ n'est pas isomorphe au pro-ensemble constant $\varnothing$.)

8.10. Notions duales : pro-objets, foncteurs pro-représentables. — Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie. On appelle *pro-objet* de C tout foncteur

$$\varphi : I^\circ \longrightarrow C, \tag{8.10.1}$$

où I est une catégorie filtrante essentiellement petite (appelée la catégorie d'indices), et comme d'habitude I° désigne la catégorie opposée. Soit $\mathscr{V}$ un univers tel que $\mathscr{V} \supset \mathscr{U}$. On fera attention que les pro-objets de C indexés par des $I \in \mathscr{V}$ sont en correspondance biunivoque avec les ind-objets de C° indexés par des $I \in \mathscr{V}$, en associant à tout tel ind-objet $\psi : I \to C^\circ$ le pro-objet $\varphi = \psi^\circ : I^\circ \to C$. S'inspirant de cette correspondance, on définit « par transport de structure et renversement des flèches » la notion de morphisme entre pro-objets de C à partir de la notion analogue (8.2.4.2). (8.2.5.1) pour les in-objets, et on définit en conséquence la catégorie des pro-objets de C indexés par des $I \in \mathscr{V}$, et un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Pro}_{\mathscr{V}}(C, \mathscr{U}) \simeq \mathrm{Ind}_{\mathscr{V}}(C^\circ, \mathscr{U})^\circ; \tag{8.10.2}$$

pour $\mathscr{V} = \mathscr{U}$ on parle simplement de la *catégorie des pro-objets de* C, notée $\mathrm{Pro}_{\mathscr{U}}(C)$ ou 120
simplement $\mathrm{Pro}(C)$, qui est donc définie par

$$\mathrm{Pro}(C) = \mathrm{Pro}_{\mathscr{U}}(C, \mathscr{U}) \simeq \mathrm{Ind}(C^\circ)^\circ. \tag{8.10.3}$$

Si deux pro-objets sont donnés sous *forme indicielle*

$$\mathscr{X} = (X_i)_{i\in I} \quad , \quad \mathscr{Y} = (Y_j)_{j\in J}, \tag{8.10.4}$$

la formule (8.2.5.1) prend ici la forme

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) \simeq \varprojlim_j \varinjlim_i \mathrm{Hom}(X_i, Y_j). \tag{8.10.5}$$

Le foncteur (8.4.1) appliquée à C° donne, par passage aux catégories opposées, un foncteur canonique (dénoté par la même lettre c s'il n'y a pas risque de confusion), permettant d'identifier C à une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Pro}(C)$:

$$c \,:\, C \longrightarrow \mathrm{Pro}(C); \tag{8.10.6}$$

c'est pour avoir un tel foncteur, et non $C \to \mathrm{Pro}(C)^\circ$, qu'on a « renversé les flèches » dans la définition des morphismes de pro-objets à partir de la définition analogue pour les ind-objets. Les pro-objets dans l'image essentielle de (8.10.6) s'appellent encore *pro-objets essentiellement constants.*

Posons

$$\check{C} = (C^\circ)\hat{} = \mathbf{Hom}(C, (\mathrm{Ens})), \tag{8.10.7}$$

alors le foncteur (8.2.4.7) peut être considéré comme un foncteur canonique pleinement fidèle

$$L \,:\, \mathrm{Pro}_{\mathscr{V}}(C, \mathscr{U}) \longrightarrow \check{C}^\circ, \tag{8.10.8}$$

121 et on trouve en particulier

$$L \,:\, \mathrm{Pro}(C) \hookrightarrow \check{C}^\circ. \tag{8.10.9}$$

Nous laisserons au lecteur le soin de traduire, au fur et mesure des besoins, les résultats des sections précédentes et de celles qui suivent du langage des ind-objets dans celui des pro-objets. Suivant le contexte mathématique, c'est l'un ou l'autre langage qui est le plus utile, sans compter les cas où les deux notions s'introduisent simultanément, par exemple lorsqu'il y a lieu de considérer des catégories complexes comme $\mathrm{Pro}(\mathrm{Ind}(C))$ ou $\mathrm{Ind}(\mathrm{Pro}(C))$. Nous nous contentons de donner quelques indications supplémentaires, pour fixer la terminologie et les notations, et préciser le « yoga ».

8.10.10. — Un foncteur *covariant* $F \,:\, C \to (\mathrm{Ens})$ est dit *foncteur pro-représentable* s'il est dans l'image essentielle de (8.10.9) (ou 8.10.8, cela revient au même) ; la sous-catégorie pleine de $\check{C}$ formée de ces foncteurs est donc équivalente à $\mathrm{Pro}(C)^\circ$. On préférera généralement travailler dans la catégorie opposée, image essentielle *en tant que sous-catégorie de* (8.10.9), qui est donc équivalente à $\mathrm{Pro}(C)$ lui-même. En accord avec cet usage, il est souvent préférable de regarder les foncteurs covariants

$$F \,:\, C \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

comme des objets de $\mathbf{Hom}(C, (\mathrm{Ens}))^\circ = \check{C}^\circ$, et d'écrire en conséquence la catégorie des homomorphismes

$$X \longrightarrow F \text{ dans } \check{C}^\circ,$$

122 i.e. des couples (X, u) d'un objet X de C et d'un $u \in F(X)$, comme

$$_{F}\backslash C\,. \tag{8.10.11}$$

Avec cette convention, on trouvera donc un foncteur *covariant* (foncteur source)

(8.10.12) $${}_F\backslash C \to C,$$

et 3.4 se récrit sous la forme

(8.10.13) $$F \xrightarrow{\sim} « \varprojlim_{({}_F\backslash C)^\circ} » X$$

8.10.14. — Le critère 8.3.3 appliqué à C° devient un critère de proreprésentabilité pour F : il faut et il suffit que $({}_F\backslash C)^\circ$ soit filtrante et essentiellement petite, cette dernière condition étant superflue si C est équivalente à une petite catégorie ; si de plus dans C les limites projectives finies sont représentables, il revient au même de dire que F y commute i.e. est *exact à gauche.*

8.10.15. — Dans $\mathrm{Pro}(C)$ les petites limites projectives filtrantes sont représentables et le foncteur (8.10.9) y commute ; en d'autres termes, ce foncteur transforme limites projectives en $\mathrm{Pro}(C)$ en limites *inductives* de $\check{C} = \mathbf{Hom}(C, (\mathrm{Ens}))$, tout comme son composé $C \to \check{C}^\circ$ avec (8.10.6), qui partage avec lui la fâcheuse propriété d'être contravariant quand on la considère à valeurs dans $\check{C}$. On fera attention que les foncteurs pro-représentables de C 123
dans (Ens) sont les foncteurs qui sont des petites limites *inductives* filtrantes de foncteurs représentables (et non des limites projectives, comme la terminologie pourrait éventuellement le suggérer).

8.11. Ind-adjoints et pro-adjoints. —

8.11.1. — Soit

(8.11.1.1) $$f : C \longrightarrow C'$$

un foncteur entre $\mathscr{U}$-catégories, d'où un foncteur $F \mapsto F \circ f$

(8.11.1.2) $$f^* : \widehat{C'} \longrightarrow \widehat{C}.$$

On dit que f *admet un ind-adjoint* si le foncteur précédent transforme foncteurs ind-représentables en foncteurs ind-représentables. Comme f^* commute aux limites inductives, et que la sous-catégorie pleine de C' formée des foncteurs ind-représentables est stable par petites limites inductives filtrantes, il revient au même de dire que f admet un ind-adjoint, ou que f^* applique objets de C (identifié à une sous-catégorie pleine de $\widehat{C}$) dans des foncteurs ind-représentables sur C, i.e.

(8.11.1.3) $$X \longmapsto \mathrm{Hom}(f(X), Y') \text{ est ind-représentable pour tout } Y' \in \mathrm{Ob}\, C'.$$

Une autre façon d'exprimer la condition que f admette un ind-adjoint est de dire qu'il existe un foncteur

(8.11.1.4) $$g : \mathrm{Ind}(C') \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$$

qui soit essentiellement induit par f^*, i.e. tel qu'on ait un isomorphisme de bifoncteurs

(8.11.1.5) $$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C)}(X, g(\mathscr{Y}')) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C')}(f(X), \mathscr{Y}'),$$

où $X \in \mathrm{Ob}\, C$ et $Y' \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Ind}(C')$. En fait, il suffit même d'avoir un foncteur 124

(8.11.1.6) $$g_\circ : C' \longrightarrow \mathrm{Ind}(C)$$

et un isomorphisme de bifoncteurs

(8.11.1.7) $$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C)}(X, g_\circ(Y')) \simeq \mathrm{Hom}_{C'}(f(X), Y')$$

en $X \in \mathrm{Ob}\, C$, $Y' \in \mathrm{Ob}\, C'$. Le foncteur g (resp. $g_\circ$) est évidemment déterminé à isomorphisme unique près par f, et inversement on reconstitue f à isomorphisme canonique près par la connaissance de ce g (resp. $g_\circ$). Il est clair sur (8.11.1.5) que le foncteur g commute aux limites inductives, et qu'il « prolonge » le foncteur $g_\circ$; cela le détermine donc à isomorphisme unique près en termes de $g_\circ$ (8.7.2). Le foncteur g, et parfois aussi le foncteur $g_\circ$ qu'il prolonge, est appelé le *foncteur ind-adjoint de* f (inutile ici de préciser : à droite, car l'autre, s'il existe, s'appellera le pro-adjoint, cf. 8.11.5 plus bas).

Bien entendu, lorsque f admet un adjoint à droite

$$f^{\mathrm{ad}} : C' \longrightarrow C,$$

il admet un ind-adjoint g, et celui-ci est isomorphe canoniquement au prolongement canonique de f aux ind-objets :

(8.11.1.8) $$g \simeq \mathrm{Ind}(f^{\mathrm{ad}}).$$

La notion de ind-adjoint est donc une généralisation naturelle de la notion d'adjoint à droite.

125 Considérons maintenant le prolongement canonique

(8.11.1.9) $$\mathrm{Ind}(f) : \mathrm{Ind}(C) \longrightarrow \mathrm{Ind}(C').$$

On a alors :

Proposition 8.11.2. — *Pour que le foncteur $f : C \to C'$ admette un ind-adjoint, il faut et il suffit que le foncteur* $\mathrm{Ind}(f)$ (8.11.1.9) *admette un adjoint à droite. Ce dernier est canoniquement isomorphe au ind-adjoint* (8.11.1.4).

Le suffisance et la dernière assertion sont triviales sur la formule de ind-adjonction (8.11.1.5). Pour la nécessité, on note que par passage à la limite projective sur cette formule sur des X_i, on déduit un isomorphisme d'adjonction en les pro-objets $\mathscr{X} = (X_i)_{i \in I}$ et $\mathscr{Y}'$:

(8.11.2.1) $$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C)}(\mathscr{X}, g(\mathscr{Y}')) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(C')}(\mathrm{Ind}(f)(\mathscr{X}), \mathscr{Y}'),$$

C.Q.F.D.

Corollaire 8.11.3. — *Si f admet un ind-adjoint, alors* $\mathrm{Ind}(f)$ *commute aux limites inductives, et le ind-adjoint g commute aux limites projectives.*

Proposition 8.11.4. — *Pour que le foncteur $f : C \to C'$ admette un ind-adjoint, il faut que f soit exact à droite, et cette condition est suffisante lorsque C est équivalente à une petite catégorie.*

Cela résulte du critère (8.11.1.3), et de 8.3.1 et 8.3.3 (iv).

Pour un autre critère en termes de la notion de foncteur accessible, cf. 8.13.3.

126 *8.11.5.* — Considérons maintenant le foncteur $F \mapsto F \circ f$

$$f^{\circ *} : \check{C}' \longrightarrow \check{C} \tag{8.11.5.1}$$

induit par f. On dira que f *admet un pro-adjoint* si le foncteur précédent applique foncteur pro-représentable en foncteur pro-représentable, i.e. s'il existe un foncteur (appelé *foncteur pro-adjoint de* f)

$$g : \mathrm{Pro}(C') \longrightarrow \mathrm{Pro}(C), \tag{8.11.5.2}$$

et un isomorphisme de bifoncteurs

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(C)}(g(\mathscr{Y}'), \mathscr{X}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(C')}(\mathscr{Y}', f(\mathscr{X})). \tag{8.11.5.3}$$

Bien entendu, dire que f admet un pro-adjoint signifie que f° admet un ind-adjoint, de sorte que les notions et résultats pour les ind-adjoints se traduisent trivialement en termes de pro-adjoints. Signalons seulement que f admet un pro-adjoint si et seulement si $\mathrm{Pro}(f) : \mathrm{Pro}(C) \to \mathrm{Pro}(C')$ admet un adjoint *à gauche*, et que dans ce cas le foncteur g précédent est un tel adjoint à gauche de $\mathrm{Pro}(f)$; et qu'il faut pour ceci que f soit exact à *gauche*, cette condition étant également suffisante lorsque C est équivalente à une petite catégorie. Dans ce cas, f est donc exact si et seulement si il admet à la fois un ind-adjoint et un pro-adjoint.

Exemple 8.11.6. — Considérons le cas d'un foncteur

$$f : C \longrightarrow (\mathrm{Ens}).$$

Si ce foncteur admet un pro-adjoint, il est pro-représentable, et la réciproque est vraie si et seulement si la sous-catégorie pleine de $\check{C}$ formée des foncteurs pro-représentables est stable par petits produits ; c'est le cas en particulier si C est équivalente à une petite catégorie 127
(8.10.14) ou si dans C les petits produits sont représentables (8.9.5 b) appliquée à C°). À peu de choses près, on peut donc dire que pour un foncteur $f : C \to C'$, la notion d'existence d'un pro-adjoint est la *généralisation naturelle de la notion de pro-représentabilité de* f, qui est définie lorsque $C' = (\mathrm{Ens})$.

8.12. Ind-objets et pro-objets stricts. Application à un critère de représentabilité. —

8.12.1. — Soit

$$\mathscr{X} = (X_i)_{i \in I}$$

un ind-objet de la $\mathscr{U}$-catégorie C, et soit F le préfaisceau qu'il ind-représente. On voit alors aussitôt qu'il revient au même de dire que les morphismes canoniques

$$X_i \longrightarrow F = « \varinjlim_i » X_i$$

sont des monomorphismes de $\mathrm{Ind}(C)$ (ou, ce qui revient au même, de $\widehat{C}$, i.e. des monomorphismes de foncteurs « argument par argument »), ou de dire que pour toute flèche $i \to j$ de I, la flèche de transition correspondante

$$X_i \longrightarrow X_j$$

est un monomorphisme. Lorsque ces conditions sont remplies, et si de plus I est une catégorie ordonnée, on dit que $\mathscr{X}$ est un *ind-objet strict*. On notera que cette condition n'est pas 128
invariante par isomorphisme de ind-objets ; un ind-objet sera appelé *essentiellement strict* s'il

est isomorphe à un ind-objet strict. Un préfaisceau sera appelé *strictement ind-représentable* s'il est ind-représentable par un ind-objet strict ; donc $F =$ « $\varinjlim_i$ » X_i est strictement ind-représentable si et seulement si $\mathscr{X} = (X_i)_{i \in I}$ est essentiellement strict.

8.12.1.1. — Soit F un préfaisceau sur $\mathbf{C}$, et considérons la sous-catégorie pleine de $\mathbf{C}_{/F}$ formée des flèches $X \to F$ de source dans $\mathbf{C}$ qui sont des monomorphismes. On l'appellera la *catégorie des sous-foncteurs représentables de F* ; c'est la catégorie associée à l'ensemble ordonné des sous-foncteurs représentables de F, ordonné par l'ordre induit de celui de l'ensemble des sous-objets de F. Il résulte alors aussitôt des définitions :

Proposition 8.12.2. — *Pour que le préfaisceau F sur $\mathbf{C}$ soit strictement ind-représentable, il faut et il suffit que la catégorie (ordonnée) $\mathbf{I}$ des sous-foncteurs représentables de F soit filtrante et essentiellement petite et que l'on ait*

(8.12.2.1)
$$\varinjlim_{I} X_i \xrightarrow{\sim} F.$$

Lorsque pour tout objet X de $\mathbf{C}$, l'ensemble des sous-objets de X dans $\mathbf{C}$ est petit (par exemple si $\mathbf{C}$ admet une petite sous-catégorie génératrice (7.4)*), cela implique que la catégorie des sous-foncteurs représentables est même petite.*

129 *8.12.2.2.* — Si F est strictement ind-représentable, il y a donc une façon privilégiée de le ind-représenter par un ind-objet, et ce dernier est même un ind-objet strict : on prend la représentation (8.12.2.1). Un ind-objet strict $\mathscr{Y}$ est dit *saturé* s'il est isomorphe à un ind-objet de la forme (X_i) figurant dans (8.12.2.1), pour F convenable ; donc il existe à isomorphisme unique près, un seul ind-objet strict saturé isomorphe au ind-objet strict donné, savoir celui envisagé dans 8.12.2, en prenant $F = \varinjlim \mathscr{Y}$ (limite dans $\widehat{\mathbf{C}}$).

8.12.2.3. — Supposons qu'on sache déjà que l'on puisse trouver une petite partie cofinale dans l'ensemble $\operatorname{Ob} \mathbf{C}_{/F}$, ce qui est le cas en particulier si F est ind-représentable ; alors il s'ensuit que la même condition est vérifiée dans la sous-catégorie pleine $\mathbf{I}$ envisagée dans 8.12.2, donc on peut dans le critère 8.12.2 omettre la condition que $\mathbf{I}$ soit essentiellement petite.

8.12.3. — Soit F un préfaisceau sur $\mathbf{C}$, et considérons un objet
$$u : X \longrightarrow F$$
de $\mathbf{C}_{/F}$. On dit que u (ou le couple (X, u)) est *minimal* si pour toute factorisation de u en

(8.12.3.1)
$$X \xrightarrow{p} X' \xrightarrow{u'} F,$$

avec p un épimorphisme strict (10.2), p est un isomorphisme. Considérant u comme un objet
130 de $F(X)$ (1.4), dire que u est minimal signifie donc que tout épimorphisme strict $p : X \to X'$ tel que $u \in \operatorname{Im}(F(p) : F(X') \to F(X))$ est un isomorphisme. Cette notion s'éclaire par la partie a) du lemme suivant :

Lemme 8.12.4. — *Soit F un préfaisceau sur $\mathbf{C}$.*

a) *Supposons que F transforme conoyaux en noyaux et considérons un morphisme*
$$u : X \longrightarrow F,$$

avec $X \in \operatorname{Ob} C$. Pour que u soit un monomorphisme, il suffit, lorsque dans C les conoyaux de doubles flèches sont représentables, que u soit minimal ; cette condition est également nécessaire si dans C les produits fibrés sont représentables.

b) *Supposons que dans C les $\varinjlim$ finies soient représentables. Pour que la sous-catégorie des sous-foncteurs représentables de F (8.12.1.1) soit filtrante (pas nécessairement petite) et ait pour limite inductive F, il suffit que F soit exact à gauche et que tout morphisme $u : X \to F$, avec $X \in \operatorname{Ob} C$, se factorise en*

$$X \to X' \xrightarrow{u'} F,$$

avec u' minimal ; cette condition est également nécessaire si dans C les produits fibrés sont représentables.

c) *Supposons que C admette une petite sous-catégorie génératrice (7.1), et que I la catégorie des sous-foncteurs représentables de F soit filtrante, alors I est petite.*

Démonstration. **131**

a) Supposons u minimal, prouvons que u est un monomorphisme, i.e. que pour toute double-flèche $v, v' : Y \rightrightarrows X$ telle que $uv = uv'$, on a $v = v'$. En effet, si $X' = \operatorname{Coker}(v, v')$, alors u se factorise en $X \xrightarrow{p} X' \xrightarrow{u'} F$ (F transformant conoyaux en noyaux), et comme p est un épimorphisme strict par construction, il s'ensuit que p est un isomorphisme i.e. $v = v'$. Supposons que u est un monomorphisme, prouvons qu'il est minimal. Considérons une factorisation (8.12.3.1) ; comme p est un épimorphisme strict, c'est le conoyaux de la double flèche canonique $v, v' : X \times_{X'} X \rightrightarrows X$, et comme $(u'p)v = (u'p)v'$ et que $u'p = u$ est un monomorphisme, on a $v = v'$ donc p est un isomorphisme.

b) Suffisance : Comme F est exact à gauche, $C_{/F}$ est filtrante. Comme on sait que $F = \varinjlim_{C_{/F}} X$, on est ramené par 8.1.3 c) à prouver que la sous-catégorie pleine I de $C_{/F}$ des sous-objets de F est cofinale dans $C_{/F}$; or en vertu du « il suffit » dans a), c'est ce qu'assure l'hypothèse que tout objet de $C_{/F}$ est majoré par un objet « minimal ». Nécessité : Comme toute limite inductive filtrante de foncteurs exacts à droite est itou, la première condition est trivialement nécessaire. La deuxième résulte alors du « il faut » dans a).

c) Un sous-foncteur représentable $X \hookrightarrow F$ de F est connu quand on connaît la sous-catégorie pleine $C'_{/X}$ de $C'_{/F}$, où C est une petite sous-catégorie génératrice fixée de C. (Utiliser l'hypothèse I filtrante.) Comme $C'_{/F}$ est petite, l'ensemble de ses sous-catégories pleine est petit, d'où le conclusion.

Proposition 8.12.5. — *Soit C une $\mathcal{U}$-catégorie où les limites inductives finies sont représentables, et admettant une petite sous-catégorie génératrice (7.1). Soit F un préfaisceau sur C. Pour que F soit strictement ind-représentable, il suffit qu'il satisfasse les deux conditions suivantes, et celles-ci sont également nécessaires si dans C les produits fibrés sont représentables :* **132**

a) *F est exact à gauche.*

b) *Tout couple (X, u), avec $X \in \operatorname{Ob} C$ et $u \in F(X)$, est majoré dans $C_{/F}$ par un couple minimal (8.12.3), i.e. il existe un couple minimal (X', u') ($X' \in \operatorname{Ob} C, u' \in F(X)$) et un morphisme $f : X \to X'$ tel que $u = F(f)(u')$.*

La suffisance résulte de 8.12.2 et de 8.12.4 b), c), la nécessité de 8.3.1 et de 8.12.4 a).

Remarque 8.12.6. — Lorsque F transforme sommes amalgamées de C en produits fibrés, on voit aussitôt que pour un couple (X, u) donné comme dans b), l'ensemble des quotients stricts X' de X tels que $u \in \mathrm{Im}(F(X') \to F(X))$ est filtrant décroissant, ce qui implique que si l'ensemble des quotients stricts de X est artinien, alors la condition b) de 8.12.5 est automatiquement satisfaite. Si donc la condition précédente sur X est satisfaite pour tout objet X de C (on dit aussi alors, parfois, que les objets de C° sont *artiniens*), alors il résulte de 8.12.5 que F est strictement ind-représentable si et seulement si F est exact à gauche ; dans ce cas, F est donc strictement ind-représentable dès qu'il est ind-représentable (8.3.1).

133 ***Corollaire 8.12.7.*** — *Soit C une $\mathcal{U}$-catégorie où les petites limites projectives sont représentables, et admettant une petite sous-catégorie cogénératrice (7.9, 7.13). Alors un foncteur $F : C \to (\mathrm{Ens})$ est représentable si et seulement si F commute aux petites limites projectives.*

La nécessité est claire. Pour la suffisance, on applique 8.12.5 à la catégorie opposée C°. Pour prouver d'abord que F est (strictement) pro-représentable, on est ramené à prouver que tout couple (X, u), $X \in \mathrm{Ob}\, C$ et $u \in F(X)$, est majoré par un couple « minimal ». Or la famille $(X_i)_{i \in I}$ des sous-objets *stricts* de X tels que $u \in \mathrm{Im}(F(X_i) \to F(X))$ est petite (7.5 sous forme duale). Grâce au fait que F est exact à gauche, elle est co-filtrante (8.12.6), et grâce au fait que F commute aux petites limites projectives on voit que $X' = \varprojlim_i X_i$ est un plus petit objet de cette famille. (Utiliser le fait que, F étant exact à gauche, transforme monomorphismes en monomorphismes.) Si $u' \in F(X')$ est l'unique élément dont l'image dans $F(X)$ est u, on voit alors que (X', u') est un couple minimal majorant (X, u). Cela prouve que F est pro-représentable, et la conclusion résulte alors du

Lemme 8.12.8.1. — *Soit $F : C \to (\mathrm{Ens})$ un foncteur, où C est une $\mathcal{U}$-catégorie où les petites limites projectives sont représentables. Pour que F soit représentable, il faut et il suffit qu'il soit pro-représentable et qu'il commute aux petites limites projectives.*

134 La nécessité est claire, prouvons la suffisance. Dire que F est représentable signifie évidemment que ${}_F\backslash C$ admet un élément initial (en fait, les objets initiaux de ${}_F\backslash C$ sont précisément les isomorphismes $F \to X$, i.e. les données de représentation pour F). Or F étant pro-représentable, $({}_F\backslash C^\circ)$ est filtrante et équivalente à une petite catégorie, donc $X = \varprojlim_{({}_F\backslash C)^\circ} X$ est représentable dans C, et comme F commute à la limite envisagée, il s'ensuit que X est un objet initial de ${}_F\backslash C$, C.Q.F.D.

Corollaire 8.12.8. — *Les hypothèses sur C étant celles de* 8.12.7, *soit $f : C \to C'$ un foncteur de C dans une $\mathcal{U}$-catégorie C'. Pour que f admette un adjoint à gauche, il faut et il suffit que f commute aux petites limites projectives.*

Cela se ramène en effet trivialement à 8.12.7, en appliquant cet énoncé aux foncteurs composés de la forme $X \mapsto \mathrm{Hom}(Y', f(X))$.

Exemples 8.12.9. — Comme on a signalé dans 7.13, les hypothèses sur E de 8.12.7 et 8.12.8 sont vérifiées si C est la catégorie des $\mathcal{U}$-faisceaux d'ensembles sur un espace topologique

$X \in \mathcal{U}$ (ou plus généralement, sur un $\mathcal{U}$-site (II (3.0.2)). Donnons un exemple instructif [3] qui montre que l'hypothèse d'existence d'une petite sous-catégorie cogénératrice D de C n'est pas surabondante dans 8.12.7. Prenons pour C la catégorie des groupes éléments de $\mathcal{U}$. Soit J l'ensemble des classes d'isomorphie de groupes simples $\in C$, choisissons pour tout $j \in J$ un groupe simple G_j dans la classe de j, et soit I l'ensemble ordonné filtrant des parties $\mathcal{U}$-petites de J, et pour $i \in I$, soit $X_i = \amalg_{j \in i} G_j$. Les X_i forment alors un sys- 135
tème projectif $(X_i)_{i \in I}$ dans E, à morphismes de transition des épimorphismes, et le foncteur correspondant

$$(*) \qquad F(X) = \varinjlim_{i} \operatorname{Hom}(X_i, X)$$

prend ses valeurs dans ($\mathcal{U}$-Ens) (bien que l'ensemble d'indices I n'ait évidemment pas un cardinal $\in \mathcal{U}$) ; plus précisément, montrons que pour toute petite sous-catégorie pleine $C_\circ$ de C, il existe un $i_\circ \in I$ tel que la restriction de F à $C_\circ$ soit représentable par $X_{i_\circ}$, ce qui prouvera à la fois que F est à valeurs dans $\mathcal{U}$-Ens, et qu'il commute aux petites limites projectives. Pour prouver notre assertion, il suffit de noter que pour tout $X \in \operatorname{Ob} C_\circ$, le cardinal de l'ensemble $J(X)$ des $j \in J$ tels qu'il existe un homomorphisme non trivial de G_j dans X est nécessairement petit, puisque un tel morphisme est nécessairement un monomorphisme (G_j étant simple) ; par suite, si $i_\circ$ est la partie de J réunion des $J(X)$ pour $X \in \operatorname{ob} C_\circ$, $i_\circ$ est petit i.e. $i_\circ \in I$, et il fait l'affaire. D'autre part il est clair que F n'est pas représentable, puisque on a card $I \notin \mathcal{U}$. De ceci et de 8.12.7 on conclut donc que *la catégorie C des groupes $\in \mathcal{U}$ n'admet pas une petite sous-catégorie pleine cogénératrice.* Comme l'objet $\mathbf{Z}$ de C est d'autre part un générateur, il résulte alors de la démonstration de 7.12 qu'il existe un groupe G à deux générateurs qui ne se plonge pas dans un objet injectif de la catégorie C des groupes $\in \mathcal{U}$. Il semble d'ailleurs plausible que C n'admette pas d'autre objet injectif que les groupes unités.

136

8.13. Foncteurs proreprésentables et foncteurs accessibles. —

8.13.1. — Dans le présent numéro, nous utilisons quelques notions et résultats du paragraphe suivant, et notamment 9.11 et 9.13, pour obtenir un critère de proreprésentabilité que nous utiliserons (incidemment) dans IV 9.16. C désigne par la suite une $\mathcal{U}$-catégorie satisfaisant la condition L de 9.1 b), cette condition étant remplie par exemple si dans C les petites limites inductives filtrantes sont représentables.

Proposition 8.13.2. — *Soient C comme ci-dessus, et*

$$f : C \longrightarrow (\text{Ens})$$

un foncteur.

a) *Supposons que chaque objet de C est accessible (9.3). Si f est pro-représentable, f est accessible (9.2) et exact à gauche.*
b) *Supposons que dans C les limites projectives finies soient représentables, et que C admette une filtration cardinale (9.12). Si f est accessible et exact à gauche, alors f est proreprésentable.*

[3](dû à H. BASS).

Démonstration.

a) L'hypothèse sur C signifie que les foncteurs covariants représentables de C dans (Ens) sont accessibles. Il en est donc de même de toute petite limite inductive de tels foncteurs (9.6 (i)), donc aussi de tout foncteur pro-représentable.

b) En vertu de 8.3.3 (iii), il reste à prouver que dans $\mathrm{Ob}({}_F\backslash C)^\circ$ il y a une petite sous-catégorie cofinale. Or par hypothèse il existe un cardinal Π tel que f soit
137 Π-accessible. Soit alors (X, u), $u \in F(X)$, un objet de ${}_F\backslash C$. Avec les notations de 9.12 c) on a alors $X = \varinjlim_i X_i$, avec I filtrant grand devant Π et les X_i dans $C' = \mathrm{Filt}^{\Pi}(C)$, d'où $F(X) \xleftarrow{\sim} \varinjlim_i F(X_i)$. Cela montre que la petite sous-catégorie $({}_F\backslash C')^\circ$ est cofinale dans $({}_F\backslash C)^\circ$, et achève la démonstration.

Corollaire 8.13.3. — *Soit C une $\mathscr{U}$-catégorie satisfaisant aux conditions suivantes :*

a) *Dans C les limites projectives finies sont représentables.*
b) *Dans C les petites limites inductives filtrantes sont représentables.*
c) *Le foncteur* Ker *sur la catégorie des doubles flèches de C est accessible (par exemple, il commute aux petites $\varinjlim$ filtrantes).*
d) *Tout épimorphisme strict de C est strict universel* (10.2).
e) *Il existe une petite sous-catégorie de C génératrice par épimorphismes stricts* (7.1).

Sous ces conditions, un foncteur $f : C \to$ (Ens) est proreprésentables si et seulement si il est exact à gauche et accessible (9.2).

En effet, les conditions de 8.13.2 a) et b) sur C sont vérifiées, en vertu de 9.11 et 9.13 respectivement.

Corollaire 8.13.4. — *Soit $f : C \to C'$ un foncteur entre $\mathscr{U}$-catégories satisfaisant aux conditions* a) *à* e) *de 8.13.3. Pour que f admette un pro-adjoint, il faut et il suffit que f soit exact à gauche et accessible.*

138 Comme les foncteurs représentables $h_{Y'} : X' \to \mathrm{Hom}(Y', X') : C' \to$ (Ens) sont exacts à gauche et accessibles (9.11), si f a ces mêmes propriétés, il en est de même de ses composés avec les foncteurs précédents, qui sont donc proreprésentables par 8.13.3, i.e. f admet un proadjoint. Inversement, supposons que f admet un proadjoint, et soient C'_1 une petite sous-catégorie génératrice de C, Π un cardinal tel que les $Y' \in \mathrm{Ob}\, C'$ soient Π-accessibles ; pour prouver que f est Π-accessible, il suffit donc de prouver qu'il en est ainsi de ses composés avec les $h_{Y'}$, $Y' \in \mathrm{Ob}\, C'$; or par hypothèse ces composés sont pro-représentables, donc ils sont accessibles (8.13.3), donc Π-accessibles pourvu qu'on prenne Π assez grand, C.Q.F.D.

9. Foncteurs accessibles, filtrations cardinales et construction de petites sous-catégories génératrices

Le présent paragraphe, de nature plus technique que les autres paragraphes de cet exposé, ne servira dans ce séminaire que dans IV 9 et dans VI 4, qui ne sont pas utilisés ailleurs dans le Séminaire. Il s'impose donc d'omettre la lecture du présent paragraphe, du moins en première lecture !

9.0. — Toutes les catégories envisagées dans le présent numéro sont supposées être des $\mathcal{U}$-catégories. Sauf pour les petites catégories d'indice I, J … que nous aurons à utiliser, les développements qui suivent s'appliqueront surtout à des « grosses » catégories E, F … qui sont stables par petites limites inductives filtrantes. Il suffira cependant le plus souvent **139** qu'une condition un peu plus faible soit vérifiée (condition L dans 9.1 ci-dessous). Tous les cardinaux envisagés dans le présent numéro sont supposés $\in \mathcal{U}$.

Suivant une suggestion de P. Deligne, nous allons étudier, pour un foncteur $f : E \to F$ entre grosses catégories, une condition de commutation de f à certains types de limites inductives filtrantes, condition remarquablement stable, et qui sera vérifiée pour les foncteurs les plus importants qu'on rencontre dans la nature. Les applications que nous avons en vue, pour notre séminaire, sont 9.13.3, 9.13.4 (utilisés dans VI 4) et surtout 9.25, qui donne, dans un cas non trivial, l'existence d'une petite famille génératrice dans une catégorie de sections d'une catégorie fibrée ; ce résultat sera utilisé dans IV 9.16.

Définition 9.1. — a) *Soient I un ensemble préordonné, π un cardinal. On dit que I est grand devant π si I est filtrant, et si toute partie de I de cardinal $\leq \pi$ admet un majorant dans I.*

b) *Soit E une catégorie. Si π est un cardinal, on dit que E satisfait la condition L_π si pour tout petit ensemble ordonné I grand devant π, E est stable par les limites inductives de type I. On dit que E satisfait à la condition L s'il existe un cardinal $\pi \in \mathcal{U}$ tel que E satisfasse à la condition L_π.*

9.1.1. — Lorsque dans 9.1 a) on a $\pi \geq 2$, la deuxième condition énoncée implique déjà que I est filtrant, et si π est fini, I grand devant π signifie simplement que I est filtrant. Nous ne nous intéresserons guère par la suite qu'au cas où π est infini. Notons que si π, π' sont deux cardinaux tels que $\pi' \geq \pi$, alors I grand devant π' implique évidemment I grand devant π.

9.1.2. — Comme annoncé dans 9.0, les conditions L_π, L doivent être considérées comme **140** des variantes techniques de la condition plus forte de stabilité par petites limites inductives filtrantes. Il est clair que si π, π' sont des cardinaux tels que $\pi' \geq \pi$, alors la condition L_π implique la condition $L_{\pi'}$.

Définition 9.2. — *Soit $f : E \to F$ un foncteur. Si Π est un cardinal, on dit que f est Π-préaccessible (resp. Π-accessible) si E satisfait L_Π (9.1) et si pour tout ensemble ordonné $I \in \mathcal{U}$ grand devant Π, et tout système inductif $(X_i)_{i\in I}$ dans E de type I, le morphisme canonique*

$$\varinjlim f(X_i) \longrightarrow f(\varinjlim X_i)$$

est un monomorphisme (resp. un isomorphisme). On dit que f est préaccessible (resp. accessible) (relativement à l'univers $\mathcal{U}$) s'il existe un cardinal $\Pi \in \mathcal{U}$ tel que f soit Π-préaccessible (resp. Π-accessible).

La catégorie des foncteurs Π-accessibles (resp. accessibles) de E dans F sera noté $\mathbf{Hom}(E, F)_\Pi$ resp. $\mathbf{Hom}(E, F)_{\mathrm{acc}}$.

9.2.1. — Évidemment, un foncteur commutant aux petites $\varinjlim$ filtrantes (p. ex. un foncteur admettant un adjoint à droite) est Π-accessible pour tout cardinal $\Pi \geq 2$.

Définition 9.3. — *Soient E une catégorie, X un objet de E,*

$$h^{\circ}_X : E \longrightarrow (\mathscr{U}\text{-Ens})$$

le foncteur covariant qu'il représente, $\Pi \in \mathscr{U}$ un cardinal. On dit que X est un objet
141 Π-préaccessible (resp. Π-accessible) de E *si le foncteur h°_X est Π-préaccessible (resp. Π-accessible) ; on dit que X est* préaccessible (resp. accessible) *s'il existe un cardinal $\Pi \in \mathscr{U}$ tel que X soit un objet Π-préaccessible (resp. Π-accessible) de E.*

9.3.1. — On désigne par E_Π la sous-catégorie pleine de E formée des objets Π-accessibles de E.

Lorsqu'on applique la définition 9.3 à une catégorie de la forme $\mathbf{Hom}(C, F)$, la terminologie introduite présente *a priori* une ambiguïté avec la terminologie analogue introduite dans 9.2, lorsqu'on interprète les objets de $\mathbf{Hom}(C, F)$ comme des foncteurs ; il ne semble pas cependant qu'il y ait un risque de confusion sérieux.

Définition 9.4. — *Soient E une catégorie, $\pi \in \mathscr{U}$ un cardinal. On dit que E est une catégorie π-préaccessible (resp. π-accessible) s'il existe dans E une petite sous-catégorie pleine C qui est génératrice (7.1) et dont les objets sont π-préaccessibles (resp. π-accessibles) (9.3). On dit que E est une catégorie pré-accessible (resp. . accessible) s'il existe un cardinal $\pi \in \mathscr{U}$ tel que E soit π-préaccessible (resp. π-accessible).*

Pour des exemples importants, cf. 9.11.3 plus bas.

Proposition 9.5. — *Soit $f : E \to F$ un foncteur entre catégories telles que F soit accessible et que tout objet de E soit accessible. Alors, si f admet un adjoint à gauche, f est accessible.*

142 En effet, par hypothèse, F admet une petite famille conservative de foncteurs représentables $F \to (\mathscr{U}\text{-Ens})$ qui sont accessibles, donc on est ramené aussitôt à montrer que le composé de f avec chacun des foncteurs précédents est accessible. Or comme f admet un adjoint à gauche, ces composés sont des foncteurs $E \to (\mathscr{U}\text{-Ens})$ *représentables*, donc accessibles d'après l'hypothèse sur E.

Proposition 9.6. — *Soient E et F deux catégories, $\pi \in \mathscr{U}$ un cardinal et considérons la sous-catégorie pleine $\mathbf{Hom}(E, F)_\Pi$ de $\mathbf{Hom}(E, F)$ formée des foncteurs Π-accessibles* (9.2) *de E dans F.*

(i) *Cette sous-catégorie est stable par tout type de $\varinjlim$ qui est représentable dans F.*

(ii) *Supposons F π-accessible (9.4), et soit J une catégorie telle que* card $F\ell\, J \leq \pi$ *et que les $\varprojlim$ de type J soient représentables dans F, donc les $\varprojlim$ de type J sont représentables dans* $\mathbf{Hom}(E, F)$. *Alors la sous-catégorie* $\mathbf{Hom}(E, F)_\Pi$ *est stable par les $\varprojlim$ de type J.*

Corollaire 9.7. — *Soient E et F deux catégories, avec F accessible (9.4). Alors la sous-catégorie pleine* $\mathbf{Hom}(E, F)_{\mathrm{acc}}$ *de* $\mathbf{Hom}(E, F)$ *formée des foncteurs accessibles est stable par tout type de limite inductive ou projective, relative à une petite catégorie d'indices J, qui est représentable dans F (donc dans* $\mathbf{Hom}(E, F)$*).*

Preuve de 9.6. L'assertion (i) résulte trivialement de la commutation du foncteur $\varinjlim$ aux limites inductives quelconques. Pour (ii), soit $(f_j)_{j \in J}$ un système projectif de foncteurs
143 Π-accessibles $E \to F$, $f = \varprojlim f_j$ sa limite projective, qui se calcule « argument par argu-

ment », prouvons que f est Π-accessible, i.e. que pour tout ensemble ordonné $I \in \mathcal{U}$ grand devant Π, et tout système inductif $(X_i)_{i\in I}$ dans E, le morphisme canonique

$$\varinjlim_i((\varprojlim_j f_j)(X_i)) \longrightarrow (\varprojlim_j f_j)(\varinjlim_i X_i)$$

est un isomorphisme. Or le calcul « argument par argument » du foncteur $\varprojlim_j f_j$ nous permet d'identifier le morphisme canonique précédent au morphisme canonique

$$\varinjlim_i \varprojlim_j f_j(X_i) \longrightarrow \varprojlim_j \varinjlim_i f_j(X_i)$$

associé au bifoncteur

$$(i,j) \longmapsto f_j(X_i) : I \times J \longrightarrow F.$$

Donc 9.6 est une conséquence de l'assertion plus générale :

Corollaire 9.8. — *Soient F une catégorie Π-accessible, I un ensemble ordonné grand devant Π, J une petite catégorie telle que* card $F\ell \leq \Pi$, *et que les $\varprojlim$ de type J soient représentables dans F, $h : I \times J \to F$ un foncteur ; alors le morphisme canonique*

(9.8.1)
$$\varinjlim_i \varprojlim_j h(i,j) \longrightarrow \varprojlim_j \varinjlim_i h(i,j)$$

est un isomorphisme. En d'autres termes, le foncteur

(9.8.2)
$$\varinjlim_i : \mathbf{Hom}(I,F) \longrightarrow F$$

commute aux limites projectives de type J (pour toute petite catégorie J telle que card $F\ell(J) \leq$ 144
Π et telle que les limites projectives de type J soient représentables dans F). Ou encore, pour toute J comme ci-dessus, le foncteur

(9.8.3)
$$\varinjlim_j : \mathbf{Hom}(J,F) \longrightarrow F$$

est Π-accessible.

Comme par hypothèse F admet une famille conservative de foncteurs covariants représentables Π-accessibles $g : F \to (\mathcal{U}\text{-Ens})$, on voit aussitôt qu'on est ramené à prouver 9.8 dans le cas où $F = \mathcal{U}\text{-Ens}$. Nous prouverons alors l'assertion sous la forme de la commutation de (9.8.2) aux $\varprojlim$ de type J, avec card $F\ell\, J \leq \Pi$. Comme I est filtrant, nous savons que (9.8.2) commute aux limites projectives finies (2.8). On est donc ramené par un argument standard (cf. 2.3) à prouver qu'il commute aux produits indexés par un ensemble J tel que card $J \leq \Pi$. Cela nous ramène à prouver la bijectivité de (9.8.1) lorsque J est discrète. Prouvons l'injectivité : considérons deux éléments a, b du premier membre, ils proviennent donc de $\prod_j h(i_\circ, j)$ pour $i_\circ \in I$ convenable, soient $\prod_j a(i_\circ, j)$ et $\prod_j b(i_\circ, j)$; supposons que les éléments $\prod_j h(\infty, j)$ du deuxième membre qu'ils définissent soient égaux, i.e. que pour tout j, il existe $i(j) \geq i_\circ$ tel que $a(i_\circ, j)$ et $b(i_\circ, j)$ aient même image dans $h(i,j)$. Comme I est grand devant card J, il s'ensuit qu'il existe un majorant commun $i_1 \in I$ de tout les $i(j)$, ce qui implique que les deux éléments envisagés de $\prod_j h(i_\circ, j)$ ont même image dans $\prod_j h(i_1, j)$, donc définissent le même élément du premier membre de (9.8.1), ce qui établit l'injectivité. Pour la surjectivité, soit $\prod_j a(\infty, j)$ un élément du second membre ; donc pour 145 tout $j \in J$, $a(\infty, j)$ provient d'un élément de $h(i(j), j)$, pour un $i(j) \in I$ convenable. Comme précédemment, on peut trouver un majorant commun $i \in I$ des $i(j)$, donc $\prod_j a(\infty, j)$ provient d'un élément $\prod_j a(i, j)$ de $\prod_j h(i, j)$, donc est dans l'image de (9.8.1). Cela achève la démonstration.

Corollaire 9.9. — *Soit F une catégorie Π-accessible (resp. accessible), alors pour toute catégorie J telle que* $\operatorname{card} F\ell\, J \leq \Pi$ *(resp. toute petite catégorie J) et pour tout foncteur $(X_j)_{j \in J} : J \to F$ dont la limite inductive dans F est représentable, si les X_j sont Π-accessibles (resp. accessibles) il en est de même de $\varinjlim X_j$.*

En effet, le foncteur $F \to (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$ représente par $\varinjlim X_j$ est la limite projective des foncteurs représentés par les X_j, et on applique 9.6 (ii) au système projectif formé par ces foncteurs.

Remarque 9.10. — Dans les énoncés 9.6, 9.7, 9.8 et 9.9 on peut remplacer partout les mots « Π-accessibles », « accessibles » par « Π-préaccessible », « préaccessibles ». La démonstration donnée prouve en effet également cette variante des énoncés précédents.

Proposition 9.11. — *Soit E une catégorie, satisfaisant la condition L (9.1), C une petite sous-catégorie pleine génératrice (7.1). On suppose satisfaite la condition :*

a) *E est stable par noyaux de doubles flèches, et le foncteur* Ker *sur le catégorie des doubles*
146 *flèches de E est accessible (par exemple, il commute aux petites limites inductives filtrantes).*

   Alors tout objet de E est préaccessible (9.3), a fortiori E est préaccessible. Supposons que C soit même génératrice par épimorphisme stricts (7.1), et supposons que E satisfasse aux conditions :

b) *E est stable par produits fibrés.*
c) *Toute petite famille épimorphique stricte dans E est épimorphique stricte universelle (10.3), ou dans E les petites sommes directes sont représentables, et tout épimorphisme strict de E est un épimorphisme strict universel.*

Alors tout objet de E est accessible, a fortiori E est accessible.

Le fait que, moyennant (a), tout objet de E soit accessible, résulte du fait que pour tout objet X de E, l'ensemble des sous-objets stricts de E est petit (7.4), et du

Lemme 9.11.1. — *Sous les conditions de (9.11a), soient $X \in \operatorname{ob} E$ et Π un cardinal tels que E satisfasse L_Π (9.1), que le foncteur* Ker *dans (9.11a) soit Π-accessible, et que l'ensemble des sous-objets stricts de X soit de cardinal majoré par Π. Alors X est Π-préaccessible.*

En effet, si I est un ensemble grand devant I, $(Y_i)_{i \in I}$ un système inductif dans E de limite inductive Y, et $(u_i, v_i : X \rightrightarrows Y_i)$ une double flèche telle que la double flèche composée
147 $X \overset{u,v}{\rightrightarrows} Y$ satisfasse $u = v$, prouvons qu'il existe $j \geq i$ dans I tel que $u_j = v_j$. Pour ceci, considérons le système inductif des doubles flèches $(u_j, v_j : X \rightrightarrows Y_j)_{j \geq i}$, dont la limite inductive est (u, v). Par hypothèse on a $X = \operatorname{Ker}(u, v) = \varinjlim_j \operatorname{Ker}(u_j, v_j) = \varinjlim_j X_j$, où $X_j = \operatorname{Ker}(u_j, v_j)$. Or les X_j sont des sous-objets stricts de X, donc il existe une partie I' de I formée d'indices $j \geq i$, telle que $\operatorname{card} J \leq \Pi$ et que tout X_j soit égal à un des $X_{i'}$ $(i' \in I')$.

Comme I est grand devant Π, il existe un majorant j de I' dans I. Alors X_j contient tout les $X_{j'}$ pour $j' \geq i$, donc $X_j \to X$ est un épimorphisme (puisque la famille des $X_{j'} \to X$ est épimorphique), donc un isomorphisme puisque c'est un monomorphisme strict. Donc on a $u_j = v_j$, ce qui prouve 9.11.1.

La deuxième assertion de 9.11 résulte de la première, et du

Lemme 9.11.2. — *Sous les conditions de (9.11a), b), c), soient X un objet de E, et Π un cardinal infini tels que E satisfasse L_Π* (9.1)*, que l'on ait* card ob $C_{/X} \leq \Pi$*, que pour deux objets $X' \to X$ et $X'' \to X$ de $C_{/X}$, $X' \times_X X''$ soit Π-préaccessible, enfin que X soit Π-préadmissible. Alors X est un Π-accessible.*

Avec les notations de la démonstration de 9.11.1, il suffit de prouver que tout morphisme $u : X \to Y$ provient d'un morphisme $u_i : X \to Y_i$. Or considérons la famille des morphismes $Y_i \to Y$, qui est épimorphique stricte ; grâce à b) et c), la famille des $Y_i \times_Y X \to X$ est également épimorphique stricte ; d'autre part, pour tout i, comme C est génératrice par épimorphismes stricts, la famille des flèches

$$T \longrightarrow Y_i \times_Y X$$

de source dans C est épimorphique stricte. Dans la deuxième alternative envisagée dans c), 148
on peut trouver une telle flèche épimorphique stricte, de source, une (petite) somme d'objets de C. En vertu de la transitivité de la notion de famille épimorphique stricte universelle (II 2.5) il s'ensuit alors que la famille des flèches $T_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X$ de source dans C qui se factorisent par un des $Y_i \times_Y X$ est épimorphique stricte. Soit J l'ensemble d'indices de cette famille, qui est de cardinal majoré par card ob $C_{/X} \leq \Pi$. Choisissons pour tout $\alpha \in J$ un $i = i(\alpha) \in I$ et un X-morphisme $T_\alpha \to Y_i \times_Y X$, ou ce qui revient au même, un $v_\alpha : T_\alpha \to Y_i$ tel que $p_i v_\alpha = u f_\alpha$, où $p_i : Y_i \to Y$ est le morphisme canonique. Comme I est grand devant Π, on peut choisir $i(\alpha)$ indépendant de α, soit i. Pour tout couple d'indices $\alpha, \beta \in J$, considérons les composés

$$\mathrm{pr}_1\, v_\alpha, \mathrm{pr}_2\, v_\beta : T_\alpha \times_X T_\beta \rightrightarrows Y_i.$$

Leurs composés avec $Y_i \to Y$ sont égaux, donc, comme $T_\alpha \times_X T_\beta$ est Π-préaccessible par hypothèse, il existe un indice $i' = i(\alpha, \beta) \geq i$ tel que les composés des flèches envisagées avec $Y_i \to Y_i$, soient égales. Comme l'ensemble des couples α, β est de cardinal $\leq \Pi^2 = \Pi$ (Π étant infini), il s'ensuit encore que l'on peut choisir i' indépendant de α, β. On peut évidemment supposer $i' = i$. Mais alors, la famille $(f_\alpha : T_\alpha \to X)$ étant épimorphique stricte, on peut trouver un morphisme $u_i : X \to Y_i$ tel que l'on ait $u_i f_\alpha = v_i$. On a alors $p_i u_i = p$, car pour tout α on a $(p_i u_i) f_\alpha = p_i(u_i f_\alpha) = p_i v_\alpha = u f_\alpha$, et la famille des f_α est épimorphique. Cela achève la démonstration de 9.11.2.

Remarque 9.11.3. — On voit, comme cas particulier de 9.11, que dans la catégorie E tout 149
objet est accessible, dans chacun des deux cas suivants : 1) E est une $\mathcal{U}$-catégorie abélienne à limites inductives filtrantes exactes et admettant une petite sous-catégorie génératrice (ici, c'est la *deuxième* alternative de c), qui s'applique). 2) E est la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique $X \in \mathcal{U}$. Plus généralement, il suffit que E soit la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un $\mathcal{U}$-site (II 2.1), ou encore, que E soit un $\mathcal{U}$-topos (IV 1.1).

Définition 9.12. — *Soit E une catégorie. On appelle filtration cardinale de E une filtration croissante* $(\mathrm{Filt}^{\Pi}(E))_{\Pi \geq \Pi_\circ}$ *de E par des sous-catégories strictement pleines* $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$*, indexée par les cardinaux $\Pi \in \mathscr{U}$ tels que $\Pi \geq \Pi_\circ$ (où $\Pi_\circ$ est un cardinal infini fixé, dépendant de la filtration cardinale envisagée), et satisfaisant aux conditions suivantes :*

a) *Pour tout $\Pi \geq \Pi_\circ$,* $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$ *est équivalente à une petite catégorie.*
b) *E satisfait à $L_{\Pi_\circ}$ (9.3), et pour tout $\Pi \geq \Pi_\circ$,* $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$ *est stable dans E pour les limites inductives filtrantes indexées par des ensembles ordonnés I grands devant $\Pi_\circ$ tels que* $\operatorname{card} I \leq \Pi$.
c) *Pour tout $\Pi \geq \Pi_\circ$, et tout $X \in \operatorname{ob} E$, on peut trouver un isomorphisme*

$$X \simeq \varinjlim_{I} X_i,$$

150 *où $(X_i)_{i \in I}$ est un système inductif dans E indexé par un ensemble ordonné I grand devant Π (9.1), et où les X_i sont dans* $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$*. De plus, si $X \in \operatorname{ob} \mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$, $\Pi' \geq \Pi$, on peut prendre I tel que* $\operatorname{card} I \leq \Pi'^{\Pi}$.

9.12.1. — On notera qu'il résulte de b) et c) que tout $X \in \operatorname{ob} E$ appartient à un $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$, pour Π assez grand.

Exemple 9.12.2. — Prenons $E = (\mathscr{U}\text{-}\mathrm{Ens})$, $\Phi_\circ = \aleph_\circ$, $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E) =$ sous-catégorie pleine de E formée des ensembles tels que $\operatorname{card} X \leq \Pi$. Plus généralement :

Proposition 9.13. — *Soit E une $\mathscr{U}$-catégorie. On suppose que E est stable par petites $\varinjlim$ filtrantes, par somme de deux objets et par conoyaux de doubles flèches, que E est stable par produits fibrés, et que les morphismes épimorphiques dans E sont épimorphiques stricts universels. Soit C une petite sous-catégorie pleine de E qui est génératrice par épimorphismes stricts. Soit $\Pi_\circ$ un cardinal infini* $\geq \operatorname{card} F\ell\, C$*. Pour tout cardinal $\Pi \geq \Pi_\circ$, soit* $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$ *la sous-catégorie strictement pleine de E formée des objets X de E tels qu'il existe une famille épimorphique stricte $(X_i \to X)_{i \in I}$ de but X, telle que* $\operatorname{card} I \leq \Pi$ *et que* $X_i \in \operatorname{ob} C$ *pour tout $i \in I$. Alors* $(\mathrm{Filt}^{\Pi}(E))_{\Pi \geq \Pi_\circ}$ *est une filtration cardinale de E. De plus, pour tout* $X \in \operatorname{ob} \mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$*, le cardinal de l'ensemble des flèches de $C_{/X}$ (et a fortiori, de l'ensemble des objets de $C_{/X}$) est majoré par $\Pi^{\Pi_\circ}$.*

Cette dernière assertion n'est autre que 7.6.

Pour montrer qu'on a une filtration cardinale, il faut prouver les conditions a), b) et c) de 9.12. La condition a) résulte aussitôt de 7.5.2. Pour b), supposons qu'on ait $X = \varinjlim_{I} X_i$,
151 avec $\operatorname{card} I \leq \Pi$ et les $X_i \in \operatorname{ob} \mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$. Donc la famille des morphismes canoniques $X_i \to X$ est épimorphique stricte, et par hypothèse sur les X_i, il existe pour tout $i \in I$ une famille épimorphique stricte $(X_{ij} \to X_i)_{j \in J_i}$, avec $\operatorname{card} J_i \leq \Pi$. Passant aux sommes $\amalg_i X_i$ et $\amalg_{i,j} X_{ij}$, on voit par transitivité des épimorphismes stricts universels (II 2.5) que la famille des composés $X_{ij} \to X_i \to X$ (indexée par l'ensemble somme des J_i, pour $i \in I$) est épimorphique stricte. Or on a $\operatorname{card} J \leq \Pi^2 = \Pi$, d'où la conclusion. (NB. on a seulement utilisé le fait que $\varinjlim_{I} X_i$ existe, et non le fait que I soit grand devant $\Pi_\circ$ ni même filtrant.) Prouvons enfin c). Notons que pour tout $X \in \operatorname{ob} E$, la famille des flèches $X_i \to X$ de source dans $\operatorname{ob} C$ est strictement épimorphique, puisque C est génératrice par

épimorphismes stricts, et évidemment petite, donc il existe un cardinal $\Pi \geq \Pi_\circ$ tel que $X \in \operatorname{ob}\operatorname{Filt}^{\Pi}(E)$. Il reste à prouver que si on a des cardinaux $\Pi' \geq \Pi \geq \Pi_\circ$, et si $X \in \operatorname{ob}\operatorname{Filt}^{\Pi'}(E)$, alors on a un isomorphisme

$$X \simeq \varinjlim_{I} X_i,$$

avec I grand devant Π, $\operatorname{card} I \leq \Pi'^{\Pi}$, les X_i dans $\operatorname{ob}\operatorname{Filt}^{\Pi}(E)$. Or on a, C étant génératrice par épimorphismes stricts,

$$(*) \qquad X \simeq \varinjlim_{C_{/X}} T.$$

Notons aussi qu'en rajoutant successivement à C des sommes et des conoyaux de doubles flèches de C, et de même pour la catégorie ainsi obtenue etc, on se ramène au cas où C est stable par somme de deux objets dans E et par conoyaux de doubles flèches dans E, et ceci sans détruire l'hypothèse $\Pi_\circ \geq \operatorname{card} F\ell\, C$. On peut supposer de plus que, si E contient un 152
objet initial fixé $\varnothing_E$, on ait $\varnothing_E \in \operatorname{ob} C$. Ceci implique que la catégorie $C_{/X}$ est stable par somme de deux objets et conoyaux de doubles flèches. Elle est alors filtrante, car elle est non vide, puisque si elle était vide, la relation $(*)$ montrerait que X est un objet initial, donc $C_{/X}$ contient la flèche $\varnothing_E \to X$, une contradiction. Soit alors I l'ensemble, ordonné par inclusion, des sous-catégories pleines i de $C_{/X}$ qui sont filtrantes et telles que $\operatorname{card}\operatorname{ob} i \leq \Pi$. Pour tout $i \in I$, soit $X_i \in \operatorname{ob} E$ la limite inductive du foncteur composé $i \to C_{/X} \to E$, qui existe par hypothèse. Alors on a évidemment

$$\varinjlim_{I} X_i \simeq \varinjlim_{C/X} T \simeq X.$$

D'autre part, on a déjà noté que $\operatorname{card}\operatorname{ob} C_{/X} \leq \Pi'^{\Pi_\circ}$. Il s'ensuit que I est grand devant Π, et que $\operatorname{card} I \leq (\Pi'^{\Pi_\circ})^{\Pi} = \Pi'^{\Pi\Pi_\circ} = \Pi'^{\Pi}$ en vertu du lemme suivant, dont la démonstration est laissé au lecteur (où on fera $I = C_{/X}$, $c = \Pi'^{\Pi_\circ}$) :

Lemme 9.13.1. — *Soient J une catégorie filtrante, c et Π deux cardinaux tels que $c \geq \operatorname{Sup}(\operatorname{card} F\ell\, J, \Pi)$, et telle que $\operatorname{card}\operatorname{Hom}(j, J') \leq \Pi_\circ$ pour tout couple d'objets j, j' de J. Soit I l'ensemble des sous-catégories pleines filtrantes i de J telles que $\operatorname{card}\operatorname{ob} i \leq \Pi$. Alors, ordonné par inclusion, I est grand devant Π, et on a $\operatorname{card} I \leq c^{\Pi}$.*

Ceci achève la démonstration de 9.13.

Remarque 9.13.2. — Un léger effort supplémentaire doit permettre de remplacer dans 9.13 153
l'hypothèse que E est stable par petites limites inductives filtrantes par l'hypothèse que E satisfait à L (9.1), si on suppose E stable par petites sommes, ou que dans E toute *famille* épimorphique est épimorphique universelle. Il faut alors, dans la démonstration de c), choisir $\Pi_\circ$ tel que E satisfasse à $L_{\Pi_\circ}$, et se borner aux sous-catégories pleines i de $C_{/X}$ qui sont non seulement filtrantes, mais telles que l'ensemble préordonné $\operatorname{ob} i$ soit grand devant $\Pi_\circ$. Utilisant 8. et l'hypothèse que E satisfait à $L_{\Pi_\circ}$, on trouve alors que les X_i existent, et on devrait conclure par une variante convenable de 9.13.1, que le rédacteur n'a pas vérifiée.

Proposition 9.14. — *Soient $f : E \to F$ un foncteur accessible (9.2) entre deux catégories munies de filtrations cardinales $(\mathrm{Filt}^{\Pi}(E))_{\Pi \geq \Pi_\circ}$ et $(\mathrm{Filt}^{\Pi}(F))_{\Pi \geq \Pi'_\circ}$. Alors il existe un cardinal $\Pi_1 \geq \mathrm{Sup}(\Pi_\circ, \Pi'_\circ)$ tel que pour tout cardinal $\Pi \geq \Pi_1$, on ait*

$$f(\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)) \subset \mathrm{Filt}^{\Pi^{\Pi'}}(F). \tag{9.14.1}$$

En particulier, si l'on a $\Pi = 2^c$ avec $c \geq \Pi_1$, d'où $\Pi^{\Pi_1} = 2^{c\Pi_1} = 2^c = \Pi$, on a

$$f(\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)) \subset \mathrm{Filt}^{\Pi}(F). \tag{9.14.2}$$

Signalons tout de suite le

154 ***Corollaire 9.15***. — *Soit E une catégorie, munie de deux filtrations cardinales $(\mathrm{Filt}^{\Pi}(E))_{\Pi \geq \Pi_\circ}$ et $(\mathrm{Filt'}^{\Pi}(E))_{\Pi \geq \Pi'_\circ}$. Alors il existe un cardinal $\Pi_1 \geq \mathrm{Sup}(\Pi_\circ, \Pi'_\circ)$ tel que, pour tout cardinal $c \geq \Pi_1$, posant $\Pi = 2^c$, on ait $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E) = \mathrm{Filt'}^{\Pi}(E)$.*

Preuve de 9.14. Soit c un cardinal tel que $c \geq \mathrm{Sup}(\Pi_\circ, \Pi'_\circ)$, et tel que f soit c-admissible. Soit d'autre part $\Pi_1 \geq c$ tel que l'on ait

$$f(\mathrm{Filt}^{c}(E)) \subset \mathrm{Filt}^{\Pi_1}(F). \tag{$*$}$$

Il existe un tel Π_1, grâce au fait que $\mathrm{Filt}^c(E)$ est équivalente à une petite catégorie (9.12 a)), donc $f(\mathrm{Filt}^c(E))$ l'est également, de sorte qu'on peut appliquer 9.12.1 aux objets de cette dernière pour trouver une $\mathrm{Filt}^{\Pi}(F)$ qui les contient tous (compte tenu que les $\mathrm{Filt}^{\Pi}(F)$ sont des sous-catégories pleines). Soit donc $\Pi \geq \Pi_1$, et $X \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$, prouvons que $f(X) \in \mathrm{Filt}^{\Pi^{\Pi_1}}(F)$. Écrivons en effet

$$X = \varinjlim_{I} X_i,$$

avec les $X_i \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^c(E)$, I grand devant c, $\mathrm{card}\, I \leq \Pi^c \leq \Pi^{\Pi^1}$ (9.12c)). Comme f est c-admissible, I grand devant c, on a

$$f(X) \simeq \varinjlim_{I} f(X_i),$$

et comme $\mathrm{card}\, I \leq \Pi^{\Pi_1}$ et $f(X_i) \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^{\Pi_1}(F) \subset \mathrm{ob}\,\mathrm{Filt}^{\Pi^{\Pi_1}}(F)$ par $(*)$, on a $f(X) \in \mathrm{Filt}^{\Pi^{\Pi_1}}(F)$ par 9.12 b), C.Q.F.D.

9.15.1. — La notion de filtration cardinale 9.12 n'a guère d'intérêt que lorsque les objets de E sont accessibles. Signalons qu'il résulte de 9.11 que cette condition est satisfaite lorsque,
155 en plus des hypothèses de 9.13, on suppose que le foncteur Ker sur la catégorie des doubles flèches de E est accessible. Signalons d'autre part :

Proposition 9.16. — *Soit E une catégorie munie d'une filtration cardinale $(\mathrm{Filt}^{\Pi}(E))_{\Pi \geq \Pi_\circ}$. Supposons que les éléments de $\mathrm{Filt}^{\Pi_\circ}(E)$ soient des objets accessibles de E ; alors il existe un cardinal $\Pi_1 \geq \Pi_\circ$ dans $\mathcal{U}$ tel que les objets de $\mathrm{Filt}^{\Pi_\circ}(E)$ soient Π_1-accessibles ; si Π_1 est choisi ainsi, alors pour tout cardinal $\Pi \geq \Pi_1$, on a (avec les notations de 9.3.1) :*

$$E_{\Pi} \subset \mathrm{Filt}^{\Pi}(E) \subset E_{(\Pi^{\Pi_\circ})}. \tag{9.16.1}$$

L'existence de Π_1 résulte immédiatement du fait que $\mathrm{Filt}^{\Pi_\circ}(E)$ est équivalente à une petite catégorie (9.12a)). Soit alors $\Pi \geq \Pi_1$. Si X est dans $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$, écrivant $X \simeq \varinjlim_I X_i$ avec $\operatorname{card} I \leq \Pi^{\Pi_\circ}$, $X_i \in \operatorname{ob}\mathrm{Filt}^{\Pi_\circ}(E)$ pour tout i (9.12c)), alors il résulte de 9.9 que X est $\Pi^{\Pi_\circ}$-accessible, d'où la deuxième inclusion (9.16.1). Supposons que X soit Π-accessible, et écrivons $X \simeq \varinjlim_I X_i$, avec I grand devant Π et les $X_i \in \operatorname{ob}\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$ (9.12c)). Par hypothèse sur X, l'isomorphisme donné $X \xrightarrow{\sim} \varinjlim_I X_i$ se factorise par un des X_i, donc X est isomorphe à un facteur direct de cet X_i. On en conclut que $X \in \operatorname{ob}\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$, donc la première inclusion (9.16.1), grâce au

Lemme 9.16.2. — *Tout objet de E qui est un facteur direct d'un objet de $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$ est dans $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$.*

En effet, si X est l'image d'un projecteur p dans l'objet Y de E (i.e. d'un endomorphisme p tel que $p^2 = p$), et si I est un ensemble ordonné filtrant, X est limite inductive du système 156
inductif filtrant $(Y_i)_{i\in I}$ défini par $Y_i = Y$ pour tout $i \in I$, $p : Y_i \to Y_j$ si $i < j$. Prenant I grand devant $\Pi_\circ$ et $\operatorname{card} I \leq \Pi$, on voit donc que si $Y \in \mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$, il en est de même de X en vertu de 9.12 b).

Corollaire 9.17. — *Sous les conditions de 9.16, pour tout cardinal $c \geq \Pi_1$, posant $\Pi = 2^c$, $\mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$ est identique à la sous-catégorie strictement pleine de E_Π de E formée des objets Π-accessibles.*

Corollaire 9.18. — *Soient E une catégorie satisfaisant la condition L_Π (9.1), où Π est un cardinal, et C une sous-catégorie pleine de E. On désigne par $\mathrm{Ind}(C)_\Pi$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathrm{Ind}(C)$ des ind-objets de C (8.2) formée des ind-objets de la forme $(X_i)_{i\in I}$, où I est un ensemble ordonné grand devant Π. Considérons le foncteur canonique*

$$(X_i)_{i\in I} \longmapsto \varinjlim_I X_i : \mathrm{Ind}(C)_\Pi \longrightarrow E. \tag{9.18.1}$$

a) *Pour que ce foncteur soit pleinement fidèle, il faut et il suffit que tout objet X de C soit un objet Π-accessible (9.3) de E.*
b) *Plaçons-nous sous les conditions de 9.17, en particulier $\Pi = 2^c$, et prenons $C = \mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$. Alors le foncteur (9.18.1) est une équivalence de catégories.*

L'assertion a) est une généralisation immédiate de 8.7.5 a), et se prouve de la même façon. Alors b) résulte de 9.17 et de la condition 9.12 c) des filtrations cardinales, qui implique que le foncteur envisagé est essentiellement surjectif.

Corollaire 9.19. — *Sous les conditions de 9.17, soient $C = \mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$, F une $\mathcal{U}$-catégorie, et* 157
considérons le foncteur

$$\mathbf{Hom}(E, F)_\Pi \longrightarrow \mathbf{Hom}(C, F) \tag{9.19.1}$$

induit par le foncteur « restriction à C » $f \mapsto f|C$), où la source de (9.19.1) est la catégorie des foncteurs Π-accessibles de E dans F (9.2). Le foncteur précédent est pleinement fidèle. Si F satisfait à la condition L_Π (9.1), alors le foncteur (9.19.1) est une équivalence de catégories.

La première assertion se prouve comme 7.8, en utilisant 9.18 b). La deuxième s'obtient en construisant un foncteur quasi-inverse de (9.19.1), en associant à tout foncteur $f : C \to F$ le foncteur $(X_i)_{i\in I} \to \varinjlim_i f(X_i)$ de $\mathrm{Ind}(E_\Pi)$ dans F, et en utilisant 9.18 b) pour en déduire un foncteur $\overline{f} : E \to F$. Tout revient à montrer que cedernier est Π-accessible. Or cela se prouve comme l'assertion analogue 8.7.3.

Corollaire 9.20. — *Soient E une catégorie admettant une filtration cardinale et telle que tout objet de E soit accessible (cf. 9.16), F une catégorie. Alors :*

a) *La catégorie $\mathbf{Hom}(E,F)_{acc}$ des foncteurs accessibles de E dans F (9.2) est une $\mathscr{U}$-catégorie. (NB on rappelle (9.0) que les catégories données E, F sont supposées être des $\mathscr{U}$-catégories.)*

b) *Supposons que F soit stable par petites limites inductives filtrantes. Pour toute sous-catégorie pleine C de E équivalente à une petite catégorie, à foncteur d'inclusion $i : C \to E$, considérons le foncteur correspondant*

$$i_! : \mathbf{Hom}(C,F) \longrightarrow \mathbf{Hom}(E,F)$$

158 (5.1). *Pour qu'un foncteur $f : E \to F$ soit accessible, il faut et il suffit qu'il existe une petite sous-catégorie C de E, telle que f soit dans l'image essentielle du foncteur précédent $i_!$.*

Démonstration.

a) Il suffit de prouver que pour tout cardinal Π tel que E satisfasse L_Π, la sous-catégorie pleine $\mathbf{Hom}(E,F)_\Pi$ de $\mathbf{Hom}(E,F)_{acc}$ est une $\mathscr{U}$-catégorie. Il suffit évidemment de le vérifier pour les cardinaux de la forme 2^c, avec c assez grand. Mais alors cela résulte de 9.19, puisque ($C = \mathrm{Filt}^\Pi(E)$ étant essentiellement petite) $\mathbf{Hom}(C,F)$ est évidemment une $\mathscr{U}$-catégorie.

b) Par transitivité de la formation des foncteurs $i_!$, on peut dans l'énoncé se borner aux sous-catégories C de la forme $\mathrm{Filt}^\Pi(E)$, où Π est comme dans 9.17. On voit alors aisément que le foncteur composé $\mathbf{Hom}(\mathrm{Filt}^\Pi(E),F) \to \mathbf{Hom}(E,F)_\Pi \to \mathbf{Hom}(E,F)$, où la première flèche est quasi-inverse de (9.19.1), et la deuxième est l'inclusion, n'est autre que le foncteur $i_!$, à isomorphisme près. Donc l'assertion b) résulte de 9.19.

****Exercice 9.20.1.*** — (Le présent exercice utilise les notions de site et de topos, développés dans les exposés II et IV.) Soient E un $\mathscr{U}$-topos, $\mathscr{V}$ un univers tel que $\mathscr{U} \in \mathscr{V}$, C une petite sous-catégorie pleine génératrice du $\mathscr{U}$-topos E, $\Pi_\circ \in \mathscr{U}$ un cardinal infini tel que $\Pi_\circ \in \mathrm{card}\, F\ell\, C$. Pour tout cardinal $\Pi \geq \Pi_\circ$, $\Pi \in \mathscr{U}$, soit $\mathrm{Filt}^\Pi(E)$ la sous-catégorie
159 strictement pleine de E formée des objets X tels qu'il existe une famille épimorphique stricte $(X_i \to X)_{i\in I}$ de but X, telle que $\mathrm{card}\, I \leq \Pi$ et que $X_i \in \mathrm{Ob}\, C$ pour tout $i \in I$.

a) Montrer que $(\mathrm{Filt}^\Pi(E))_{\Pi\geq\Pi_\circ}$ est une filtration cardinale de la $\mathscr{U}$-catégorie E, et qu'on peut choisir $\Pi_\circ$ tel que pour tout $\Pi \geq \Pi_\circ$, on ait les inclusions

$$E_\Pi \subset \mathrm{Filt}^\Pi(E) \subset E_{\Pi^{\Pi_\circ}},$$

où pour tout cardinal c, E_c désigne la sous-catégorie strictement pleine de E formée des objets c-accessibles.

b) Choisissant un cardinal $\Pi \geq \Pi_\circ$ tel que $\Pi = \Pi^{\Pi_\circ}$ (par exemple Π de la forme 2^c, avec $c > \Pi_\circ$), et posant $C = \mathrm{Filt}^{\Pi}(E)$, montrer qu'on a une équivalence de catégories

$$\mathrm{Ind}(C)_\Pi \xrightarrow{\approx} E,$$

(notation $\mathrm{Ind}(C)_\Pi$ de 9.18).

c) Gardons les notations de b), et soient $\mathscr{V}$ un univers tel que $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$, $E^{\sim}_{\underline{V}}$ le $\mathscr{V}$-topos de $\mathscr{V}$-faisceaux sur le site E (muni de sa topologie canonique). Désignons par $\mathrm{Ind}(C, \mathscr{V})_\Pi$ la catégorie des $\mathscr{V}$- Ind-objets de C indexés par des ensemblesd'indices préordonnés *grands devant* Π. Montrer qu'on a une équivalence de catégories

$$\mathrm{Ind}(C, \mathscr{V})_\Pi \xrightarrow{\approx} E^{\sim}_{\mathscr{V}}.$$

d) Soient $c \in \mathscr{V}$ un cardinal, $\mathrm{Ind}(E, \mathscr{V})'_c$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ind}(E, \mathscr{V})$ formée des $\mathscr{V}$-ind-objets de E indexés par un ensemble préordonné qui est grand devant tout cardinal $< c$. Prenant $c = \mathrm{card}\,\mathscr{U}$, montrer qu'on a une équivalence de catégories 160

$$\mathrm{Ind}(E, \mathscr{V})'_c \xrightarrow{\approx} E^{\sim}_{\mathscr{V}}.$$ *

9.21. — La présente section 9.21 développe des préliminaires techniques pour la démonstration du théorème 9.22 ci-dessous, qui constitue le résultat principal du présent paragraphe 9. Soit

$$p : E \to B \tag{9.21.1}$$

un foncteur fibrant, où B est une petite catégorie, et où les foncteurs images inverses

$$f^* : E_\beta \longrightarrow E_\alpha$$

associés aux flèches $f : \alpha \to \beta$ de B sont accessibles (9.2). En particulier, les catégories fibres E_α ($\alpha \in \mathrm{ob}\,B$) satisfont à la condition L (9.1), donc, B étant petite, il existe un cardinal $\Pi'_\circ \in \mathscr{U}$ tel que toutes les catégories E_α satisfont à la condition $L_{\Pi'_\circ}$. Soit $\Pi_\circ \in \mathscr{U}$ un cardinal infini $> \Pi'_\circ$, de sorte que l'on a

$$\Pi_\circ > \Pi'_\circ,\ E_\alpha \text{ satisfait } L_{\Pi'_\circ} \text{ pour tout } \alpha \in \mathrm{ob}\,B. \tag{9.21.2}$$

D'ailleurs, les hypothèses faites impliquent aussitôt l'existence d'un cardinal $c \in \mathscr{U}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \text{a)} & c \text{ est infini,} \\ \text{b)} & c \geq \mathrm{card}\, F\ell\, B, \\ \text{c)} & \text{pour toute flèche } f : \alpha \to \beta \text{ dans } B, \text{ le} \\ & \text{foncteur } f^* : E_\beta \to E_\alpha \text{ est } c\text{-accessible.} \end{cases} \tag{9.21.3}$$

Supposons de plus qu'on puisse trouver, pour chaque $a \in \mathrm{ob}\,B$, une sous-catégorie pleine 161 C_α de E_α, satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \text{a)} & \text{Pour tout } X \in \mathrm{ob}\,C_\alpha,\ X \text{ est } c\text{-accessible} \\ & \text{dans } E_\alpha \text{ (9.3).} \\ \text{b)} & \text{Pour tout } X \in \mathrm{ob}\,E_\alpha, \text{ on peut trouver un} \\ & \text{isomorphisme } X \simeq \varinjlim_I X_i \text{ dans } E_\alpha, \text{ où} \\ & \text{les } X_i \text{ sont dans } C_\alpha \text{ et où } I \text{ est un ensemble} \\ & \text{ordonné grand devant } c. \end{cases} \tag{9.21.4}$$

Soit Π un cardinal tel que l'on ait

(9.21.5) $$\Pi \geq \Pi_\circ \quad , \quad \text{donc } \Pi > \Pi'_\circ ,$$

et pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, soit

(9.21.6) $$C_\alpha^\Pi \subset E_\alpha$$

formée des objets qui se peuvent représenter sous la forme $\varinjlim_I X_i$, où I est un ensemble ordonné grand devant $\Pi'_\circ$, tel que card $I \leq \Pi$, et où les X_i sont dans C_α. Il est clair alors, grâce à 7.5.2, que C_α^Π est essentiellement petite, i.e. est équivalente à une petite catégorie.

Soit

(9.21.7) $$F = \mathbf{Hom}_B(B, E)$$

la catégorie des sections de E sur B, et soit

(9.21.8) $$F^\Pi \subset F$$

la sous-catégorie strictement pleine de F formée des sections $X : \alpha \mapsto X(\alpha)$ telles que pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$ on ait

$$X(\alpha) \in C_\alpha^\Pi .$$

162 Il est clair, les C_α^Π étant essentiellement petites, qu'il en est de même de la catégorie F^Π. Nous allons montrer que cette catégorie est génératrice, et plus précisément :

Lemme 9.21.9. — *Sous les conditions et avec les notations précédentes, on a ce qui suit :*

(i) *Tout objet de F est accessible (9.3). Si d est un cardinal $\geq \Pi'_\circ$, et si $\alpha \mapsto X(\alpha)$ est un élément de F tel que pour tout α, $X(\alpha)$ soit d-accessible dans E_α, alors X est d-accessible dans F.*

(ii) *Supposons $\Pi \leq c$, ou que $\Pi'_\circ$ soit fini (i.e. les E_α stables par petites $\varinjlim$ filtrantes). Alors tout objet X de F est isomorphe à un objet de la forme $\varinjlim_I X_i$, où les X_i sont dans F^Π et où I est grand devant Π.*

Pour prouver (i), notons qu'en vertu de (9.21.4) et de 9.9, tout objet de E_α est accessible. D'autre part, F satisfait à la condition $L_{\Pi'_\circ}$, en vertu du

Lemme 9.21.10. — *Soit $p : E \to B$ un foncteur fibrant, $F = \mathbf{Hom}_B(B, E)$, I une catégorie, $i \mapsto X_i$ un foncteur de I dans F. Pour que $\varinjlim_I X_i$ soit représentable dans F, il suffit que pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, $\varinjlim_I X_i(\alpha)$ soit représentable dans la catégorie fibre E_α ; lorsqu'il en est ainsi, alors $\varinjlim_I X_i$ « se calcule argument par argument ». En particulier, si les catégories fibres satisfont à la condition $L_{\Pi'_\circ}$ ($\Pi'_\circ$ étant un cardinal donné) il en est de même de F.*

163 Nous laissons le détail de la démonstration (facile) de 9.21.10 au lecteur, en nous contentant de remarquer qu'il est commode d'utiliser le résultat suivant, dont la démonstration est immédiate :

Corollaire 9.21.10.1. — *Avec les hypothèses et notations de 9.21.10 pour $p : E \to B$, et pour I, pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, le foncteur d'inclusion $E_\alpha \to E$ commute aux limites inductives de type I.*

Revenant alors aux conditions générales de 9.21.9, soit X un objet de F. Comme pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, $X(\alpha)$ est accessible dans E_α, il existe un cardinal $d \in \mathscr{U}$ tel que pour tout α, $X(\alpha)$ soit d-accessible dans E_α. On peut choisir $d \geq \Pi'_\circ$, de sorte que F satisfait à L_d en vertu de 9.21.10. Utilisant encore 9.21.10 pour le calcul des limites inductives $\varinjlim_I Y_i$ dans F, avec I grand devant d, on constate aussitôt que X est d-accessible. Cela prouve (i).

Nous allons prouver maintenant 9.21.9 (ii) en plusieurs étapes ((9.21.11) à (9.21.16)).

Soit donc

$$X : \alpha \longmapsto X(\alpha)$$

un objet de F. En vertu de (9.21.4 b)), on peut, pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, trouver un ensemble ordonné I_α grand devant c, et un isomorphisme $X(\alpha) = \varinjlim_{i \in I_\alpha} X(\alpha)_i$, où $i \mapsto X(\alpha)_i$ est un système inductif de type I_α dans E_α, les $X(\alpha)_i$ dans C_α. Considérons l'ensemble ordonné produit $I = \Pi_\alpha I_\alpha$; il est clair qu'il est grand devant c, et que les systèmes inductifs 164
précédents donnent naissance à des systèmes inductifs dans les E,

(9.21.11) $$i \longmapsto X(\alpha)_i \in \operatorname{ob} C_\alpha, i \in \operatorname{ob} I,$$

indexés par le même ensemble ordonné I, et à des isomorphismes

(9.21.12) $$X(\alpha) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_I X(\alpha)_i \text{ dans } E_\alpha,$$

pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$. Nous supposons fixées par la suite des données (9.21.11) et (9.21.12).

Lemme 9.21.13. — *Sous les conditions précédentes, on peut trouver une application $\varphi : I \to I$ telle que $\varphi(i) \geq i$ pour tout $i \in I$, et une application $(i, f) \mapsto \lambda(i, f)$ de $I \times \mathrm{Fl}\, B$ dans $\mathrm{Fl}\, E$, satisfaisant aux conditions suivantes :*

a) *Pour $i \in I$, $(f : \alpha \to \beta) \in F\ell B$, $\lambda(i, f)$ est un f-morphisme de $X(\alpha)_i$ dans $X(\beta)_{\varphi(i)}$, rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
X(\alpha) \arrow[rr, "X(f)"] & & X(\beta) \\
& & X(\beta)_{\varphi(i)} \arrow[u] \\
X(\alpha)_i \arrow[uu] \arrow[urr, "\lambda(i,f)"] & &
\end{tikzcd}$$

$$\alpha \xrightarrow{\ f\ } \beta \quad ,$$

où les flèches verticales sont les morphismes canoniques déduits de (9.21.12).

b) *Pour tout $i \in I$, et $(f : \alpha \to \beta) \in \mathrm{Fl}\, B$, on a commutativité dans le diagramme* 165

$$\begin{tikzcd}
 & X(\beta)_{\varphi^2(i)} \\
X(\alpha)_{\varphi(i)} \arrow[ur, "\lambda(\varphi(i),f)"] & X(\beta)_{\varphi(i)} \arrow[u] \\
X(\alpha)_i \arrow[u] \arrow[ur, "\lambda(i,f)"'] & \\
\alpha \arrow[r, "f"] & \beta
\end{tikzcd} .$$

c) *Pour tout couple de flèches consécutives* $\alpha \xrightarrow{f} \beta \xrightarrow{g} \gamma$ *de* $\boldsymbol{B}$*, on a commutativité dans le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
X(\alpha) \arrow[r, "X(f)"] & X(\beta) \arrow[r, "X(g)"] & X(\gamma) \\
 & & X(\gamma)_{\varphi^2(i)} \arrow[u] \\
 & X(\beta)_{\varphi(i)} \arrow[uu] \arrow[ur, "\lambda(\varphi(i),g)"] & X(\gamma)_{\varphi(i)} \arrow[u] \\
X(\alpha)_i \arrow[uuu] \arrow[ur, "\lambda(i,f)"] \arrow[urr, "\lambda(i,gf)"'] & & \\
\alpha \arrow[r, "f"] & \beta \arrow[r, "g"] & \gamma
\end{tikzcd} ,$$

où les flèches verticales sont celles déduites de (9.21.12).

166 On notera d'ailleurs que la commutativité des deux trapèzes supérieurs dans b) est déjà contenu dans a), de sorte que b) affirme en fait la commutativité du triangle inférieur du diagramme envisagé.

Prouvons 9.21.13. Soient $i \in \boldsymbol{I}$, et $f : \alpha \to \beta$ une flèche dans $\boldsymbol{B}$. Considérons le composé $X(\alpha_i) \to X(\alpha) \xrightarrow{X(f)} X(\beta) \simeq \varinjlim_j X(\beta)_j$, il définit un morphisme dans $\boldsymbol{E}$:

$$X(\alpha)_i \to f^*(X(\beta)) \simeq f^*(\varinjlim_j X(\beta)_j) \simeq \varinjlim_j f^*(X(\beta)_j),$$

où la dernière égalité provient du fait que f^* est c-accessible (9.21.3 c)et que $\boldsymbol{I}$ est grand devant c. En vertu de (9.21.4 a)), comme $X(\alpha) \in \operatorname{ob} C_\alpha$, le morphisme envisagé se factorise par un $f^*(X(\alpha)_j)$, où j *a priori* dépend de i et de $f \in \mathrm{F}l\,(\boldsymbol{B})$. Mais en vertu de (9.21.3 b)), et comme $\boldsymbol{I}$ est grand devant c), on peut choisir j indépendant de f, soit $j = \varphi(i)$. $\boldsymbol{I}$ étant filtrant, on peut supposer $\varphi(i) \geq i$. On trouve ainsi, pour $i \in \boldsymbol{I}$ et $f \in \mathrm{F}l\, F$, un morphisme

$$X(\alpha)_i \longrightarrow f^*(X(\beta)_{\varphi(i)}),$$

ou ce qui revient au même, un f-morphisme

$$\lambda(i,f) \,:\, X(\alpha)_i \longrightarrow X(\beta)_{\varphi(i)},$$

qui par construction rend commutatif le diagramme

$$D(f) \qquad \begin{tikzcd} X(\alpha) \arrow[r, "X(f)"] & X(\beta) \\ & X(\beta)_{\varphi(i)} \arrow[u] \\ X(\alpha)_i \arrow[uu] \arrow[ur, "\lambda(i,f)"] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, "f"] & \beta \end{tikzcd} \quad .$$

Considérons alors, pour i, f, g donnés, le triangle inférieur du diagramme envisagé dans 167
9.21.13 c) ; il n'est pas clair qu'il est commutatif, mais les deux composés $X(\alpha)_i \rightrightarrows X(\beta)_{\varphi^2(i)}$ deviennent égaux après composition avec $X(\beta)_{\varphi^2(i)} \to X(\beta)$, comme il résulte de la commutativité des deux trapèzes supérieurs, et du trapèze contour global, qui sont les diagrammes $D(f)$, $D(g)$ et $D(gf)$ respectivement. Donc, comme $X(\alpha)_{\varphi^2(i)}$ est c-accessible (9.21.4 a)) et que $X(\alpha) \simeq \varinjlim_{j\in I} X(\alpha)_j$, avec I grand devant c, il s'ensuit qu'on peut trouver un élément $j \geq \varphi^2(i)$ de I, tel que les deux flèches envisagées deviennent égales après composition avec $X(\beta)_{\varphi^2(i)} \to X(\beta)_j$. A priori, j dépend de i, f et g. Mais pour i fixé, l'ensemble des couples possibles f, g est de cardinal $\geq c^2 = c$, en vertu de (9.21.3 a) et b)), donc, I étant grand devant c, on peut choisir j indépendant de f et de g, soit $j = \varphi'(i) \geq \varphi^2(i) \geq \varphi(i)$. Soit alors, pour tout $i \in I$ et $f \,:\, \alpha \to \beta$,

$$\lambda'(i,f) \,:\, X(\beta)_i \longrightarrow X(\beta)_{\varphi'(i)}$$

le f-morphisme composé $X(\alpha)_i \to X(\beta)_{\varphi(i)} \to X(\beta)_{\varphi'(i)}$, où la deuxième flèche est le morphisme de transition. Il est alors immédiat, par construction, que (φ', λ') satisfait les conditions 9.21.13 a) et c), pour (φ, λ). Procédant de même pour la condition b), on voit qu'on peut choisir φ' de telle façon que cette condition soit également satisfait pour (φ', λ'). Cela achève la preuve de (9.21.13).

9.21.14. — Soit maintenant 168

$$J \subset I$$

une partie de I satisfaisant les conditions suivantes :

a) J est filtrante,
b) pour tout $j \in J$, on a $\varphi(j) \in J$,
c) Pour tout $a \in \operatorname{ob} B$, $X_J(\alpha) = \varinjlim_{i\in J} X(\alpha)_i$ est représentable dans E_α.

Les conditions a) et c) sont satisfaites en particulier si J est grand devant $\Pi'_\circ$ (9.21.2). Il résulte alors de 9.21.10.1 que pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, $X_J(\alpha)$ est la limite inductive $\varinjlim_{i\in J} X(\alpha)_i$ dans E. Or pour une flèche $f \,:\, \alpha \to \beta$ de B, les flèches $\lambda(i,f)$, pour i variable dans J, définissent grâce à (9.21.13 b)) un morphisme de ind-objets de $(X(\alpha)_i)_{i\in J}$ dans $(X(\beta)_i)_{i\in J}$, d'où un homomorphisme

$$X_J(f) : X_J(\alpha) \to X_J(\beta)$$

sur les limites inductives, qui est manifestement un f-homomorphisme. Utilisant (9.21.13 (c)), on trouve que l'on a des relations de transitivité

$$X_J(gf) = X_J(g)X_J(f),$$

de sorte que l'on à défini une section $X_J \in \operatorname{ob} F$ de E sur B. Enfin (9.21.13 a)) nous montre que les homomorphismes canoniques

$$X_J(\alpha) \longrightarrow X(\alpha) \quad , \quad \alpha \in \operatorname{ob} B,$$

sont fonctoriels en α, de sorte qu'on a un homomorphisme canonique

$$u_J : X_J \longrightarrow X.$$

169 D'autre part, si

$$J' \supset J$$

est une autre partie de I satisfaisant aux conditions a), b), c) ci-dessus, on trouve un homomorphisme canonique

$$u_{J',J} : X_J \longrightarrow X_{J'},$$

de sorte que les X_J forment un système inductif dans F, paramétré par l'ensemble (ordonné par inclusion) des parties J de I satisfaisant les conditions envisagées. Enfin, les homomorphismes u_J ci-dessus définissent un homomorphismes de ce système inductif dans (le système inductif constant défini par) X.

9.21.15. — Soit maintenant K un ensemble de parties J de I, satisfaisant aux conditions a), b), c) envisagées dans 9.21.14, et supposons que K soit filtrant, et de réunion I. Alors il est clair que l'on a

$$\varinjlim_{J\in K} X_J \xrightarrow{\sim} X,$$

en utilisant 9.21.10.1 qui nous ramène à vérifier qu'on a un isomorphisme argument par argument.

Prenons par exemple pour K l'ensemble de toutes les parties J de I qui sont grandes devant $\Pi'_\circ$, stables par φ, et telles que $\operatorname{card} J \leq \Pi$. Alors par définition (9.21.6) de C^Π_α, on a, pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, $X_J(\alpha) \in \operatorname{ob} C^\Pi_\alpha$, donc $X_J \in \operatorname{ob} F^\Pi$. Par suite, 9.21.9 (ii) sera prouvé si nous établissons que K est grand devant Π (donc filtrant) et de réunion I. Il suffira évidemment, pour ceci, de prouver que toute partie S de I telle que $\operatorname{card} S \leq \Pi$ est
170 contenue dans une $J \in K$. Ceci résultera en effet de l'hypothèse préliminaire énoncée dans 9.21.9 (ii), et du

Lemme 9.21.16. — *Soient I un ensemble ordonné, Π un cardinal infini, $\varphi : I \to I$ une application de I dans lui-même.*

a) *Supposons I filtrant. Alors pour toute partie S de I telle que* $\operatorname{card} S \leq \Pi$*, il existe une partie filtrante $J \supset S$ de I, telle que $\varphi(J) \subset J$ et* $\operatorname{card}(J) \leq \Pi$.
b) *Soit $\Pi'_\circ$ un cardinal $< \Pi$, et supposons I grand devant Π. Alors pour toute partie S de I telle que* $\operatorname{card} S \leq \Pi$*, il existe une partie $J \supset S$ de I grande devant $\Pi'_\circ$, telle que $\varphi(J) \subset J$ et* $\operatorname{card} J \leq \Pi$.

Prouvons par exemple b) (la démonstration de a) étant analogue et plus simple). Soit P l'ensemble des parties de I de cardinal $\leq \Pi$, et soit $T \mapsto i_T : P \to I$ une application telle que pour $T \in P$, i_T soit un majorant de T dans I ; l'existence de cette application exprime simplement l'hypothèse que I est grand Π. Soit A un ensemble bien ordonné tel que card $A = \Pi$, et tel que pour tout $a \in A$, l'ensemble des $a' \leq a$ soit de cardinal $< \Pi$. Il s'ensuit en particulier, comme $\Pi'_\circ < \Pi$, que A *est grand devant* $\Pi'_\circ$. Définissons par récurrence transfinie des applications

$$S \longmapsto S_a : P \longrightarrow P \quad (a \in A),$$

par les formules suivantes :

$S_\circ = S$, $S_{a+1} = S_a \cup \varphi(S_a) \cup \{i_{S_a}\}$, $S_a = \bigcup_{a<a} S_a$ si a un ordinal limite.

Posons alors, pour $S \in P$, 171

$$J(S) = \bigcup_{a \in A} S_a.$$

Il est clair alors que $J(S) \supset S$, que $J(S)$ est stable par φ, que card $J(S) \leq \Pi$ (puisque card $A = \Pi$), enfin que $J(S)$ est grand devant $\Pi'_\circ$ (en utilisant le fait que A est grand devant $\Pi'_\circ$,

Cela démontre 9.21.16 et achève la démonstration de 9.21.9.

Signalons aussi une variante de 9.21.9 :

Lemme 9.21.17. — *Les notations sont celles de 9.21.9. On désigne par F' la sous-catégorie pleine* $\mathbf{Homcart}_B(B, E)$ *de* $F = \mathbf{Hom}_B(B, E)$ *formée des sections cartésiennes de E sur F. Alors :*

(i) *Tout objet de F' est accessible. Plus précisément, soit $\alpha \mapsto X(\alpha)$ un élément de F', et soit d un cardinal tel que $d \geq \Pi'_\circ$, $d \geq c$, et tel que pour tout $\alpha \in$ ob B, $X(\alpha)$ soit un objet d-accessible de E. Alors X est un objet d-accessible de F'.*

(ii) *Supposons $\Pi \leq c$ et que les foncteurs $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ soient $\Pi'_\circ$-accessibles, ou que les catégories E_α soient stables par petites limites inductives filtrantes, et que les foncteurs $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ commutent aux dites limites inductives. Alors tout objet X de F' est isomorphe à un objet de la forme $\varinjlim_I X_i$, où pour tout $i \in I$, X_i est un objet de la sous-catégorie pleine ${F'}^{\Pi} = F' \cap F^{\Pi_\circ}$ de F', et où I est grand devant Π.*

La démonstration étant toute analogue à celle de 9.21.9, nous nous contentons d'indiquer 172
les points où une modification de cette dernière est nécessaire. On note d'abord :

Lemme 9.21.18. — *L'énoncé 9.21.10 reste valable lorsqu'on y remplace* $F = \mathbf{Hom}_B(B, E)$ *par* $F' = \mathbf{Homcart}_B(B, E)$*, pourvu que l'on suppose que les foncteurs images inverse $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ commutent aux limites inductives de type I.*

Si donc sous les conditions de 9.21.17, d est un cardinal tel que $d \geq c$ et $d \geq \Pi'_\circ$, il résulte de ce qui précède et de l'hypothèse (9.21.3 c)) que pour tout ensemble ordonné I grand devant d, les limites inductives de type I sont représentables dans F' et se calculent argument par argument, d'où la conclusion 9.21.17 (i) par un argument immédiat.

Pour prouver (ii), il faut donner un complément à 9.21.13 :

Lemme 9.21.19. — *Sous les conditions de 9.21.13, supposons que $X \in \operatorname{ob} F'$ i.e. que X soit une section cartésienne de E sur B. Alors on peut renforcer la conclusion par l'assertion qu'il existe une fonction μ qui, à tout $i \in I$ et toute flèche $f : \alpha \to \beta$ de B, associe un morphisme $\mu(i, f) : f^*X(\beta)_i \to X(\alpha)_{\varphi(i)}$ dans E_α, de telle façon que l'on ait :*

d) *Pour tout $i \in I$ et toute flèche $f : \alpha \to \beta$ de B, les deux diagrammes suivants sont commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
 & f^*X(\beta)_{\varphi^2(i)} & X(\alpha)_{\varphi^2(i)} & \\
X(\alpha)_{\varphi(i)} \arrow[ur, "\lambda(\varphi(i),f)"] & & & f^*X(\alpha)_{\varphi(i)} \arrow[ul, "\mu(\varphi(i),f)"'] \\
 & f^*X(\beta)_i \arrow[ul, "\mu(i,f)"] \arrow[uu] & x(\alpha)_i \arrow[uu] \arrow[ur, "\lambda(i,j)"'] &
\end{tikzcd}$$

.

173 Pour le prouver, on procède comme dans 9.21.3, en considérant le morphisme composé $f^*(X(\beta)_i) \to f^*(X(\beta)) \xrightarrow{X(f)^{-1}} X(\alpha)$, où (comme déjà dans l'écriture de la condition d)) on identifie dans les notations un f-morphisme $R \to S$ de E avec le morphisme correspondant $R \to f^*(S)$ de E_α. Comme $X(\alpha) = \varinjlim_j X(\alpha)_j$, et I grand devant c, on peut factoriser le morphisme précédent par un des $X(\alpha)_j$, où j *a priori* dépend de i *et* de f, mais peut être choisi indépendant de f, soit $\psi(i)$. Quitte à agrandir la fonction φ de 9.21.13, on peut supposer que $\psi = \varphi$. En procédant comme pour les conditions b) et c) de 9.21.13, on voit que, quitte à agrandir encore l'application φ, on peut supposer que les deux diagrammes de 9.21.19 d) sont commutatifs.

9.21.20. — L'application φ étant choisie comme dans 9.21.19, reprenons l'argument de 9.21.14, où il faut cependant supposer que J satisfait, en plus des conditions énoncées a) b) c), à la condition :

d) Pour tout flèche $f : \alpha \to \beta$ dans B, le foncteur $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ commute aux limites inductives de type J.

174 Je dis que, moyennant cette condition supplémentaire, la section X_J de E sur B est cartésienne, i.e. pour toute flèche $f : \alpha \to \beta$ de B, le morphisme

$$(*) \qquad X_J(\alpha) \longrightarrow f^*X_J(\beta)$$

est un isomorphisme. En effet, en vertu de la condition d) ci-dessus, le but du morphisme envisagé s'identifie à $\varinjlim_{i \in J} f^*(X(\beta)_i)$, et le morphisme s'obtient par passage aux $\varinjlim_J$ à partir du morphisme de ind-objets dans E_α

$$(X(\alpha)_i)_{i \in J} \longrightarrow (f^*)(X(\beta)_i)_{i \in J},$$

déduit des morphismes $\lambda(i, f) : X(\alpha)_i \to f^*(X(\beta)_{\varphi(i)})$ pour $i \in J$. Or les conditions explicitées dans 9.21.19 nous assurent que l'homomorphisme précédent de ind-objets est en fait un isomorphisme, un inverse étant obtenu par l'homomorphisme déduit du système des $\mu(i, f)$, pour $i \in J$. Cela prouve notre assertion que $(*)$ est un isomorphisme, donc que $X \in \operatorname{ob} F'$.

9.21.21. — Nous allons supposer maintenant que les foncteurs $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ sont *$\Pi'_\circ$-accessibles.* Alors les conditions sur J envisagées dans 9.21.20 sont satisfaites si J est grand devant $\Pi'_\circ$, stable par φ et tel que $\operatorname{card} J \leq \Pi$, et on achève la démonstration de 9.21.17 comme en 9.21.15.

Théorème 9.22. — *Soit $p : E \to B$ un foncteur fibrant, où B est une catégorie essentiellement* 175
équivalente à une petite catégorie, et où pour toute flèche $f : \alpha \to \beta$ dans B le foncteur image inverse $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ est accessible (9.2). Supposons de plus que pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} E$, la catégorie fibre E_α admette une filtration cardinale (9.12) et que tout objet de E_α soit accessible (9.3). Alors chacune des catégories $F = \mathbf{Hom}_B(B, E)$ et $F' = \mathbf{Homcart}_B(B, E)$ admet une petite sous-catégorie pleine génératrice par épimorphismes stricts (7.1), et chacun de ses objets est accessible.

Il est immédiat que l'énoncé ne change pas essentiellement quand on remplace B par une sous-catégorie pleine $B_\circ$ telle que le foncteur d'inclusion $B_\circ \to B$ soit une équivalence, et E par $E_\circ = E \times_B B_\circ$. Cela nous permet de supposer que B est une petite catégorie.

Soit, pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, $(\operatorname{Filt}^\Pi(E))_{\Pi \geq \Pi_\alpha}$ une filtration cardinale de E_α. Soit $c_\circ \in \mathcal{U}$ un cardinal satisfaisant les conditions suivantes :

$$(9.22.1) \qquad \begin{cases} c_\circ \geq \operatorname*{Sup}_{\alpha \in \operatorname{ob} B} \Pi_\alpha \quad , \quad c_\circ \geq \operatorname{card} \operatorname{Fl} B; \\ \text{pour toute flèche } f : \alpha \to \beta \text{ de } B,\ f^* : E_\beta \to E_\alpha \text{ est } c_\circ\text{-accessible;} \\ \text{pour toute } \alpha \in \operatorname{ob} B, \text{ les objets de } \operatorname{Filt}^{\Pi_\alpha}(E_\alpha) \text{ sont } c_\circ\text{-accessibles.} \end{cases}$$

Posons

$$c = 2^{c_\circ},$$

de sorte que $c > c_\circ$, et pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, soit

$$C_\alpha = \operatorname{Filt}^c(E_\alpha).$$

Je dis que les conditions préliminaires à 9.21.9 et 9.21.17 sont vérifiées, en faisant $\Pi = \Pi_\circ =$ 176
c. C'est clair pour (9.21.2) et (9.21.3). Pour (9.21.4 a)), cela résulte de 9.17, et (9.21.4 b)) résulte de la condition 9.12 c) pour une filtration cardinale. Notons d'ailleurs que la condition 9.12 b) des filtrations cardinales implique que pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, on a $C_\alpha^\Pi = C_\alpha = \operatorname{Filt}^C(E_\alpha)$, où C_α^Π est défini dans (9.21.6). Par suite, 9.22 résulte de 9.21.9 et de 9.21.17, et de façon plus précise, on a prouvé le

Corollaire 9.23. — *Sous les conditions de 9.22, si $c_\circ \in \mathcal{U}$ est un cardinal satisfaisant aux conditions (9.22.1), et si $c = 2^{c_\circ}$, alors la sous-catégorie F^c de F (resp. F'^c de F') formée des X tels que $X(\alpha) \in \operatorname{ob} \operatorname{Filt}^c(E)$ pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$ est essentiellement petite et génératrice par épimorphismes stricts ; plus précisément, tout objet X de F (resp. F') est isomorphe à un objet de la forme $\varinjlim_I X_i$, où les X_i sont dans F^c (resp. dans F'^c), et où I est un ensemble ordonné grand devant c.*

Moyennant des hypothèses légèrement plus fortes dans 9.22, on peut d'ailleurs préciser considérablement 9.22 et 9.23 :

Corollaire 9.24. — *Sous les conditions de 9.22, supposons que chacune des catégories E_α ($\alpha \in \operatorname{ob} E$) est stable par petites limites inductives filtrantes, et que pour tout $\Pi \geq \Pi_\alpha$, $\operatorname{Filt}^\Pi(E_\alpha)$ est stable par limites inductives filtrantes indexées par des ensembles ordonnés filtrants I tels*
177 *que $\operatorname{card} I \leq \Pi$ (ce qui renforce légèrement la condition 9.12 b) des filtrations cardinales). Dans le cas où c'est F' qu'on considère, supposons de plus que pour toute flèche $f : \alpha \to \beta$ de B, le foncteur $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ commute aux petites limites inductives filtrantes. Soit enfin $c_\circ \in \mathcal{U}$ un cardinal satisfaisant aux conditions (9.22.1), et considérons, pour tout cardinal $\Pi \geq c = 2^{c_\circ}$, la sous-catégorie strictement pleine F^Π (resp. ${F'}^\Pi$) de F (resp. de F') formée des X tels que l'on ait $X(\alpha) \in \operatorname{Filt}^\Pi(E_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$. Alors les sous-catégories envisagées définissent une filtration cardinale (9.12) de F (resp. de F').*

Il faut vérifier les conditions a), b), c) de 9.12. Les conditions a) et b) résultent des conditions analogues pour les filtrations cardinales données des E_α, et de 9.21.10 (resp. 9.21.18, compte tenu de la deuxième des conditions (9.22.1)). Reste à prouver c), dont la première partie résulte aussitôt de 9.21.9 (resp. 9.21.17), en faisant $\Pi'_\circ = 0$, $\Pi_\circ = c$. Il reste à prouver que si on a deux cardinaux $\Pi' \geq \Pi \geq c$, alors pour tout X dans $F^{\Pi'}$ (resp. ${F'}^{\Pi'}$) on a $X \simeq \varinjlim_{i\in K} X_i$, avec les X_i dans F^Π (resp. ${F'}^\Pi$), K grand devant Π, et $\operatorname{card} K \leq {\Pi'}^\Pi$. Pour ceci, reprenons les démonstrations de 9.21.9 (ii) et de 9.21.17 (ii). On peut supposer que chaque I_α est de cardinal $\leq \Pi'$ en vertu de la condition 9.12 c) sur la filtration cardinale de E_α, donc on aura

$$\operatorname{card} I \leq ({\Pi'}^\Pi)^{\operatorname{card} \operatorname{ob} B} \leq ({\Pi'}^\Pi)^c = {\Pi'}^{\Pi c} = {\Pi'}^\Pi.$$

L'ensemble d'indices K utilisé dans 9.21.15 resp. 9.21.21 est l'ensemble des parties J de I qui sont filtrantes (i.e. grandes devant $\Pi'_\circ = 0$), stables par φ et telles que $\operatorname{card} J \leq \Pi$. Il est alors immédiat que l'on a

$$\operatorname{card} K \leq (\operatorname{card} I)^\Pi \leq ({\Pi'}^\Pi)^\Pi = {\Pi'}^{\Pi^2} = {\Pi'}^\Pi,$$

178 ce qui achève la démonstration de 9.24.

Pour terminer, il convient de donner un énoncé débarrassé des hypothèses un peu techniques de 9.22, en remplaçant celles-ci par la conjonction, pour les E_α, des hypothèses qui interviennent dans 9.11 (qui assurent l'accessibilité des objets des E) et dans 9.13 (qui assurent l'existence d'une filtration cardinale dans E) :

Corollaire 9.25. — *Soit $p : E \to B$ un foncteur fibrant, où B est une catégorie équivalente à une petite catégorie, et où pour toute flèche $f : \alpha \to \beta$ de B, le foncteur $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ est accessible (9.2). On suppose de plus que, pour tout $\alpha \in \operatorname{ob} B$, la catégorie fibre E_α satisfait aux conditions suivantes :*

a) *E_α admet une petite sous-catégorie pleine, génératrice par épimorphismes stricts (7.1).*

b) E_α *est stable par produits fibrés, par noyaux de doubles flèches, par sommes de deux objets et par conoyaux de doubles flèches, enfin par petites limites inductives filtrantes* [3].

c) *Le foncteur* $\mathrm{Ker}(u, v)$ *sur la catégorie des doubles flèches de* E_α *est accessible (par exemple, commute aux petites limites inductives filtrantes).*

d) *Tout épimorphisme strict de* E_α *(10.2) est un épimorphisme strict universel.*

Sous ces conditions, chacune des catégories $F = \mathbf{Hom}_B(B, E)$ *et* $F' = \mathbf{Homcart}_B\,(B, E)$ *admet une petite sous-catégorie génératrice par épimorphismes stricts, et tous ses objets sont accessibles (9.3).*

De plus, 9.24 nous donne : 179

Corollaire 9.26. — *Sous les conditions de* 9.25, *et dans le cas où on considère* $F' = \mathbf{Homcart}_B(B, E)$, *supposons que les foncteurs* $f^* : E_\beta \to E_\alpha$ *commutent aux petites limites inductives filtrantes. Alors* F *(resp.* F'*) admet une filtration cardinale, qu'on peut expliciter par le procédé de 9.24.*

10. Glossaire

Pour la commodité du lecteur, nous rassemblons ici les définitions de quelques termes utilisés dans les numéros précédents. Nous désignons par C une catégorie.

10.1. Cartésien, Cocartésien. — Un diagramme de C

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

est dit *cartésien* s'il est commutatif et si le morphisme canonique de A dans le produit fibré $C \times_D B$ est un isomorphisme. Il est dit *cocartésien* si le diagramme correspondant de la catégorie opposée à $\mathscr{A}$ est cartésien.

10.2. Épimorphisme, épimorphisme strict. — etc. Cf. 10.3. 180

10.3. Famille épimorphique, épimorphique stricte. — etc. : Une famille

$$f_i : A_i \longrightarrow B, i \in I,$$

de flèches de même but dans C est dite famille *épimorphique*, si pour tout objet C de C, l'application induite par les f_i :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B, C) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A_i, C) \tag{10.3.1}$$

est injective.

[3] Cette dernière condition étant probablement inutile, cf. 9.13.2.

On dit que la famille envisagée est *épimorphique stricte* si l'image de l'application (10.3.1) est formée des familles (g_i) telles que pour tout objet R de C, tout couple d'indices $i, j \in I$ et tout couple de flèches $u : R \to A_i, v : R \to A_j$ avec $f_i u = f_j v$, on a aussi $g_i u = g_i v$. Lorsque les produits fibrés $A_i \times_B A_j$ sont représentables pour $i, j \in I$, il revient au même de dire que l'image essentielle de (10.3.1) est formée des (g_i) telles que pour tout couple d'indices i, $j \in I$, on ait $g_i \operatorname{pr}_1 = g_i \operatorname{pr}_2$, où $\operatorname{pr}_1, \operatorname{pr}_2$ sont les deux projections de $A_i \times_B A_j$. On dit que la famille $(f_i)_{i \in I}$ est une *famille épimorphique effective* si la condition précédente est vérifiée, i.e. si elle est épimorphique stricte, et si les produits fibrés $A_i \times_A A_j$ sont représentables.

On dit que la famille $(f_i)_{i \in I}$ est une famille *épimorphique universelle,* (resp. *épimorphique effective universelle*) si les morphismes f_i sont quarrables (10.3), et si pour toute flèche $B' \to B$, la famille des flèches $f'_i : A'_i \to A_i \times_B B'$, $i \in I$, déduite de la famille $(f_i)_{i \in I}$ par changement de base $B' \to B$, est épimorphique (resp. épimorphique effective).

181 La notion de famille *épimorphique stricte universelle* sera définie dans (II 2.5, 2.6). Notons que lorsque les morphismes f_i sont quarrables (par exemple si dans C les produits fibrés sont représentables) cette notion coïncide avec celle de famille épimorphique effective universelle (utiliser II 2.4). Dans le cas général, on a entre les six variantes envisagées de la notion d'épimorphicité les implications logiques :

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{épimorphique effective universelle} \arrow[dll, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
\text{épimorphique effective} \arrow[ddr, Rightarrow] & & & \text{épimorphique stricte universelle} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & & \text{épimorphique stricte} \arrow[dl, Rightarrow] & & \text{épimorphique universelle} \arrow[dlll, Rightarrow] \\
 & \text{épimorphique} & & &
\end{tikzcd}$$

Un morphisme $f : A \to B$ de $\mathscr{A}$ s'appelle un *épimorphisme (resp. un épimorphisme strict, resp. un épimorphisme effectif, resp. un épimorphisme universel, resp. un épimorphisme effectif universel, resp. un épimorphisme strict universel)* si la famille de morphisme réduit au seul élément f est épimorphique (resp. ...).

10.4. Famille monomorphique, monomorphique stricte. — etc. Une famille de flèches $f_i : A_i \to B$ de C est dite *monomorphique (resp. monomorphique stricte,...)* si en tant que famille de flèches de la catégorie opposée C° elle est épimorphique (resp. épimorphique stricte,...). Une flèche $f : A \to B$ de $\mathscr{A}$ est appelée un *monomorphisme (resp. un mono-*
182 *morphisme strict....)* si la famille réduite à f est monomorphique (resp. monomorphique stricte,...), i.e. si f en tant que flèche de la catégorie opposée C° est un épimorphisme (resp. un épimorphisme strict,...).

10.5. Monomorphisme, monomorphisme strict. — etc.Cf. 10.4.

10.6. Projecteur, image d'un projecteur, facteur direct d'un objet. — Soit $f : X \to X$ un endomorphisme d'un objet de C. On dit que f est un *projecteur* si on a $f^2 = f$. Alors le couple (f, id_X) admet un conoyau représentable X' si et seulement si il admet un noyau représentable X'', et lorsqu'il en est ainsi, il existe un unique isomorphisme $u : X' \to X''$ dans C tel que $iup = f$, où $p : X \to X'$ et $i : X'' \to X$ sont les morphismes canoniques. On identifie alors généralement X' et X'', et on l'appelle l'*image du projecteur* f ; on dit que le projecteur f *admet une image* si $\mathrm{Ker}(f, \mathrm{id}_X)$ est représentable i.e. $\mathrm{Coker}(f, \mathrm{id}_X)$ est représentable. Un sous-objet (resp. un quotient) Y de X est appelé un *facteur direct* de X si on peut trouver un projecteur f dans X se factorisant par Y, et admettant Y comme image en tant que sous-objet (resp. en tant que quotient) de X. On dit parfois, par abus de langage, qu'un objet de C est un *facteur direct de* X, s'il est isomorphe à l'image d'un projecteur dans X.

10.7. Quarrable. — Une flèche $f : A \to B$ de C est dite *quarrable* si pour toute flèche $B' \to B$ de C, le produit fibré $A \times_B B'$ est représentable dans C.

10.8. Quotient, quotient strict. — etc. 183

Soit A un objet de C. Deux épimorphismes $f : A \to B$, $f' : A \to B'$ de source A sont dits *équivalents* s'il existe un isomorphisme $u : B \xrightarrow{\sim} B'$ tel que $uf = f'$. On obtient ainsi une relation d'équivalence dans l'ensemble des épimorphismes de source A, dont les classes sont appelées les *quotients, ou objets quotients,* de A. Pour tout quotient de A, on suppose généralement choisi un élément de cette classe, soit $f : A \to B$, et on parle souvent (par abus de langage) du quotient B de A (ou du quotient $f : A \to B$ de A). On dit que B est un *quotient strict* (resp. un *quotient effectif, resp. un quotient universel,...*) si le morphisme $f : A \to B$ est un épimorphisme strict (resp. un épimorphisme effectif, resp. un épimorphisme universel,...) (10.3).

10.9. Relations d'équivalence. — Soient F, G deux préfaisceaux d'ensembles sur C. Un diagramme $p_1, p_2 : F \rightrightarrows G$ est appelé une *relation d'équivalence sur* G si pour tout objet A de C, l'application

$$(p_1(A), p_2(A)) : F(A) \longrightarrow G(A) \times G(A)$$

induit une bijection de $F(A)$ sur e graphe d'une relation d'équivalence sur l'ensemble $G(A)$.

Un diagramme $p_1, p_2 : B \rightrightarrows C$ dans C est appelé une relation d'équivalence sur C si le diagramme de préfaisceaux correspondant est une relation d'équivalence. Lorsque dans C les produits finis et produits fibrés sont représentables, un foncteur $\Phi : C \to C'$ commutant aux produits finis et produits fibrés transforme les relations d'équivalence sur C en relation d'équivalence sur $\Phi(C)$.

Soit $\Pi : C \to D$ un morphisme de $\mathscr{A}$ tel que le produit fibré $C \times_D C$ soit représentable. 184
Alors le diagramme $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : C \times_D C \rightrightarrows C$ est une relation d'équivalence sur C.

10.10. Relation d'équivalence effective, effective universelle. — Une relation d'équivalence $p_1, p_2 : R \rightrightarrows A$ sur un objet A de C est dite *relation d'équivalence effective* s'il existe un morphisme $\Pi : A \to B$ tel que le carré

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & A \arrow[d, "\pi"] \\ A \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

soit cartésien et cocartésien. (Le morphisme π est le conoyau du couple (p_1, p_2), et est donc déterminé à isomorphisme unique près). Le morphisme π est alors un épimorphisme effectif ; si c'est un épimorphisme effectif universel (10.3) on dit que la *relation d'équivalence* est *effective universelle.*

10.11. Sous-objet, sous-objet strict. — etc. Ce sont les notions duales de celles de quotient, quotient strict etc. (10.8).

Références

[1] B. Mitchell, « Theory of categories », Academie Press (1965).

II. Appendice : Univers (par N. Bourbaki(*)) 185

1. Définition et premières propriétés des univers

DÉFINITION 1. — *Un ensemble U est appelé un univers s'il satisfait aux conditions :*

(U.I) *si $x \in U$ et si $y \in x$, alors $y \in U$;*
(U.II) *si $x, y \in U$, alors $\{x, y\} \in U$;*
(U.III) *si $x \in U$, alors $\mathscr{P}(x) \in U$;*
(U.IV) *si $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ est une famille d'éléments de U, et si $I \in U$, alors la réunion $\bigcup_{\alpha\in I} x_\alpha$ appartient à U ;*
(U.?) *si $x, y \in U$, alors le coupe $(x, y) \in U$.*

N.B. Comme il a été je crois décidé pour les prochaines éditions, on définit le couple à la Kuratowski par $(x, y) = \{\{x, y\}, \{x\}\}$, la condition (U. ?) est inutile car elle résulte de (U.II).

Exemples. — 1) L'ensemble *vide* est un univers noté $U_\circ$.

2) Considérons les mots finis non vides formés avec les quatre symboles ″{″,″ }″,″ ,″ et ″∅″ (cf. Alg. I). Définissons, par récurrence sur la longueur n d'un tel mot, la notion 186 de mot *significatif* :
   (a) Pour $n = 1$, seul le mot ∅ est significatif ;
   (b) pour qu'un mot A de longueur n soit significatif, il faut et suffit qu'il existe p mots significatifs distincts $A_1, \dots, A_p$ $(p \geq 1)$ de longueurs $< n$ tels que

$$A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}.$$

Par exemple $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ sont des mots significatifs. Il est clair, par récurrence sur la longueur, que tout mot significatif désigne un terme de la Théorie des Ensembles ; par exemples, si $A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$, A désigne l'ensemble dont les éléments sont $A_1, A_2, \dots$, et A_p ; ces termes sont évidemment des *ensembles finis.* Soit U_1 l'ensemble des ensembles ainsi obtenus. On vérifie aisément que U_1 satisfait aux conditions (U.I), (U.II), (U.III) et (U.IV) de la déf. 1 (mais non à cette idiote de (U. ?), ce qui n'est pas grave si on veut bien décanuler le couple). Donc U_1 est un *univers.* On notera que les éléments de U_1 sont finis, et que U_1 est dénombrable.

Dans les énoncés qui suivent, *U désigne un univers.*

PROPOSITION 1. — *Si $X \in U$ et si $y \subset x$, alors $y \in U$.*

En effet, on a $\mathscr{P}(x) \in U$ par (U.III), d'où $y \in \mathscr{P}(x)$ et $y \in U$ par (U.I).

COROLLAIRE. — *Si $x \in U$, tout ensemble quotient y de x est élément de U.*

En effet y est une partie de $\mathscr{P}(x)$. D'où $y \in U$ par (U.III) et la prop. 1.

PROPOSITION 2. — *Si $x \in U$, on a $\{x\} \in U$.* 187

Ça résulte de (U.II) appliqué pour $y = x$.

---

(3)Nous reproduisons ici, avec son accord, des papiers secrets de N. Bourbaki. Les références de ce texte se rapportent à son savant ouvrage.

PROPOSITION 3*.* — *Tout couple, tout triplet, tout quadruplet d'éléments de U est un élément de U.*

C'est vrai pour les couples d'après le N.B. ou (U. ?). On en déduit le cas des triplets car $(x, y, z) = ((x, y), z)$, puis celui des quadruplets car $(x, y, z, t) = ((x, y, z), t)$.

PROPOSITION 4*.* — *Si $X, Y \in U$, alors $X \times Y \in U$.*

En effet, pour $x \in X$, $\{x\} \times Y$ est la réunion de la famille $\{(x, y)\}_{y \in Y}$; comme on a $\{(x, y)\} \in U$ d'après (U.I), (U.II) et la prop.3, on a $\{x\} \times Y \in U$ d'après (U.IV). Enfin $X \times Y$ est la réunion de la famille $(\{x\} \times Y)_{x \in X}$; c'est donc un élément de U d'après (U.IV) encore.

COROLLAIRE 1*.* — *Si $X, Y, Z, \ldots$ sont des éléments de U, tous les ensembles de l'échelle construite sur $X, Y, Z, \ldots$ sont des éléments de U* (cf. chap.IV, §).

Ça résulte en effet d'applications successives de la prop. 4 et de (U.III).

COROLLAIRE 2*.* — *Si $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille d'éléments de U et si $I \in U$, l'ensemble somme $\Sigma_{\alpha \in I} x_\alpha$ est un élément de U.*

En effet, cet ensemble somme est une partie du produit $(\bigcup_{\alpha \in I} x_\alpha) \times I$ (chap. II), produit dont les deux facteurs sont éléments de U (par (U.IV) et l'hypothèse). On applique alors les prop. 4 et 1.

188 ***PROPOSITION 5****.* — *Si X et Y sont des éléments de U, toute correspondance entre X et Y (en particulier toute application de X dans Y) est un éléments de U.*

En effet, une telle correspondance C est un triplet (X, Y, Γ) où Γ est une partie de $X \times Y$ (le graphe de C) (chap. II, §). On a $\Gamma \in U$ d'après les prop. 4 et 1. D'où $C \in U$ par la prop. 3.

PROPOSITION 6*.* — *Si $X, Y \in U$, tout ensemble Z de correspondances entre X et Y (en particulier d'applications de X dans Y) est élément de U.*

En effet, Z est une partie de $\{X\} \times \{Y\} \times \mathscr{P}(X \times Y)$. Or ce produit est élément de U d'après la prop.2 et le cor. à la prop.4. On a donc $Z \in U$ par la prop. 1.

COROLLAIRE*.* — *Si $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille d'éléments de U, et si $I \in U$, on a $\Pi_{\alpha \in I} x_\alpha \in U$.*

En effet, ce produit est un ensemble d'applications de I dans $\bigcup_{\alpha \in I} x_\alpha$, et cette réunion est élément de U par (U.IV).

PROPOSITION 7*.* — *Si X est une partie de U dont le cardinal est au plus celui d'un élément de U, alors X est un élément de U.*

Soit I un élément de U tel que $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(I)$. On a une surjection $i \mapsto x_i$ d'une partie I' de I sur X. Alors X est la réunion de la famille $(\{x_i\})_{i \in I'}$; or cette réunion est élément de U par la prop. 1, la prop. 2 et (U.IV).

189 ***COROLLAIRE****.* — *Si U est non vide toute partie finie de U est un élément de U, et U a des éléments de cardinal fini arbitraire.*

Par contre, si $U = \varnothing$, $\varnothing$ est une partie finie de $\varnothing$ mais non un élément de $\varnothing$.

En effet, si U est non vide, la prop. 2 montre qu'un ensemble $x_\circ$ à un élément appartient à U. Par récurrence sur n, posons $x_{n+1} = \mathscr{P}(x_n)$. On a $x_n \in U$ par (U.III), et $\mathrm{card}(x_{n+1}) = 2^{\mathrm{card}(x_n)}$, de sorte que U a des éléments de cardinal fini arbitrairement grand.

Remarque. — Il résulte de la prop. 2 et du cor. à la prop. 7 que tout univers non vide U contient l'univers U_1 de l'ex. 2 ; en effet on a $\varnothing \in U$ d'après la prop. 1. Ainsi U_1 est l'intersection de tout les univers non vides. Plus généralement :

PROPOSITION 8. — *Si $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ est une famille non vide d'univers, alors $U = \bigcap_{\lambda\in L} U_\lambda$ est un univers.*

Ceci résulte aussitôt de la déf. 1.

2. Univers et espèces de structures

Soit $\mathscr{E}$ une espèce de structure ; supposons, pour fixer les idées et alléger l'exposé, que chaque structure d'espèce $\mathscr{E}$ est définie sur un ensemble de base. Soit (X, S) une structure d'espèce $\mathscr{E}$ (X étant l'ensemble de base, et S la structure), et soit U un *univers.* Si $X \in U$, alors tous les objets constitutifs de la structure S sur X sont éléments de U (par le cor. 1 de la prop. 4, *n*° 1 et par (U.I)) de sorte que la structure (X, S) est élément de U.

Supposons maintenant que $\mathscr{E}$ soit une espèce de structure avec *morphismes.* X et X' sont 190
des éléments de U munis de structures d'espèce $\mathscr{E}$, alors l'ensemble des morphismes de X dans X' est encore un élément du U (*n*° 1, prop. 6).

Considérons alors la *catégorie* $(U\text{-}\mathscr{E})$ définie au § 1, *n*° 2, ex. c). Comme les objets et les flèches de $(U\text{-}\mathscr{E})$ sont des éléments de U, $(U\text{-}\mathscr{E})$ est un *couple de parties* de U, muni d'un quadruplet d'applications ; ce n'est pas, en général, un élément de U. La notation $X \in (U\text{-}\mathscr{E})$ voudra dire que X est un élément de U muni d'une structure d'espèce $\mathscr{E}$.

La catégorie $(U\text{-}\mathscr{E})$ est *stable* pour de nombreuses opérations :

a) Si $X \in (U\text{-}\mathscr{E})$, et si X' est une partie de X qui admet une *structure induite*, alors $X' \in (U\text{-}\mathscr{E})$. Ça résulte de la prop. 1, *n*° 1.
b) Si $X \in (U\text{-}\mathscr{E})$, et si X'' est un ensemble quotient de X qui admet une *structure quotient*, alors $X'' \in (U\text{-}\mathscr{E})$ (cor. de la prop. 1, *n*° 1).
c) Si $X, Y \in (U\text{-}\mathscr{E})$, et si $X \times Y$ admet une *structure produit*, alors $X \times Y \in (U\text{-}\mathscr{E})$ (prop. 4, *n*° 1). Plus généralement, si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $(U\text{-}\mathscr{E})$, *si on a $I \in U$*, et si $\Pi_{i\in I} X_i$ admet une *structure produit*, alors $\Pi_{i\in I} X_i \in (U\text{-}\mathscr{E})$ (cor. de la prop. 6). Assertions analogues pour les *structures sommes* (cor. 2 de la prop. 4).
d) Soient I un ensemble préordonné, et $(X_i, f_{ij})_{i,j\in I}$ un *système projectif* (resp. *inductif*) d'ensembles munis de structures d'espèce $\mathscr{E}$ et de morphismes ; soit L la limite de ce système, au sens du chap. III. Si $X_i \in U$ pour tout i, si $I \in U$, et si L admet une structure limite projective (resp. inductive), alors on a $L \in (U\text{-}\mathscr{E})$: en effet L est une partie de $\Pi_{i\in I} X_i$ (resp. un ensemble quotient de $\Sigma_{i\in I} X_i$), et est donc 191
un élément de U d'après le *n*° 1.

Donnons encore quelques exemples plus particuliers :

* 1) Soient $X, Y \in (U\text{-Top})$ deux espaces *localement compacts*. Alors l'ensemble $\mathscr{C}(X,Y)$ des applications continues de X dans Y, muni de la topologie de la convergence compacte (Top. Géné. X), est un élément de $(U\text{-Top})$. En effet on a $\mathscr{C}(X,Y) \in U$ d'après la prop. 6 du *n*° 1.$_*$

* 2) Soient $X, Y \in (U\text{-Ab})$. Alors le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X,Y)$ est un élément de $(U\text{-Ab})$ par la prop. 6 du *n*° 1. Si on suppose de plus qu'on a $\mathbf{Z} \in U$, le produit tensoriel $X \otimes_{\mathbf{Z}} Y$ est un élément de $(U\text{-Ab})$; en effet ce produit tensoriel est un quotient de $\mathbf{Z}^{X\times Y}$, lequel est une partie de $\mathbf{Z}^{X\times Y}$, qui lui-même est un élément de U par les prop. 4 et 6 du *n*° 1.$_*$

* 3) Soit $X \in (U\text{-Unif})$ un espace uniforme. Alors son *complété* $\widehat{X}$ est un élément de $(U\text{-Unif})$. En effet $\widehat{X}$ est un ensemble de classes d'équivalences de filtres de Cauchy sur X ; or un filtre sur X est un élément de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$, donc une classe d'équivalence de filtres est un élément de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(X)))$, de sorte que $\widehat{X}$ est un élément de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))))$, donc un élément de U par (U.III) et (U.I).$_*$

N.B. Moralité, Bourbaki devra veiller à bien « canonifier » ses constructions. Par exemple, dans celles où on adjoint un élément ∞ (compactifié d'Alexandroff, corps projectif), il y aura
192 intérêt à prendre $\infty = \varnothing$ (car $\varnothing$ est élément de tout univers non vide) et à former l'ensemble somme de $\{\varnothing\}$ et de l'ensemble donné. Bien entendu il faudrait aussi « canonifier » l'ensemble à deux éléments servant à construire les ensembles sommes ; ainsi $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ me paraît un bon candidat car il appartient à tout univers non vide.

3. Univers et catégories

Soient U un univers et C une catégorie. Nous écrivons $C \in U$ si on a $\mathrm{Ob}(C) \in U$ et $\mathrm{F}l\,(C) \in U$. Cette écriture est justifiée du fait que C est le sextuplet formé de $\mathrm{Ob}(C)$, de$\mathrm{F}l\,(C)$ et des quatre applications structurales ; donc si $\mathrm{Ob}(C) \in U$ et$\mathrm{F}l\,(C) \in U$, ces quatre applications sont éléments de U (*n*° 1, cor. 1 de la prop. 4), donc aussi le sextuplet C (*n*° 1, prop. 3, *cum grano salis*). Ceci est d'ailleurs un cas particulier du *n*° 2, si l'on considère l'espèce de structure « cat″ de catégorie. Avec les notations du *n*° 2, la relation $C \in U$ s'écrit aussi $C \in (U\text{-cat})$.

On notera qu'une catégorie comme $(U\text{-Ens})$, $(U\text{-Ord})$, $(U\text{-Top})$ ou $(U\text{-Gr})$ n'est *pas*, en général, un élément de U.

Soient C, D deux catégories et U un univers tels que $C, D \in U$. Si C' est une *sous-catégorie* de C, on a $C' \in U$; la *catégorie produit* $C \times D$, la catégorie somme de C et D, les catégories opposées C° et D° sont aussi éléments de U (cf. *n*° 2). La *catégorie de foncteurs* $E = \mathbf{Hom}(C,D)$ est également un élément de U : en effet $\mathrm{Ob}(E)$ est un ensemble de couples d'applications $\mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Ob}(D)$, $F\ell\,(C) \to F\ell\,(D)$, donc $\mathrm{Ob}(E) \in U$ par le *n*°
193 1 ; quant à $F\ell\,(E)$, c'est un ensemble de morphisme fonctoriels, c'est-à-dire d'applications $\mathrm{Ob}(C) \to F\ell\,(D)$, d'où $F\ell\,(E) \in U$ par la prop. 6 du *n*° 1.

PROPOSITION 9. — *Soient $\mathscr{E}$ une espèce de structure avec morphismes, et U, U' deux univers tels que $U' \subset U$. Alors $(U'\text{-}\mathscr{E})$ est une sous-catégorie pleine de $(U\text{-}\mathscr{E})$.*

En effet, si x et y sont des objets de $(U'\text{-}\mathscr{E})$, ce sont par définition des objets de $(U\text{-}\mathscr{E})$. Quant à $\mathrm{Hom}(x,y)$, c'est la même ensemble dans les deux catégories (cf. . § 1, *n*° 2, ex. c)).

N.B. On notera que l'hypothèse que U et U' sont des univers est inutile, de sorte que la prop. 9 remonterait avantageusement au § 1, *n*° 4. Mais la Tribu a demandé qu'elle soit ici.

Remarque. — Il arrive que les axiomes de l'espèce de structure $\mathscr{E}$ impliquent que les *cardinaux* des ensembles munis de structures d'espèce $\mathscr{E}$ soient *bornés* par un cardinal fixe, soit c (* par exemple l'espèce de structure de groupe fini, de groupe de type fini, de module de type fini sur un anneau fixe A, ou d'algèbre de type fini sur A *). Supposons alors qu'il existe un élément z de U' tel que $c \leq \mathrm{card}(z)$. Alors, pour tout ensemble x muni d'une structure d'espèce $\mathscr{E}$, il existe un élément x' de U' équipotent à x, par exemple une partie de z ; munissons x' de la structure déduite de celle de x par transport de structure ; on obtient ainsi un élément de $(U'\text{-}\mathscr{E})$. Il s'ensuit que *le foncteur d'inclusion de* $(U'\text{-}\mathscr{E})$ *dans* $(U\text{-}\mathscr{E})$ *est alors essentiellement surjectif* (§ 4, *n*° 2, déf. 2) *et est donc une équivalence de catégorie* (§ 4, *n*° 3, th. 1).

4. L'axiome des univers 194

Les fort agréables résultats de stabilité du *n*° 2 n'ont d'intérêt que si on peut les appliquer à autre chose qu'aux deux petits univers $U_\circ$ et U_1 décrits au *n*° 1. Nous ajouterons donc aux axiomes de la Théorie des Ensembles l'axiome suivant :

(A.6) *Pour tout ensemble x, il existe un univers U tel que $x \in U$.*

Cet axiome implique que, si $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ est une *famille* d'ensembles, il existe un univers U tel que $x_\alpha \in U$ pour tout $\alpha \in I$: il suffit, en effet, d'appliquer (A.6) à $x = \bigcup_{\alpha\in I} x_\alpha$ et d'appliquer la prop. 1 du *n*° 1.

En particulier, étant donnée une *catégorie* C, il existe un univers U tel que $C \in U$ au sens du *n*° 3 : on applique ce qui précède à la famille $(\mathrm{Ob}(C), F\ell(C))$. Ceci s'applique aux catégories de la forme $(V\text{-}\mathscr{E})$ où $\mathscr{E}$ est une espèce de structure avec morphismes et V un ensemble, un univers par exemple ; en général on a $V \neq U$.

Par exemple, si V est un univers, on a $\mathrm{Ob}(V\text{-}\mathrm{Ens}) = V$ et $F\ell(V\text{-}\mathrm{Ens}) \subset V$ (*n*° 1, prop. 5). Les univers U tels que $(V\text{-}\mathrm{Ens}) \in U$ sont donc ceux tels que $V \in U$. Or la relation $V \in V$ est impossible pour un univers : en effet, pour toute partie A de V, on aurait $A \in V$ (*n*° 1, prop. 1), d'où $\mathrm{card}(\mathscr{P}(V)) \leq \mathrm{card}(V)$, ce qui est impossible.

5. Univers et cardinaux fortement inaccessibles 195

Soit U un univers. D'après la condition (U.I) de la déf. 1 tout élément x de U est une partie de U ; on a donc $\mathrm{card}(x) \leq \mathrm{card}(U)$. Comme les cardinaux des parties de U forment un ensemble bien ordonné, le cardinal

$$c(U) = \sup_{x\in U} \mathrm{card}(x) \tag{1}$$

existe. Notons que, pour tout cardinal $c < c(U)$, il existe un élément x de U tel que $\mathrm{card}(x) = c$; en effet, il existe par définition $y \in U$ tel que $c \leq \mathrm{card}(y) \leq c(U)$, et l'on prend pour x une partie convenable de y. Réciproquement, si $x \in U$, on a $\mathrm{card}(x) < c(U)$; en effet on a $\mathscr{P}(x) \in U$ par (U.III), d'où $2^{\mathrm{card}(x)} \leq c(U)$. Le cardinal $c(U)$ a donc les propriétés suivantes :

1) Si c est un cardinal $< c(U)$, on a $2^c < c(U)$; en effet, si x est un élément de U de cardinal c, on a $\mathscr{P}(x) \in U$ par application de (U.III), d'où $2^c < c(U)$.

2) Si $(c_\lambda)_{\lambda\in I}$ est une famille de cardinaux telle que $c_\lambda < c(U)$ pour tout $\lambda \in I$ et que $\mathrm{card}(I) < c(U)$, alors le cardinal somme $\Sigma_{\lambda\in I} c_\lambda$ est $< c(U)$. En effet soit $x_\lambda \in U$ tel que $\mathrm{card}(x_\lambda) = c_\lambda$; quitte à remplacer I par un ensemble d'indices équipotent, on peut supposer qu'on a $I \in U$; alors l'ensemble somme des x_λ est élément de U (cor. 2 de la prop. 4 du *n*° 1), ce qui démontre notre assertion.

Posons la définition suivante :

196 ***DÉFINITION 2.*** — *Un cardinal d est dit fortement inaccessible si :*

(FI.1) *Si c est un cardinal tel que $c < d$, on a $2^c < d$.*

(FI.2) *Si $(c_\lambda)_{\lambda\in I}$ est une famille de cardinaux telle que $c_\lambda < d$ pour tout $\lambda \in I$ et si $\mathrm{card}(I) < d$, alors $\Sigma_{\lambda\in I} c_\lambda < d$.*

Exemples. — Le cardinal 0 et le cardinal infini dénombrable sont fortement inaccessibles. Aucun cardinal fini non nul n'est fortement inaccessible. Ainsi nous venons de démontrer que l'axiome (A.6) des univers implique la relation :

$(A'.6)$ *Tout cardinal est strictement majoré par un cardinal fortement inaccessible.*

Inversement :

THÉORÈME 1. — *La relation $(A'.6)$ implique l'axiome (A.6) des univers.*

En effet soit A un ensemble. Il s'agit de construire un univers U dont A est élément. Définissons par récurrence une suite $(A_n)_{n\geq 0}$ d'ensembles au moyen de :

(2) $A_0 = A$, $A_{n+1} =$ réunion des éléments de $A_n =$ ensemble des éléments de A_n.

Posons $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Soit, par $(A'.6)$, c un cardinal fortement inaccessible tel que $\mathrm{card}(B) < c$.

Il existe un ensemble *bien ordonné* I tel que $\mathrm{card}(I) = c$. Quitte à remplacer I par son plus petit segment de cardinal c, on peut supposer que *tout segment de I distinct de I a un*
197 *cardinal* $< c$. Nous noterons $\mathscr{E}$ le *plus petit élément de I*. Il résulte de l'hypothèse sur les segments que I n'a pas de plus grand élément (sinon on l'enlèverait), donc que tout élément de I admet un successeur ; pour $\alpha \in I$, nous noterons $s(\alpha)$ le *successeur* de α

Ceci étant, définissons, par *récurrence transfinie,* une famille $(B_\alpha)_{\alpha\in I}$ d'ensembles au moyen de :

$$(3)\qquad \begin{cases} B_{\mathscr{E}} = B \\ B_{s(\alpha)} = B_\alpha \cup \mathscr{P}(B_\alpha) \\ B_\alpha = \displaystyle\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta \text{ si } \alpha \text{ n'a pas de prédécesseur.} \end{cases}$$

Posons $U = \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$. Nous allons montrer que U est l'univers cherché.

On a d'abord $A \in U$, car $A = A_\circ$ est une partie de $B = B_{\mathscr{E}}$, donc un élément de $\mathscr{P}(B_{\mathscr{E}}) \subset B_{s(\mathscr{E})}$.

Notons ensuite que, pour tout $\alpha \in I$, on a :

$$(4)\qquad \mathrm{card}(B_\alpha) < c.$$

Procédons en effet par récurrence transfinie sur α. C'est vrai pour $\alpha = \mathscr{E}$ par hypothèse. De (4) on déduit $\mathrm{card}(B_{s(\alpha)}) \leq \mathrm{card}(B_\alpha) + 2^{\mathrm{card}(B_\alpha)} < c + c$ (par (FI.1)) = c (car c est infini). Enfin, si α n'a pas de prédécesseur, l'ensemble I' des $\beta < \alpha$ a un cardinal $< c$ par construction ;

d'où (si $\operatorname{card}(B_\beta) < c$ pour tout $\beta < \alpha$), $\operatorname{card}(B_\alpha) = \operatorname{card}(\bigcup_{\beta\in I'} B_\beta) \leq \Sigma_{\beta\in I'} \operatorname{card}(B_\beta) < c$ (par (FI.2)). Ceci démontre (4).

Montrons maintenant qu'on a 198

$$\operatorname{card}(x) < c \text{ pour tout } x \in U. \tag{5}$$

En effet, il suffit de montrer que, pour tout $\alpha \in I$, on a « $\operatorname{card}(x) < c$ pour tout $x \in B_\alpha$ ». Procédons encore par récurrence transfinie sur α. C'est vrai pour $\alpha = \mathscr{E}$, car, si $x \in B_{\mathscr{E}} = B$, il existe $n \geq 0$ tel que $x \in A_n$; d'où $X \subset A_{n+1}$ par (2), $x \subset B$ et $\operatorname{card}(x) \leq \operatorname{card}(B) < c$. Le cas où α n'a pas de prédécesseur est évident. Enfin, si $x \in B_\alpha$ et si $\alpha = s(\beta)$, on a soit $x \in B_\beta$ et l'assertion « $\operatorname{card}(x) < c$ » est vraie par récurrence, soit $x \in \mathscr{P}(B_\beta)$, d'où $x \subset B_\beta$ et l'assertion « $\operatorname{card}(x) < c$ » est vraie par (4).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que U est bien un *univers* :

(U.I) Soient $x \in U$ et $y \in x$. Il s'agit de montrer qu'on a $y \in U$. Autrement dit il s'agit de montrer que, pour tout $\alpha \in I$, on a la relation :

$$\text{« } x \in B_\alpha \text{ et } y \in x \Longrightarrow y \in B_\alpha \text{ »}.$$

On procède encore par récurrence transfinie sur α. C'est vrai pour $\alpha = \mathscr{E}$ car $x \in B_{\mathscr{E}} = B$ implique $x \in A_n$ pour un certain n ; donc, si $y \in x$, on a $y \in A_{n+1}$, d'où $y \in B = B_{\mathscr{E}}$. Le passage à un élément α sans prédécesseur est évident. Passons enfin de α à $s(\alpha)$: si $x \in B_{s(\alpha)}$ et si $y \in x$, on a, soit $x \in B_\alpha$, d'où $y \in B_\alpha \subset B_{s(\alpha)}$ par récurrence, soit $x \in \mathscr{P}(B_\alpha)$, d'où encore $y \in B_\alpha \subset B_{s(\alpha)}$.

(U.II) Soient $x, y \in U$. Comme la famille $(B_\alpha)_{\alpha\in I}$ est croissante par (3), il existe $\alpha \in I$ tel que $x, y \in B_\alpha$. Alors $\{x, y\} \in \mathscr{P}(B_\alpha) \subset B_{s(\alpha)} \subset U$.

(U.III) Soit $x \in U$. Il existe alors $\alpha \in I$ tel que $x \in B_\alpha$. Il suffit donc de montrer que, pour 199
tout $\alpha \in I$, on a la relation :

$$\text{« } x \in B_\alpha \Longrightarrow \mathscr{P}(x) \in B_{s(s(\alpha))} \text{ »}.$$

On procède encore par récurrence transfinie sur α. Si $\alpha = \mathscr{E}$, on a $x \in A_n$ pour un certain n, d'où $y \subset A_{n+1} \subset B = B_{\mathscr{E}}$ pour toute partie y de x ; ainsi on a $y \in \mathscr{P}(B_{\mathscr{E}}) \subset B_{s(\mathscr{E})}$ pour tout $y \in \mathscr{P}(x)$, d'où $\mathscr{P}(x) \subset B_{s(\mathscr{E})}$ et $\mathscr{P}(x) \in \mathscr{P}(B_{s(\mathscr{E})}) \subset B_{s(s(\mathscr{E}))}$, de sorte que notre assertion est vraie pour $\alpha = \mathscr{E}$. Le passage à un élément α sans prédécesseur est immédiat, car $\beta < \alpha$ implique alors $s(s(\beta)) < \alpha$. Passons enfin de α à $s(\alpha)$; soit $x \in B_{s(\alpha)}$; si $x \in B_\alpha$, on a $\mathscr{P}(x) \in B_{s(s(\alpha))} \subset B_{s(s(s(\alpha)))}$ par récurrence ; si $x \in \mathscr{P}(B_\alpha)$, on a $x \subset B_\alpha$, d'où $\mathscr{P}(x) \subset \mathscr{P}(B_\alpha)$ et $\mathscr{P}(x) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(B_\alpha)) \in B_{s(s(s(\alpha)))}$.

(U.IV) Soit $(x_\lambda)_{\lambda\in K}$ une famille d'éléments de U telle que $K \in U$. Il s'agit de montrer que la réunion $x = \bigcup_{\lambda\in K} x_\lambda$ est élément de U. Pour tout $\lambda \in K$, choisissons un $\alpha(\lambda) \in I$ tel que $x_\lambda \in B_{\alpha(\lambda)}$. Montrons que l'ensemble $\alpha(K)$ des $\alpha(\lambda)$ est *majoré* dans I : en effet, s'il ne l'était pas, on aurait :

$$I = \bigcup_{\lambda\in K} [\mathscr{E}, \alpha(\lambda)],$$

ce qui contredirait (FI.2) car $\operatorname{card}(K) < c$ et $\operatorname{card}([\mathscr{E}, \alpha(\lambda)] < c$ pour tout $\lambda \in K$. Soit donc β un majorant de $\alpha(K)$; on a $x_\lambda \in B_\beta$ pour tout $\lambda \in K$ car la famille $(B_\alpha)_{\alpha\in I}$ est croissante. On a donc $x_\lambda \in B_\beta$ d'après ce qu'on a vu dans la démonstration de (U.I), d'où $x = \bigcup_{\lambda\in K} x_\lambda \subset B_\beta$. Par (3) il s'ensuit qu'on a $x \in B_{s(\beta)}$, d'où $x \in U$. C.Q.F.D.

200 ***DÉFINITION 3.*** — *Soient x, y deux ensembles et n un entier ≥ 0. On dit que y est un composant d'ordre n de x s'il existe une suite $(x_j)_{j=0,\ldots,n}$ telle que $x_0 = x$, $x_n = y$, et $x_{j+1} \in x_j$ pour $j = 0, \ldots, n-1$.*

Ainsi x est le seul composant d'ordre 0 de x. Les composants d'ordre 1 (resp. 2) de x sont les éléments de x (resp. les éléments des éléments de x). On dit que y est un *composant* de x s'il existe $n \geq 0$ tel que y soit composant d'ordre n de x. La relation « y est un composant de x » est une *relation de préordre.* D'après le schéma de sélection-réunion (chap. II, ...) la relation « y est un composant de x » est collectivisante par rapport à y, de sorte que les composants de x forment un *ensemble.*

DÉFINITION 4. — *Soit c un cardinal. On dit qu'on ensemble x est de type c (resp. de type strict c, de type fini) si tout les composants de x ont des cardinaux $\leq c$ (resp. $< c$, finis).*

Exemples. — Les éléments de l'univers U_1 (*n*° 1, ex. 2) sont tous de type fini. Si c est un cardinal, et si x est de type c (resp. type strict c, type fini), alors tout composant de x et toute partie de x sont de type c (resp. type strict c, type fini) ; de même $\mathscr{P}(x)$ est de type 2^c (resp. de type strict 2^c, de type fini). Si x est de type c et si $c \leq c'$, alors x est de type c'.

201 ***LEMME.*** — *Soient c un cardinal fortement inaccessible non dénombrable, et X un ensemble de type strict c. Alors il existe un cardinal $d < c$ tel que X soit de type d.*

En effet, pour tout entier n, notons d_n le cardinal de l'ensemble X_n des composants d'ordre n de X. On a $d_0 = 1$, $d_1 = \mathrm{card}(X) < c$, et, comme $X_n = \bigcup_{y \in X_{n-1}} y$, on en déduit, par récurrence sur n et usage de (FI.2), qu'on a $d_n < c$ pour tout n. Alors les d_n sont majorés par le cardinal $d = \Sigma_{j \geq 0} d_j$, qui est $< c$ par (FI.2) et l'hypothèse de non dénombrabilité de c. Alors, si Y est un composant d'ordre n de X, on a $\mathrm{card}(Y) \leq \mathrm{card}(X_{n+1}) \leq d$. C.Q.F.D.

PROPOSITION 10. — *Soient U un univers et c un cardinal fortement inaccessible. Alors l'ensemble U' des $x \in U$ qui sont de type strict c est un univers.*

En effet, si $x, y \in U'$ et si $z \in x$, on a évidemment $z \in U'$ et $\{x, y\} \in U'$. Si $x \in U'$, on a $\mathrm{card}(x) < c$, d'où $\mathrm{card}(\mathscr{P}(x)) < c$ par (FI.1) ; comme un composant de $\mathscr{P}(x)$ est, ou bien $\mathscr{P}(x)$, ou bien une partie de x, ou bien un composant de x, on a $\mathscr{P}(x) \in U'$. Enfin si $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille d'éléments de U' telle que $I \in U'$, on a $\mathrm{card}(\bigcup_\alpha x_\alpha) < c$ par (FI.2) ; comme tout composant d'ordre > 0 de $\bigcup_\alpha x_\alpha$ est un composant d'un x_α, on a bien $\bigcup_\alpha x_\alpha \in U'$ C.Q.F.D.

Remarque sur le cardinal $c(U)$. Soient U un univers et $c(U)$ le cardinal défini par (1). i.e.

$$c(U) = \sup_{x \in U} \mathrm{card}(x).$$

202 On a évidemment $c(U) \leq \mathrm{card}(U)$, car, rappelons-le, $x \in U$ implique $x \subset U$. Mais l'égalité $c(U) = \mathrm{card}(U)$ n'est pas toujours vraie. Par exemple soit $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille *non dénombrable* de symboles avec les axiomes :

$$«x_\alpha = \{x_\alpha\} \text{ pout tout } \alpha \in I» \quad , \quad «x_\alpha \neq x_\beta \text{ si } \alpha \neq \beta»$$

(autrement dit x_α est un ensemble à un seul élément, à savoir lui-même). Formons, comme dans l'ex. 2 du *n*° 1, les « mots significatifs » formés avec les symboles $\varnothing$, x_α, $\{,\}$ etc Chacun désigne un ensemble *fini*. Soit U l'ensemble de ceux-ci. On vérifie aisément que les conditions de la déf. 1 sont satisfaites, de sorte que U est un *univers*. Comme les mots significatifs sont des suites finies d'éléments d'un ensemble de cardinal $\mathrm{card}(I) + 4 = \mathrm{card}(I)$; on a $\mathrm{card}(U) = \mathrm{card}(I)$ (chap. III ; en fait $\mathrm{card}(U) \geq \mathrm{card}(I)$ suffit, et c'est évident). D'autre part, $c(U)$ est le cardinal dénombrable, d'où $c(U) < \mathrm{card}(U)$.

L'inégalité stricte $c(U) < \mathrm{card}(U)$ tient à ce qu'on a introduit ici des ensembles x_α tels que $x_\alpha \in x_\alpha$. Si on interdit des horreurs de ce genre, on obtient $\mathrm{card}(U) = c(U)$ pour tout univers U, ainsi que d'autres fort jolis résultats « ne pouvant servir à rien ». C'est ce qu'on va faire au numéro suivant.

6. Ensembles et univers artiniens

DÉFINITION 5. — *On dit qu'un ensemble x est artinien s'il n'existe aucune suite infinie $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que $x_\circ = x$ et que $x_{n+1} \in x_n$ pour tout $n \geq 0$.*

Exemples. — Les ensembles $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, plus généralement les éléments de l'univers U_1 du *n*° 1, sont artiniens.

En termes imagés, si x est artinien, et si on prend un élément x_1 de x, puis un élément 203
x_2 de x_1, etc., le processus doit s'arrêter, et on arrive à un composant x_n de x qui est *vide.* Autrement dit les ensembles artiniens sont « construits à partir de $\varnothing$ » ; ceci sera précisé plus tard (cf. (*) dans la démonstration du th. 2).

Les ensembles artiniens jouissent évidemment des propriétés suivantes :

(AR.I) Si x est artinien, toute partie de x et tout composant de x sont artiniens. Pour que x soit artinien, il faut et il suffit que tout élément de x soit artinien.

(AR.II) Si x et y sont artiniens, alors $\{x, y\}$ est artinien.

(AR.III) Si x est artinien, $\mathscr{P}(x)$ est artinien.

(AR.IV) Toute réunion d'ensembles artiniens est un ensemble artinien.

Ces propriétés montrent aussitôt qu'on a la

PROPOSITION 11. — *Si U est un univers, l'ensemble des éléments artiniens de U est un univers, nécessairement artinien.*

COROLLAIRE. — *Si x est un ensemble artinien, il existe un univers artinien U tel que $x \in U$.*

En effet, par l'axiome (A.6), x est élément d'un univers V ; on prend pour U l'ensemble des éléments artiniens de V.

La proposition suivante est encore moins utile que le reste du *n*° :

PROPOSITION 12. — *Soit A un ensemble artinien. Alors :* 204

a) *Pour tout $x \in A$, on a $x \notin x$;*
b) *Si $x, y \in A$, on ne peut avoir à la fois $x \in y$ et $y \in x$;*
c) *Pour tout $x \in A$, la relation « y est un composant de z » entre composants y, z de x est une relation d'ordre ;*
d) *Pour tout élément non vide x de A, il existe $y \in x$ tel que $x \cap y = \varnothing$.*

En effet la négation de a) (resp. de b)) entraîne l'existence d'une suite infinie $(x_n)_{n\geq 0}$ contredisant le déf. 5, à savoir $(x, x, x, \dots)$ (resp. $(x, y, x, y, x, y, \dots)$). La négation de c) veut dire qu'il existe $x \in A$, des composants y, z de x distincts, et des suites d'appartenances :

$$y \in y_1 \in \dots \in y_q \in z \quad , \quad z \in z_1 \in \dots \in z_r \in y;$$

d'où, comme dans b), une suite infinie $(x_n)_{n\geq 0}$ contredisant le déf. 5. Enfin, si d) est fausse, il existe un élément non vide x de A tel que $x \cap y \neq \varnothing$ pour tout $y \in x$; on pose $x_\circ = x$, et on prend pour x_1 un élément de x ; comme $x \cap x_1 \neq \varnothing$, on prend pour x_2 un élément de $x \cap x_1$ et caetera ; plus formellement on définit par récurrence une suite infinie $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de x au moyen de $x_1 \in x$, $x_{n+1} \in x_n \cap x$ pour $n \geq 1$; alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ contredit la déf. 5.

Remarque. — Soit $\boldsymbol{B}$ un ensemble. Pour que $\boldsymbol{B}$ soit artinien, il faut et il suffit que tout ensemble A d'ensembles de composants de $\boldsymbol{B}$ satisfasse à la condition d) de la prop. 12. En
205 effet la nécessité résulte de (AR.I) et de la prop. 12. Réciproquement, si $\boldsymbol{B}$ n'est pas artinien, il existe une suite infinie $(x_n)_{n\geq 0}$ avec $x_\circ = \boldsymbol{B}$ et $x_{n+1} \in x_n$ pour tout $n \geq 0$; on prend alors pour A la partie réduite à l'ensemble X des x_n ; ainsi A contient un élément non vide X tel que, pour tout élément y de X, on ait $y \cap X \neq \varnothing$ (en effet y est de la forme x_n, et on a $x_{n+1} \in y \cap X$).

THÉORÈME 2. — *Soit c un cardinal infini. Alors :*

a) *La relation « x est un ensemble artinien de type c (resp. de type strict c) » est collectivisante par rapport à x ; l'ensemble A_c des ensembles artiniens de type c a pour cardinal 2^c.*

b) *Si c est fortement inaccessible, l'ensemble $\boldsymbol{U}_c$ des ensembles artiniens de type strict c est un univers de cardinal c ; le cardinal $c(U_c) = \sup_{x\in U_c} \mathrm{card}(x)$ est c.*

c) *Si un univers $\boldsymbol{U}$ admet un élément de cardinal c, tout ensemble artinien de type c appartient à $\boldsymbol{U}$ (autrement dit $A_c \subset \boldsymbol{U}$).*

c′) *Si un univers $\boldsymbol{U}$ est non vide, tout ensemble artinien de type fini est élément de $\boldsymbol{U}$.*

Avant de démontrer le th. 2, déduisons en quelques corollaires illuminants :

COROLLAIRE 1. — *Si un univers U est artinien, alors* card(U) *est fortement inaccessible, et U est l'ensemble des ensembles artiniens de type strict* card(U).

206 En effet posons $c(U) = \sup_{x\in U} \mathrm{card}(x)$. C'est un cardinal fortement inaccessible (début du n° 5). Supposons le d'abord non dénombrable ; alors, pour tout cardinal infini $c < c(\boldsymbol{U})$, tout ensemble artinien de type c est élément de $\boldsymbol{U}$ par c) ; donc tout ensemble artinien de type strict $c(\boldsymbol{U})$ est élément de $\boldsymbol{U}$ par le lemme du n° 5. Cette dernière assertion reste valable si $c(\boldsymbol{U})$ est dénombrable par c'). Inversement, d'après (U.I), tout ensemble de $\boldsymbol{U}$ est de type strict $c(\boldsymbol{U})$. Donc $\boldsymbol{U}$ est l'univers $\boldsymbol{U}_{c(U)}$ de b), d'où $c(\boldsymbol{U}) = \mathrm{card}(\boldsymbol{U})$ par b).

Il résulte du cor. 1 qu'on univers artinien est *déterminé* de façon unique par son cardinal (d'ailleurs fortement inaccessible). On a donc une « correspondance biunivoque » entre univers artiniens et cardinaux fortement inaccessibles. En particulier :

COROLLAIRE 2. — *La relation d'inclusion $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{U}'$ entre univers artiniens est une relation de bon ordre.*

En effet la relation $c \leq c'$ entre cardinaux est une relation de bon ordre (chap. III) et, avec les notations du b) du th. 2, les relations $c \leq c'$ et $U_c \subset U_{c'}$ sont équivalentes.

Notons que le th. 2, b) donne une seconde démonstration du th. 1 (*n*° 5).

Passons à la démonstration du th. 2. Étant donné un ensemble A, nous appellerons *chaîne* de A toute suite finie $(x_j)_{j=0,\dots,n}$ telle que $x_0 = A$ et que $x_{j+1} \in x_j$ pour $j = 0, \dots, n-1$. Les chaînes de A forment un *ensemble*, d'après le schéma de sélection-réunion ; notons le 207
$G(A)$. Étant donnée une chaîne $X = (x_j)_{j=0,\dots,n}$, les chaînes de la forme $(x_i)_{i=0,\dots,q}$ avec $q \leq n$ seront dites plus petites que X ; on obtient ainsi, sur $G(A)$, une structure d'*ensemble ordonné*. Pour que A soit artinien, il faut et il suffit que $G(A)$ soit un ensemble ordonné « *noethérien* » (c.à.d. satisfaisant aux conditions équivalentes du chap. III, § 6, *n*° 5).

Nous allons montrer que :

(*) *Si A est artinien, il est déterminé de façon unique par la classe d'isomorphisme de l'ensemble ordonné $G(A)$.*

En effet, étant donnés un ensemble ordonné G et un élément $g \in G$, nous noterons $S(g)$ l'ensemble des $g' \in G$ tels que $g < g'$ et que $g \leq h \leq g'$ implique $h = g$ ou $h = g'$ (autrement dit l'ensemble des « successeurs immédiats » de g). Considérons l'application θ qui, à toute chaîne $X = (x_0, \dots, x_n)$ de $G(A)$ fait correspondre l'ensemble x_n ; on a alors, pour tout $X \in G(A)$:

$$\theta(X) = \{\theta(X') | X' \in S(X)\}.$$

Comme A est l'image par θ du plus petit élément $X_0 = (A)$ de $G(A)$, il va nous suffire de montrer que θ est uniquement déterminée par la classe d'isomorphisme de l'ensemble ordonné $G(A)$. Or ceci résulte du lemme suivant :

LEMME 1. — *Soient G un ensemble ordonné noethérien et φ une application de G telle que,* 208
pour tout $g \in G$, on ait :

$$\varphi(g) = \{\varphi(g') | g' \in S(g)\}. \tag{1}$$

Alors φ est déterminée de façon unique. De plus, si U est un univers contenant un élément équipotent à G, φ prend ses valeurs dans U.

L'hypothèse implique qu'on a $\varphi(g) = \varnothing$ si g est un élément maximal de G.

Soient, en effet, φ et φ' deux applications telles que (1) soit vraie ; si $\varphi \neq \varphi'$, l'ensemble des $g \in G$ tels que $\varphi(g) \neq \varphi'(g)$ est non-vide, donc admet un élément *maximal* h car G est noethérien ; on a alors $\varphi(g) = \varphi'(g)$ pour tout $g > h$, en particulier pour tout « successeur » $g \in S(h)$; d'où $\varphi(h) = \varphi'(h)$ par (1), ce qui est une contradiction ; on a donc bien $\varphi = \varphi'$. Soit maintenant U un univers contenant un élément x équipotent à G ; montrons que φ prend ses valeurs dans U ; sinon soit h un élément maximal parmi les $g \in G$ tels que $\varphi(g) \notin U$; on a $\varphi(g') \in U$ pour tout $g' \in S(g)$ de sorte que

$$\varphi(h) = \{\varphi(g') | g' \in S(h)\}$$

est une partie de U ; or, comme son cardinal est inférieur à $\operatorname{card}(G)$ donc au cardinal d'un élément de U, on a $\varphi(h) \in U$ (*n*° 1, prop. 7) ; cette contradiction montre que φ prend ses valeurs dans U.

Ceci étant, démontrons le a) du th. 2. On peut se borner à l'assertion non-respée, car 209
l'autre en découle aussitôt. Soit c un cardinal *infini*. Si A est un ensemble de type c on a :

$$\operatorname{card}(G(A)) \leq c\,. \tag{2}$$

En effet, si on note A_n l'ensemble des composants d'ordre n de A, on a $\mathrm{card}(A_1) \leq c$ et $\mathrm{card}(A_{n+1}) \leq c \cdot \mathrm{card}(A_n)$, d'où $\mathrm{card}(A_n) \leq c^n$ par récurrence ; or $c^n = c$ car c est infini (chap. III) ; d'où $\mathrm{card}(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) \leq \mathrm{card}(\mathbf{N}) \cdot c = c$ (chap. III) ; or $G(A)$ est un ensemble de suites *finies* d'éléments de $\bigcup_n A_n$, de sorte qu'on a bien l'inégalité (2) (chap. III). Ceci étant, si E est un ensemble de cardinal c, la donnée d'une structure d'ordre sur une partie E' de E équivaut à la donnée de la partie de $E \times E$ formée des (x, y) tels que $x \in E'$, $y \in E'$ et $x \leq y$. Donc, en vertu de (2), les classes d'isomorphisme des ensembles ordonnés $G(A)$ (où A est de type c) forment un ensemble $\mathfrak{F}_c$, et on a $\mathrm{card}(\mathfrak{F}_c) \leq \mathrm{card}(\mathscr{P}(E \times E)) = 2^c$. Soit $\mathfrak{F}'_c$ la partie de $\mathfrak{F}_c$ formée des classes d'ensembles ordonnés noethériens ayant un plus petit élément ; si, à tout $G \in \mathfrak{F}'_c$, on fait correspondre la valeur de la fonction φ du lemme 2 au plus petit élément de G, on obtient une application θ de $\mathfrak{F}'_c$ dont l'image contient *tous* les ensembles artiniens de type c. Ces derniers forment donc bien un ensemble A_c, et on a $\mathrm{card}(A_c) \leq \mathrm{card}(\mathfrak{F}'_c) \leq \mathrm{card}(\mathfrak{F}_c) \leq 2^c$.

210 Reste à voir qu'on a $\mathrm{card}(A_c) = 2^c$. Pour cela il suffit de voir qu'il existe un ensemble artinien B de type c et de cardinal c, car les parties de B seront alors des éléments de A_c. Cette existence résulte du lemme suivant :

LEMME 2. — *Pour tout cardinal c, il existe un ensemble artinien B de type c et de cardinal c.*

On procède par induction transfinie sur c. Pour $c = 0$ on n'a pas le choix, et on prend $B = \varnothing$. Si c à un prédécesseur c', soit B' un ensemble artinien de type c' et de cardinal c' ; on a alors $c \leq 2^{c'}$, de sorte qu'il existe une partie B de $\mathscr{P}(B')$ de cardinal c ; les éléments de B sont des parties de B' et ont donc des cardinaux $\leq c' \leq c$; les composants d'ordre supérieur de B sont des composants de B', et ont donc aussi des cardinaux $\leq c' \leq c$. Enfin, si c n'a pas de prédécesseur, on choisit, pour tout cardinal $c_\lambda < c$, un ensemble artinien B_λ de type c_λ et de cardinal c_λ ; alors $B = \bigcup_\lambda B_\lambda$ répond à la question. Ceci démontre le lemme 2, et achève la démonstration de la partie a).

Passons à b). Soit c un cardinal fortement inaccessible. On sait déjà, par a), que les ensembles artiniens de type strict c forment un ensemble U_c. Le fait que U_c est un univers ré-
211 sulte aussitôt des propriétés (AR.I) à (AR.IV) des ensembles artiniens (début du *n*°), et de majorations de cardinaux analogues à celles de la prop. 10 du *n*° 5. La relation $\sup_{x \in U_c} \mathrm{card}(x) = c$ résultedu lemme 2, appliqué aux cardinaux $< c$. Enfin, pour montrer que $\mathrm{card}(U_c) = c$, supposons d'abord c *non dénombrable* ; d'aprèsle lemme du *n*° 5, U_c est la réunion $\bigcup_{d<c} A_d$, où A_d désigne l'ensemble des ensembles artiniens de type d ; or on a $\mathrm{card}(A_d) = 2^d < c$ (par a)) ; d'autre part l'ensemble des cardinaux $d < c$ a un cardinal $\leq c$ (chap. III) ; d'où $\mathrm{card}(U_c) \leq c \cdot c = c$, et aussi $\mathrm{card}(U_c) \geq c$ car $\mathrm{card}(U_c) \geq \mathrm{card}(A_d) = 2^d$ pour tout $d < c$.

Le cas $c = 0$ étant trivial, reste le cas où c est le *cardinal infini dénombrable.* Dans ce cas U_c est l'ensemble des ensembles artiniens de type fini (i.e. finis ainsi que tout leurs composants), et on utilise un joli résultat de nature combinatoire.

LEMME 3. — (D. König ?). *Considérons deux suites infinies $(E_n)_{n \geq 1}$, $(f_n)_{n \geq 1}$ d'ensembles finis E_n et d'applications $f_n : E_{n+1} \to E_n$. S'il n'existe aucune suite infinie $(x_n)_{n \geq 1}$ telle que $x_n \in E_n$ et que $f_n(x_{n+1}) = x_n$ pour tout n, alors E_n est vide pour n assez grand.*

Autrement dit, si toutes les suites (x_n) telles que $f_n(x_{n+1}) = x_n$ sont *finies*, leurs longueurs sont *bornées*. Ça peut s'exprimer en termes de limites projectives : une limite projective d'ensembles finis non vides est non vide (cf. Top. Géné., Chap. I, 2e éd. § 9, *n*° 6, prop. 8, 2°)).

Raisonnons, en effet, par l'absurde. S'il existe des E_n non vides pour n arbitrairement grand, aucun E_n n'est vide (car $E_n = \varnothing$ entraîne $E_{n+1} = \varnothing$ vu l'existence 212
de $f_n : E_{n+1} \to E_n$). Appelons « cohérentes » les suites finies $(x_j)_{1\leq j\leq n}$ telles que $f_j(x_{j+1}) = x_j$ pour $j = 1, \dots, n-1$. Démontrons, par récurrence sur n, l'existence d'une suite cohérente $(a_1, \dots, a_n)$ $(a_i \in E_i)$ qui, pour tout $q \geq n$, peut être prolongée en une suite cohérente $(a_1, \dots, a_n, x_{n+1}, \dots, x_q)$ de longueur q. C'est évident pour $n = 0$, car aucun E_q n'est vide. Passons de n à $n+1$. Si, pour tout $x \in f_n^{-1}(\{a_n\}) \subset E_{n+1}$, toutes des suites cohérentes prolongeant $(a_1, \dots, a_n, x)$ avaient des longueurs bornées par un entier $q(x)$, alors toutes les suites cohérentes prolongeant $(a_1, \dots, a_n)$ seraient de longueurs bornées (par $\sup_x q(x)$) car E_{n+1} est fini ; il existe donc $a_{n+1} \in f_n^{-1}(\{a_n\})$ tel que la suite cohérente $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ admette des prolongements de longueur arbitraire. Ceci étant on a une suite infinie $(a_n)_{n\geq 1}$ qui contredit l'hypothèse.

Il résulte du lemme 3 que si A est un ensemble artinien de type fini, alors l'ensemble ordonné $G(A)$ de ses chaînes est *fini* : on prend, en effet, pour E_n l'ensemble des chaînes $(x_n \in x_{n-1} \in \dots \in x_1 \in A)$ à $n+1$ termes (qui est fini car les composants de A d'ordre $\leq n+1$ sont en nombre fini et sont tout finis), et pour f_n l'application $(x_{n+1} \in x_n \in x_{n+1} \dots) \mapsto$
$(x_n \in x_{n-1} \in \dots)$. Or l'ensemble des classes d'isomorphisme d'ensembles ordonnés finis est 213
dénombrable : en effet, la donnée d'une structure d'ordre sur une partie finie de $\mathbf{N}$ équivaut à celle de son graphe, qui est une partie finie de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$; d'autre part l'ensemble des parties finies d'un ensemble dénombrable est dénombrable (chap. III). Il résulte de (*) et du lemme 1, que l'ensemble $\mathfrak{a}$ des ensembles artiniens de type fini est dénombrable. Il est infini par le lemme 2 (ou, plus simplement, par usage de la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ définie au moyen de $z_=\varnothing$, $z_{n+1} = \{z_n\}$). Ceci termine la démonstration de b).

Remarque. — On vient de démontrer que, si A est un ensemble artinien de type fini, il n'a qu'un nombre fini de composants. Il existe donc un entier n tel que A soit de type n.

Passons à la démonstration de c). Soient c un cardinal infini, U un univers admettant un élément de cardinal c, et A un ensemble artinien de type c. Alors l'ensemble ordonné $G(A)$ a un cardinal $\leq c$ (formule (2) ci-dessus). La seconde assertion du lemme 1, appliquée à $G(A)$, montre que l'application $(x_0, \dots, x_n) \rightsquigarrow x_n$ de $G(A)$ prend ses valeurs dans U. Autrement dit tout les composants de A sont éléments de U. Ceci démontre c). La démonstration de c') est analogue : si A est un ensemble artinien de type fini, on vient de voir que $G(A)$ est fini ; comme U est non-vide, il contient un élément équipotent à $G(A)$ par le cor. à la prop. 7 (*n*° 1). C.Q.F.D.

7. Remarques métamathématiques vaseuses

214

a) L'axiome « *tout ensemble est artinien* » est *inoffensif*. En effet, si on a un modèle M de la Théorie des Ensembles, l'ensemble M' des éléments artiniens de M est aussi un modèle (cf. prop. 11).

b) L'axiome (A.6) des univers (et l'axiome équivalent (A'.6) des cardinaux fortement inaccessibles) est *indépendant* du reste de la Théorie des Ensembles. En effet soit c le premier cardinal fortement inaccessible non dénombrable. L'univers U_c des ensembles artiniens de type strict c (th. 2, b)) est un modèle de la Théorie des Ensembles sans (A.6) : on appelle « ensembles » les éléments de U_c, la « relation d'appartenance » est la restriction à U_c de l'ordinaire, etc. Les « univers » du modèle sont donc les univers ordinaires qui sont éléments de U_c. Or on a vu que les seuls univers qui sont éléments de U_c sont les deux pequeños $U_0 = \varnothing$ et U_1. Ainsi U_1 est un « ensemble » qui n'est élément d'aucun « univers ». On a donc un modèle de la Théorie des Ensembles où (A.6) est faux.

c) Bourbaki a été trop prudent en se contentant de « présumer » que l'*axiome de l'infini* (A.5) est *indépendant* des axiomes et schémas précédents. Il l'est effectivement, car l'univers dénombrable U_1 des ensembles artiniens de type fini est un modèle où (A.5) est faux, et où les axiomes et schémas précédents sont vrais.

d) Il serait très intéressant de démontrer que l'axiome (A.6) des univers est inoffensif. Ça paraît difficile et c'est même indémontrable, dit Paul Cohen.

215 L'adjectif « vaseuses » dans le titre veut dire qu'on ne s'est pas donné la peine, en construisant des modèles, de canuler le symbole τ de sorte qu'il n'en fasse pas sortir. La clef de ça, si on considère un modèle M, est de remplacer le $\tau_x(\mathscr{R}(x))$ ordinaire par :

$$\tau_x(\mathscr{R}(x) \text{ et } x \in M).$$

Encore faut-il vérifier que ça transforme bien les quantificateurs ordinaires en les quantificateurs autrefois dits « typiques » :

$$(\forall x \in M) \quad , \quad (\exists x \in M).$$

Exercices. — 1) Soit n un entier ≥ 1. Montrer que l'ensemble des ensembles artiniens de type n est infini (les ensembles $z_0 = \varnothing$, $z_1 = \{\varnothing\}$, $z_{q+1} = \{z_q\}$ sont de type 1).

2) Appelons *hauteur* d'un ensemble A la borne supérieure (finie ou infinie) des entiers n tels qu'il existe une suite $x_n \in x_{n-1} \in \ldots \in x_0 =$. Montrer que les ensembles de hauteur $\leq n$ sont finis et forment un ensemble fini, dont le cardinal p_n se calcule au moyen de $p_0 = 1$, $p_{n+1} = 2^{p_n}$ (procéder par récurrence sur n, en notant que les éléments d'un ensemble A de hauteur $\leq n$ sont des ensembles de hauteur $\leq n-1$).

3) Soit G un ensemble ordonné noethérien admettant un plus petit élément g_0 et tel que pour tout $h \in G$, l'ensemble de $g \leq h$ sont fini et totalement ordonné.

216 a) Montrer que tout élément $h \neq g_0$ de G admet un prédécesseur et un seul.

b) Soit φ l'application de G définie dans le lemme 1 (i.e. $\varphi(g)$ est, l'ensemble des $\varphi(g')$ où g' parcourt l'ensemble des successeurs de g). On pose $A = \varphi(g_0)$. Montrer que A est un ensemble artinien. Pour $g \in G$, soit $g_0 < g_1 < \cdots < g_n = g$ la suite des éléments $\leq g$; posons $f(g) = (\varphi(g_0), \varphi(g_1), \ldots, \varphi(g_n))$; montrer que f est une application croissante et surjective de G sur l'ensemble ordonné $G(A)$ du texte. Montrer que, si f est *injective*, c'est un *isomorphisme* de G sur $G(A)$.

c) Pour $g \in G$, soit M_g l'ensemble des majorants de g. On suppose que, pour tout couple d'éléments distincts g, g' ayant même prédécesseur p, les ensembles ordonnés M_g et $M_{g'}$ sont non isomorphes. Montrer que l'application f de b) est alors un *isomorphisme* de G sur $G(A)$. [Si $f(g) = f(g')$ avec $g \neq g'$ et si $g_0 < g_1 < \cdots < g_n = g$ et $g'_0 < g'_1 < \cdots < g'_{n'} = g'$ sont la suite des éléments $\leq g$ et celles des éléments $\leq g'$, montrer que $n = n'$, et qu'on peut supposer que g et g' ont le même prédécesseur p ; considérer alors l'ensemble des $p \in G$ tels qu'il existe deux successeurs distincts g, g' de p tels que $f(g) = f(g')$, un élément maximal q de cet ensemble, et deux successeurs distincts h, h' de q tels que $f(h) = f(h')$; noter que les restrictions de f à M_h et à $M_{h'}$ sont injectives, donc (par b)) sont des isomorphismes de M_h sur $G(\varphi(h))$ et de $M_{h'}$ sur $G(\varphi(h'))$; déduire de l'hypothèse de non-isomorphisme de M_h et $M_{h'}$ qu'on a $\varphi(h) \neq \varphi(h')$. ce qui contredit $f(h) = f(h')$].

N.B. L'exercice 3) donne des renseignements très précis sur la manière dont sont « fabriqués » les ensembles artiniens. On savait déjà qu'un tel ensemble A est déterminé par la classe d'isomorphisme de l'ensemble ordonné $G(A)$ (lemme 1). On sait maintenant *caractériser* les ensembles ordonnés G isomorphes à des $G(A)$: **217**

α) G est noethérien et admet un plus petit élément ;

β) Pour tout $g \in G$, l'ensemble des $h \leq g$ est totalement ordonné et fini (d'où l'existence et l'unicité du prédécesseur de g) ;

γ) Si g, g' sont des éléments distincts ayant même prédécesseur, l'ensemble M_g des majorants de g et celui $M_{g'}$ des majorants de g ne sont pas isomorphes.

4) Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ la suite des *ordinaux* finis, définie par $A_0 = \varnothing$, $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$. Montrer que l'ensemble ordonné $G(A_n)$ a 2^n éléments, et que le nombre de ses éléments de hauteur q (au sens de l'exerc. 2)) est $\binom{n}{q}$.

Références

[1] B. Mitchell, *Theory of categories*, Academic Press, 1965.